УДК 517.929

©2002. **Г.А. Троценко**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Предложен вариант прямого метода Ляпунова для систем указанного класса, в котором условие на производную функционала вдоль траекторий системы ослаблено по сравнению с известными общими результатами для уравнений нейтрального типа.

Для автономных систем $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, известен следующий результат, усиливающий теорему Ляпунова: для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ достаточно, чтобы существовала положительно определенная функция $v(x)$ такая, что $\dot{v}(x) \leqslant 0$ и при этом поверхности уровня $v(x) = \text{const} > 0$ не содержат целых траекторий [1, c.19]. В работе [2] показано, что этот результат переносится, с естественным видоизменением в формулировке, на неавтономные системы $\dot{x} = f(x,t)$ при условии, что правая часть, функция Ляпунова $v(x,t)$ и ее частные производные первого порядка почти периодичны по t. В [3] этот результат распространен на системы функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) запаздывающего типа $\dot{x} = f(x_t, t)$. В отличие от традиционного подхода, в [3] рассматривались гладкие функционалы $V(\varphi, t)$ Ляпунова-Красовского, производная $\dot{V}(\varphi, t)$ вдоль траекторий системы понималась в рамках теории гладких отображений банаховых пространств. В [4] в рамках этого подхода получен и проиллюстрирован на примере из теории управления достаточный признак слабой экспоненциальной устойчивости для линейной дифференциально-разностной системы запаздывающего типа (термин "слабой" означает, что скорость экспоненциального убывания зависит от начального возмущения). В данной работе результат из [3] распространен на системы ФДУ нейтрального типа. В качестве исходного класса функционалов $V(\varphi, t)$ выбран подкласс гладких функционалов, позволяющий конструктивно вычислять производную $\dot{V}(\varphi, t)$ для ФДУ нейтрального типа и достаточный для ряда приложений [5, c.349, 351.–8]. Важную роль в выполняемых построениях играет, как и в [3], критерий компактности Бохнера для почти периодических функций. Обоснование сходимости к нулю ограниченных решений системы потребовало здесь привлечения существенно более тонких приемов по сравнению с [3].

Далее $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$; $a = \text{const} > 0$, $J = [-a, 0]$; $C[J]$ – банахово пространство непрерывных функций $\varphi(\theta) : J \to \mathbb{R}^n$, с нормой $\|\varphi\| = \max|\varphi|$. Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}[x(t) - g(x_t, t)] = f(x_t, t). \tag{1}$$

Здесь $f, g : C[J] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in J$. Будем предполагать:

1. Отображения f, g непрерывны в $C[J] \times \mathbb{R}$ и удовлетворяют условию Липшица по φ: $|f(\varphi_1, t) - f(\varphi_2, t)| \leqslant L\|\varphi_1 - \varphi_2\|$, $|g(\varphi_1, t) - g(\varphi_2, t)| \leqslant \rho\|\varphi_1 - \varphi_2\|$, где $\varphi_k \in C[J]$, $t \in \mathbb{R}$, L, ρ – положительные постоянные, при этом

$$\rho < 1. \tag{2}$$

2. f, g почти периодичны по t равномерно по φ на каждом шаре $\|\varphi\| \leqslant \text{const}$.
3. $f(0, t) = g(0, t) = 0$.

Под решением системы (1) понимается непрерывная функция $x(t) : [-a, \infty) \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при $t \geqslant 0$ интегральному уравнению

$$[x(\tau) - g(x_\tau, \tau)]_0^t = \int_0^t f(x_\tau, \tau) d\tau. \tag{3}$$

При условии (2) решение уравнения (3) однозначно определяется начальным условием $x_0(\theta) = \varphi \in C[J]$ [5, гл.12, 12.2].

Пусть функции $v_0(y, t)$, $v_1(z, t, \theta)$ со значениями в $\mathbb{R}$ определены соответственно на множествах $\{|y| \leqslant 2r\} \times \mathbb{R}$, $\{|z| \leqslant r\} \times \mathbb{R} \times J$ при некотором $r > 0$ и удовлетворяют условиям

1) v_0 гладкая, v_1 – непрерывная функция, гладкая по t, θ;
2) v_0, v_1 и их частные производные первого порядка почти периодичны по t равномерно по остальным переменным;
3) $v_0(0, t) = v_1(0, t, \theta) = 0$;
4) имеют место оценки

$$\alpha_1(|y|) \leqslant v_0 \leqslant \alpha_2(|y|), \quad 0 \leqslant v_1 \leqslant \alpha_3(|z|),$$

где $\alpha_k(s)$ – непрерывные неубывающие функции $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\alpha_k(0) = 0$, $\alpha_k > 0$ при $s > 0$.

