ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2002. Вып. 32

УДК 62-50

©2002. **В.Н. Неспирный**

СТАБИЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ УПРАВЛЕНИЯ С ГИБРИДНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В работе рассматриваются трехмерные линейные системы управления. Найдены условия их управляемости, стабилизируемости, наблюдаемости и детектабельности в терминах коэффициентов системы. Проанализирована стабилизируемость системы по выходу. Указаны условия, при которых невозможна стабилизация по выходу даже при помощи автомата, и приведены примеры систем, не стабилизируемых обычным управлением по выходу, но стабилизируемых с помощью автомата.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую систему управления

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – физическое состояние системы; $y \in \mathbb{R}^m$ – выход; $u \in \mathbb{R}^l$ – управление; A, B, C – заданные действительные матрицы размерами $n \times n$, $n \times l$, $m \times n$ соответственно.

Задача состоит в том, чтобы синтезировать управление, асимптотически стабилизирующее систему (1) (далее, когда речь будет идти об устойчивости, будет подразумеваться именно асимптотическая устойчивость). Однако при построении управления не известна полная информация о состоянии системы, и допустимо использовать лишь выход системы y.

В работе [1] был приведен пример двумерной линейной системы, которая, несмотря на управляемость и наблюдаемость, не может быть стабилизирована управлением с обратной связью по выходу (то есть в виде $u = f(y)$, даже если функция f является нелинейной или разрывной). Тем не менее, было построено стабилизирующее управление при помощи автомата в цепи обратной связи.

В работе [2] дана полная классификация плоских линейных систем по возможности стабилизации их по выходу. Будем использовать определения, принятые в [2]:

Определение 1. Пара (A, B) управляема, если $\operatorname{rank}\,[B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B] = n$.

Определение 2. Пара (A, C) наблюдаема, если $\operatorname{rank}\,[C^T\ A^TC^T\ \dots\ (A^T)^{n-1}C^T] = n$.

Определение 3. Пара (A, B) стабилизируема, если существует матрица F размерности $l \times n$ такая, что $A + BF$ – устойчивая матрица (то есть имеющая собственные значения лишь с отрицательной вещественной частью).

Отметим, что стабилизируемость пары (A, B) еще не означает стабилизируемость по выходу системы (1). В действительности, это лишь означает, что управление $u = Fx$ делает систему устойчивой, а нам требуется управление, зависящее лишь от y.

Определение 4. Пара (A, C) детектабельна, если существует матрица K размерности $n \times m$ такая, что $A + KC$ – устойчивая матрица.

Отметим, что из управляемости пары (A, B) следует ее стабилизируемость, а из наблюдаемости (A, C) – детектабельность.

Определение 5. Автоматом называется шестерка $\Delta = (Q, I, M, T, i, q_0)$, где

- Q – множество всех возможных состояний автомата, $\operatorname{card} Q \le \mathcal{N}_0$;

- I – множество, содержащее входной алфавит, $\operatorname{card} I \le \mathcal{N}_0$;
- $M : Q \times I \to Q$ – карта переходов, указывающая новое состояние в зависимости от текущего состояния q и входа i в момент перехода;
- $T : Q \to (0, \infty)$ – отображение, которое устанавливает период времени между моментами перехода, то есть $T(q)$ – время, которое автомат находится в состоянии q перед переходом в следующее состояние;
- $i : \mathbb{R}^m \to I$ – функция, обеспечивающая элемент $i(y)$ алфавита I для любого выхода y системы (1);
- q_0 – состояние автомата в начальный момент времени τ_0 (без ограничения общности можно считать, что $\tau_0 = 0$).

Любой автомат Δ определяет оператор F_Δ. Для каждого $y \in C([0, \infty))$ он задается следующим образом:

$$(F_\Delta y)(t) = q(\tau_k) \text{ при } t \in [\tau_k, \tau_{k+1}),$$

$$\tau_{k+1} = \tau_k + T(q(\tau_k)),\ q(\tau_{k+1}) = M(q(\tau_k), i(y(\tau_{k+1}))),$$

$$q(\tau_0) = q_0,\ \tau_0 = 0.$$

Таким образом, $(F_\Delta y)(t)$ есть состояние автомата Δ в момент времени t.