Обозначим B_r шар $\|\varphi\| \leqslant r$ и построим функционал $B_r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$V(\varphi, t) = v_0(g_0, t) + \int_{-a}^0 v_1(\varphi(\theta), t, \theta) d\theta, \quad g_0 = \varphi(0) - g(\varphi, t) \tag{4}$$

(так как, с учетом $g(0, t) = 0$ и условия Липшица для g, $|g(\varphi, t)| \leqslant \rho\|\varphi\|$, то $|g_0(\varphi, t)| \leqslant \leqslant |\varphi(0)| + \rho\|\varphi\| \leqslant 2r$, поэтому $v_0(y, t)$ определена при $y = g_0$). Из 4) следуют оценки

$$\alpha_1(|g_0|) \leqslant V(\varphi, t) \leqslant \alpha_4(\|\varphi\|), \quad \alpha_4(s) = \alpha_2(2s) + a \cdot \alpha_3(s); \tag{5}$$

$\alpha_4(s)$ обладает теми же свойствами, что и $\alpha_k(s)$, $k \leqslant 3$. Вычисления с учетом равенства

$$\int_{-a}^0 v_1(x_t, t, \theta) d\theta = \int_{t-a}^t v_1(x(s), t, s - t) ds$$

дают для производной функционала (4) вдоль траекторий системы (1) формулу

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varphi, t) = \frac{\partial v_0(g_0, t)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial v_0(g_0, t)}{\partial y}, f(\varphi, t) \right\rangle + \\ + \int_{-a}^0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)_{(\varphi, t, \theta)} d\theta + v_1(\varphi(0), t, 0) - v_1(\varphi(-a), t, -a); \end{aligned} \tag{6}$$

здесь $<,>$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Будем далее называть решение $x(t)$ системы (1) существенно ненулевым, если $\|x_t\| > 0$ при $t \geqslant 0$; остальные решения обращаются в нуль, начиная с некоторого момента.

Теорема. Пусть для системы (1) существуют функции v_0, v_1 со свойствами 1)–4) такие, что для функционала V выполняются соотношения:

1°. $\dot{V}(\varphi, t) \leqslant 0, \quad (\varphi, t) \in B_r \times \mathbb{R}^+$;

2°. $\dot{V}$ отличен от тождественного нуля на каждом существенно ненулевом решении системы (1):

$$\|x_t(\theta)\| > 0 \text{ при } t \geqslant 0 \Rightarrow \ \dot{V}(x_t, t) \not\equiv 0.$$

Тогда решение $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из оценок (5) и условия 1° теоремы следует: решение $x = 0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову [9, с.172]. Пусть $\Delta \in (0, r]$ таково, что при $x_0(\theta) \in B_\Delta$ имеет место неравенство $|x(t)| \leqslant r$, $t \geqslant 0$. Покажем, что

$$x_0(\theta) \in B_\Delta \Rightarrow \lim x(t) = 0 \quad (t \to +\infty). \tag{7}$$

1. Покажем, что каждое решение $x(t)$ уравнения (3), начинающееся в B_Δ, равномерно непрерывно на полуоси $t \geqslant 0$. Так как $|x(t)| \leqslant r$, то для любого $\delta > 0$

$$\omega(\delta) = \sup_{t \geqslant 0} |x(t+\delta) - x(t)| < \infty.$$

Покажем, что для любой последовательности $\delta_n \downarrow 0$

$$\lim \omega(\delta_n) = 0 \qquad (n \to \infty). \tag{8}$$

Из (3) с учетом $x_\tau \in B_r$, $f(0, \tau) = 0$ и условия Липшица для f, g легко получить:

$$|x(t+\delta_n) - x(t)| \leqslant \rho[\omega(\delta_n) + \varepsilon_n'] + \varepsilon_n'' + Lr\delta_n, \quad t \geqslant 0,$$

$$\text{где} \quad \varepsilon_n' = \sup_{|t| \leqslant a} |x(t+\delta_n) - x(t)|, \quad \varepsilon_n'' = \sup_{t \in \mathbb{R}, \varphi \in B_r} |g(\varphi, t+\delta_n) - g(\varphi, t)|.$$

Функция $x(t)$ равномерно непрерывна на $[-a, a]$, поэтому $\varepsilon_n' \to 0$ при $n \to \infty$. Функция $g(\varphi, t)$ почти периодична по t равномерно по $\varphi \in B_r \Rightarrow$ равномерно непрерывна на оси $\mathbb{R}$ равномерно по $\varphi \in B_r$ [10, с.8], поэтому $\varepsilon_n'' \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует (8).