Определение 6. Управление $u(\cdot)$, определяемое соотношением

$$u(t) = \Phi(y(t), F_\Delta y(t)), \tag{2}$$

называется общим управлением с гибридной обратной связью, где $\Phi : \mathbb{R}^m \times Q \to \mathbb{R}^l$ – некоторая функция.

Следовательно, любое управление u однозначно определяется автоматом Δ и функцией Φ.

Будем рассматривать подкласс общего управления с гибридной обратной связью, который обозначается $\mathcal{LH}_k,\ k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{LH}_k = \{(\Delta, \Phi) | \Phi(y, q) \text{ линейно зависит от } y,\ \operatorname{card} Q \le k,\ \operatorname{card} I \le k\}.$$

Это класс линейных элементарных управлений с гибридной обратной связью с максимум k состояниями, то есть $u = \Phi(y, q) = G(q)y$, где $G : Q \to \mathcal{M}_{lm}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{lm}(\mathbb{R})$ – множество матриц размерности $l \times m$ с вещественными элементами.

2. Предварительные результаты. Укажем вначале условия управляемости и стабилизируемости пары (A, B), а также наблюдаемости и детектабельности пары (A, C).

В дальнейшем будем рассматривать трехмерные системы вида (1) с одномерным выходом и одномерным управлением ($n = 3, m = 1, l = 1$). Тогда матрицы A, B, C имеют соответственно размерности 3×3, 3×1, 1×3 ($B = (b_1, b_2, b_3)^T, C = (c_1, c_2, c_3)$). На таких тройках (A, B, C) определим группу преобразований GT, которая порождается следующими тремя преобразованиями:

$$\begin{array}{lll}
T_1(\Delta): & (A, B, C) \to (\Delta A \Delta^{-1}, \Delta B, C\Delta^{-1}), & \Delta \in GL_3(\mathbb{R}); \\
T_2(m_1, m_2, m_3): & (A, B, C) \to (m_1 A, m_2 B, m_3 C), & m_1 > 0, m_2 \ne 0, m_3 \ne 0; \\
T_3(\alpha): & (A, B, C) \to (A + \alpha BC, B, C), & \alpha \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

Здесь $GL_3(\mathbb{R})$ – мультипликативная группа всех обратимых 3×3-матриц с вещественными элементами.

Лемма 1. Свойства управляемости (стабилизируемости) пары (A, B) и наблюдаемости (детектабельности) пары (A, C) инвариантны относительно преобразований группы GT.

Доказательство может быть проведено непосредственно по определениям 1–4 для каждого из преобразований T_1, T_2, T_3, образующих группу GT.

Применяя преобразование T_1, можно привести матрицу A к одной из следующих нормальных жордановых форм (опуская тривиальный случай, когда матрица A – устойчивая).

Случай A1. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda \geq 0$.

Пара (A, B) никогда не стабилизируема, (A, C) никогда не детектабельна.

Случай A2. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda \geq 0$.

Пара (A, B) никогда не стабилизируема, (A, C) никогда не детектабельна.

Случай A3. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda \geq 0$.

Пара (A, B) управляема (стабилизируема) тогда и только тогда, когда $b_3 \neq 0$.

Пара (A, C) наблюдаема (детектабельна) тогда и только тогда, когда $c_1 \neq 0$.

Случай A4. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 > \lambda_2, \lambda_1 \geq 0$.

Пара (A, B) никогда не стабилизируема, (A, C) никогда не детектабельна.

Случай A5. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 > \lambda_2, \lambda_1 \geq 0$.

Пара (A, B) управляема тогда и только тогда, когда $b_2 \neq 0, b_3 \neq 0$. Пара (A, B) стабилизируема, но не управляема тогда и только тогда, когда $b_2 \neq 0, b_3 = 0, \lambda_2 < 0$.

Пара (A, C) наблюдаема тогда и только тогда, когда $c_1 \neq 0, c_3 \neq 0$. Пара (A, C) детектабельна, но не наблюдаема тогда и только тогда, когда $c_1 \neq 0, c_3 = 0, \lambda_2 < 0$.

Случай A6. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 > \lambda_2, \lambda_1 \geq 0$.

Пара (A, B) никогда не стабилизируема. Пара (A, B) стабилизируема, но не управляема тогда и только тогда, когда $b_1 \neq 0, \lambda_2 < 0$.

Пара (A, C) никогда не детектабельна. Пара (A, C) детектабельна, но не наблюдаема тогда и только тогда, когда $c_1 \neq 0, \lambda_2 < 0$.

Случай A7. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 > \lambda_2, \lambda_1 \geq 0$.

Пара (A, B) управляема тогда и только тогда, когда $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$. Пара (A, B) стабилизируема, но не управляема тогда и только тогда, когда $b_1 \neq 0, b_3 = 0, \lambda_2 < 0$.

Пара (A, C) наблюдаема тогда и только тогда, когда $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$. Пара (A, C) детектабельна, но не наблюдаема тогда и только тогда, когда $c_1 \neq 0, c_2 = 0, \lambda_2 < 0$.

Случай A8. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3, \lambda_1 \geq 0$.

Пара (A, B) управляема тогда и только тогда, когда $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, b_3 \neq 0$. Пара (A, B) стабилизируема, но не управляема тогда и только тогда, когда $b_1 \neq 0, b_2 = 0, \lambda_2 < 0$ или $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, b_3 = 0, \lambda_3 < 0$.

Пара (A, C) наблюдаема тогда и только тогда, когда $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, c_3 \neq 0$. Пара (A, C) детектабельна, но не наблюдаема тогда и только тогда, когда $c_1 \neq 0, c_2 = 0, \lambda_2 < 0$ или $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, c_3 = 0, \lambda_3 < 0$.

Случай A9. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_1 \geq 0, \mu > 0$.

Пара (A, B) управляема тогда и только тогда, когда $|b_1| + |b_2| \neq 0, b_3 \neq 0$. Пара (A, B) стабилизируема, но не управляема тогда и только тогда, когда $|b_1| + |b_2| \neq 0, b_3 = 0, \lambda_2 < 0$.

Пара (A, C) наблюдаема тогда и только тогда, когда $|c_1| + |c_2| \neq 0, c_3 \neq 0$. Пара (A, C) детектабельна, но не наблюдаема тогда и только тогда, когда $|c_1| + |c_2| \neq 0, c_3 = 0, \lambda_2 < 0$.

Случай A10. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \mu \\ 0 & -\mu & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 > \lambda_2, \lambda_1 \geq 0, \mu > 0$.

Пара (A, B) управляема тогда и только тогда, когда $b_1 \neq 0, |b_2| + |b_3| \neq 0$. Пара (A, B) стабилизируема, но не управляема тогда и только тогда, когда $b_1 \neq 0, b_2 = b_3 = 0, \lambda_2 < 0$.

Пара (A, C) наблюдаема тогда и только тогда, когда $c_1 \neq 0, |c_2| + |c_3| \neq 0$. Пара (A, C) детектабельна, но не наблюдаема тогда и только тогда, когда $c_1 \neq 0, c_2 = c_3 = 0, \lambda_2 < 0$.

3. Стабилизируемость при помощи автомата в цепи обратной связи. Как было показано в [3], система вида (1) может быть стабилизирована по выходу при помощи автомата в цепи обратной связи, если пара (A, B) – управляема, а пара (A, C) – наблюдаема. Однако, у такого автомата может быть бесконечное число состояний, и функция Φ не зависит явно от y.

Лемма 2. Пусть тройка $(A_1, B_1, C_1) = T(A, B, C)$ для некоторого преобразования $T \in GT$. Тогда система (1) допускает линейную элементарную стабилизацию с гибридной обратной связью ($\mathcal{LH}_k$) тогда и только тогда, когда такую же стабилизацию (с тем же самым числом состояний k) допускает и система

$$\begin{cases} \dot{x_1} = A_1 x_1 + B_1 u_1, \\ y_1 = C_1 x_1, \end{cases}$$

Доказательство следует из того, что преобразованиям, порождающим группу GT, соответствуют замены переменных

$$\begin{array}{ll} T_1: & x_1 = \Delta x; \\ T_2: & t_1 = m_1^{-1} t,\ u_1 = m_1 m_2^{-1} u,\ y_1 = m_3 y; \\ T_3: & u_1 = u - \alpha y. \end{array}$$

Это дает возможность записать управление u_1, зная управление u для системы (1).

Следующая теорема дает условия нестабилизируемости системы (1) даже при помощи автомата.

Теорема 1. Предположим, что матрица A – неустойчива, B, C – ненулевые векторы и пара (A, B) не является стабилизируемой или пара (A, C) не является детектабельной. Тогда система (1) не может быть стабилизирована линейным управлением с гибридной обратной связью ($u \in \mathcal{LH}_k$).

Доказательство. Для каждого из случаев *A1–A10* проведем доказательство отдельно.

Случай A1. Заметим, что преобразование T_1 не изменяет форму матрицы A. Поэтому, выбрав соответствующим образом матрицу преобразования Δ, можно сделать вектор B равным $(0, 0, 1)^T$. Подставив управление $u = \alpha(q)y$ в систему (1), получим

$$\dot{x_1} = \lambda x_1, \quad \dot{x_2} = \lambda x_2, \quad \dot{x_3} = \alpha(q)c_1x_1 + \alpha(q)c_2x_2 + (\lambda + \alpha(q)c_3)x_3. \tag{1}$$

Отсюда видно, что координаты x_1 и x_2 с течением времени возрастают по модулю вне зависимости от состояния присоединенного автомата. Поэтому система (1) не может быть стабилизирована.

Случай A2. Преобразованием T_1 можно добиться того, что матрица A не изменится, а компонента b_2 вектора B станет равной 0. Это значит, что мы придем к системе, одним из уравнений которой будет $\dot{x_2} = \lambda x_2$, откуда следует невозможность стабилизации.

Случай A3. По условию теоремы (A, B) – не стабилизируема или (A, C) – не детектабельна. Это значит, что хотя бы одно из чисел b_3 и c_1 равно нулю. Первое обозначает, что система содержит уравнение $\dot{x_3} = \lambda x_3$, а второе – что при любом управлении из $\mathcal{LH}_k$ функция $x(t) = e^{\lambda t}(1, 0, 0)^T$ является решением системы. В обоих случаях, имеем отсутствие стабилизируемости.

Аналогичным образом рассматриваются и остальные случаи. □

Теорема 2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$, где

$$\gamma_1, \gamma_2 < 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 > -1. \tag{3}$$

Тогда система (1) не допускает линейного управления с гибридной обратной связью, стабилизирующего нулевое решение.

Доказательство. Пара (A, B) не является управляемой, но является стабилизируемой, а пара (A, C) – не наблюдаема, но детектабельна. Поэтому при исследовании стабилизации такой системы нельзя воспользоваться ни теоремой 1, ни результатами работы [3].

Подставив управление класса $\mathcal{LH}_k$ в систему (1), получаем

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + x_3, \\ \dot{x_2} = x_1 + x_3, \\ \dot{x_3} = x_1 + x_2 + \alpha(q)(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + x_3). \end{cases} \tag{4}$$

Возьмем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и определим область

$$\Gamma_\varepsilon = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq \varepsilon, x_2 \geq \varepsilon, \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + x_3 \geq 0\}.$$

Покажем, что эта область независимо от $\alpha(q)$ является инвариантным множеством относительно потока системы (4). Для этого достаточно показать, что векторы скорости этой системы на границе области Γ_ε направлены внутрь области.

Действительно, на границе $x_1 = \varepsilon$ имеем $\dot{x_1} = x_2 + x_3 \geq (1 - \gamma_1 - \gamma_2)\varepsilon > 0$, поэтому траектория системы (3) не может выйти из области Γ_ε через эту границу.

На границе $x_2 = \varepsilon$ – $\dot{x_2} = x_1 + x_3 \geq (1 - \gamma_1 - \gamma_2)\varepsilon > 0$. Здесь также векторы скорости направлены внутрь области.

Наконец, рассмотрим границу $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + x_3 = 0$. На ней

$$\dot{x_1} = -\gamma_1 x_1 + (1 - \gamma_2)x_2, \quad \dot{x_2} = (1 - \gamma_1)x_1 - \gamma_2 x_2, \quad \dot{x_3} = x_1 + x_2.$$

Нормальный вектор, направленный внутрь области Γ_ε, равен $(\gamma_1, \gamma_2, 1)^T$. Проекция вектора скорости на это направление

$$(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 1)^{-1/2}(1 + \gamma_1 + \gamma_2)((1 - \gamma_1)x_1 + (1 - \gamma_2)x_2)$$

положительна в силу (3).

Таким образом, мы показали, что траектория системы (4), имеющая начальную точку в области Γ_ε, лежит полностью внутри этой области. Поскольку Γ_ε отделена от начала координат, то нулевое решение не является асимптотически устойчивым. $\square$

Данная теорема может быть распространена и на n-мерный случай.

Теорема 3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - E, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_{n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

где E - единичная матрица порядка n; $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} < 0$, $\gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1} > -1$. Тогда система (1) не допускает управления класса $\mathcal{LH}_k$, стабилизирующего нулевое решение.

4. Примеры.

Пример 1. Перенесем пример Арцтейна [1] в трехмерное пространство.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стабилизация может быть осуществлена при помощи следующего автомата: множество состояний $Q = \{q_0, q_d\}$, входной алфавит $I = \{``+", ``-"\}$, карта переходов M: $M(q_0, ``+") = q_d$, $M(q_0, ``-") = M(q_d, ``+") = M(q_d, ``-") = q_0$, время между моментами перехода $T(q_0) = \delta, T(q_d) = 1.5\pi(1 + k)^{-1/2}$, $i(y) = ``+"$ при $y \geq 0$, $i(y) = ``-"$ при $y < 0$, начальное состояние – q_0.

Управление (2) можно определить следующим образом: $\Phi(y, q_0) = 0, \Phi(y, q_d) = -ky$. Здесь δ – достаточное маленькое число, k – произвольное положительное число.

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для стабилизации такой системы может быть построен следующий автомат. Множество состояний $Q = \{q_0, q_d\}$, входной алфавит $I = \{“+”, “-”\}$, карта переходов M: $M(q_0, “+”) = q_d, M(q_0, “-”) = M(q_d, “+”) = M(q_d, “-”) = q_0$, время между моментами перехода $T(q_0) = \delta, T(q_d) = 1.5\pi(-1+k)^{-1/2}$, $i(y) = “+”$ при $y \geq 0$, $i(y) = “-”$ при $y < 0$, начальное состояние – q_0.

Управление: $\Phi(y, q_0) = -2y, \Phi(y, q_d) = -ky$. Здесь δ – снова достаточное маленькое число, k – число, удовлетворяющее неравенству $\frac{\pi}{2}\left(1 + 3(-1+k)^{-1/2}\right) - \ln\sqrt{-1+k} < 0$.

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данный случай сводится при помощи преобразования из GT к случаю, уже рассмотренному в примере 2. Поэтому соответствующий автомат можно получить из автомата для примера 2 при помощи обратного преобразования. Но поскольку это преобразование касается лишь фазового пространства, то автомат и управление останутся прежними.

Пример 4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь необходим автомат с тремя состояниями. Он может быть описан следующим образом. Множество состояний $Q = \{q_0, q_-, q_d\}$, входной алфавит $I = \{“+”, “-”\}$, карта переходов M: $M(q_-, “+”) = q_0$, $M(q_-, “-”) = M(q_d, “+”) = M(q_d, “-”) = q_-$, $M(q_0, “+”) = M(q_0, “-”) = q_d$, время между моментами перехода $T(q_0) = \frac{\pi}{2}, T(q_-) = \delta$, $T(q_d) = (k^2/4 - 1)^{-1/2} \ln\left(k/2 + \sqrt{k^2/4 - 1}\right)$, $i(y) = “+”$ при $y \geq 0$, $i(y) = “-”$ при $y < 0$, начальное состояние – q_0.

Управление: $\Phi(y, q_0) = \Phi(y, q_-) = 0, \Phi(y, q_d) = -ky$. Здесь δ, как всегда, достаточное маленькое число, k – число, удовлетворяющее неравенству $(2-k)(k^2-4)^{-1/2} \times \ln\left(k/2 + \sqrt{k^2/4 - 1}\right) < -1.5\pi$.

1. *Artstein Z.* Example of stabilization with hybrid feedback // Hybrid System III. Verification and Control. Lecture Notes in Comput. Sci. – 1996. – **1066**. – P. 173 - 185.
2. *Litsyn E., Nepomnyashchikh Yu. V. and Ponosov A.* Classification of linear dynamical systems in the plane in admitting a stabilizing hybrid feedback control // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2000. – **6**, No.4. – P. 477 - 501.
3. *Litsyn E., Nepomnyashchikh Yu. V. and Ponosov A.* Stabilization of linear differential systems via hybrid feedback control // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2000. – **38**, No.5. – P. 1468 - 1480.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
techmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 19.10.2002