2. Обозначим H оболочку почти периодической по t четверки отображений

$$h_0(\varphi, y, z, t, \theta) = [f(\varphi, t), g(\varphi, t), v_0(y, t), v_1(z, t, \theta)] : \tag{9}$$

$h = (F, G, \omega_0, \omega_1) \in H$, если существует такая последовательность $\tau_n \in \mathbb{R}$, что

$$\sup_M |h_0(\varphi, y, z, t+\tau_n, \theta) - h(\varphi, y, z, t, \theta)| \to 0$$

при $n \to \infty$, где $M = B_r \times \{|y| \leqslant 2r\} \times \{|z| \leqslant r\} \times \mathbb{R} \times J$. Для четверок $h \in H$ сохраняются указанные выше свойства h_0. Аналогично введем оболочку H_0 пары (f, g). Поставим в соответствие каждой $h \in H$ систему

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G(x_t, t)] = F(x_t, t) \tag{10}$$

и функционал $V_h(\varphi, t)$, вычисляемый по формуле (4) с заменой h_0 на h. Производная $\dot{V}_h(\varphi, t)$ дается формулой (6) с такой же заменой. Справедливы утверждения.

(i) Если последовательность $(F_n, G_n) \in H_0$ сходится к (F, G) в топологии H_0, $x(t)$ – решение системы (10) с начальной функцией $x_0(\theta)$, $x_n(t)$ – решение системы, получаемой из (10) заменой (F, G) на (F_n, G_n), с начальной функцией $x_{0n}(\theta)$ и при этом $x_{0n}(\theta) \to x_0(\theta)$ в топологии $C[J]$, то $x_n(t) \to x(t)$ равномерно на каждом отрезке $[0, T]$, $T > 0$.

(ii) Если четверка (9) удовлетворяет условиям 1°, 2° теоремы, то все четверки $h \in H$ удовлетворяют тем же условиям: $\dot{V}_h \leqslant 0$, $\dot{V}_h(x_t, t) \not\equiv 0$ на существенно ненулевых решениях.

Обоснование проводится повторением доказательств аналогичных утверждений в [3].

3. Пусть соотношение (7) не имеет места. Тогда существует начинающаяся в B_Δ траектория $x(t)$, для которой множество Z ω-предельных точек содержит хотя бы одну точку $z \neq 0$. Так как $|z| \leqslant r$ для всех $z \in Z$ и Z замкнуто [1, с.18], то существует точка $z_0 \in Z$, наиболее удаленная от нуля: $|z_0| \geqslant |z|$ для всех $z \in Z$. Пусть z_0 реализуется на последовательности $t_n \uparrow +\infty : x(t_n) \to z_0$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(\theta) = x(t_n + \theta)$, $\theta \in J$. Так как, в силу пункта 1 доказательства и принципа компактности Арцела-Асколи, семейство функций $x_t(\theta)$, $t \geqslant 0$ – предкомпакт в $C[J]$, то существует подпоследовательность, сходящаяся в $C[J]$ к некоторой функции $\varphi(\theta)$; сохраняя для нее те же обозначения, получим:

$$\Delta_n = \|\varphi_n(\theta) - \varphi(\theta)\| \to 0 \quad (n \to \infty);\ \varphi(0) = z_0 \neq 0. \tag{11}$$

Имеет место равенство

$$|\varphi(0)| = \max_J |\varphi(\theta)| = \|\varphi\|.$$

В противном случае при некотором $\hat{\theta} \in J$ $|\varphi(\hat{\theta})| > |\varphi(0)|$, тем самым существует ω-предельная точка $\hat{z} = \varphi(\hat{\theta}) = \lim x(t_n + \hat{\theta})$, для которой $|\hat{z}| > |z_0|$, что противоречит выбору z_0.

Обозначим $v(t) = V(x_t, t)$. В силу условия $\dot{V} \leqslant 0$ функция $v(t)$ не возрастает. Покажем, что имеет место неравенство

$$v(t) \geqslant \frac{1}{2}\alpha_1\Big((1-\rho)\|\varphi\|\Big) > 0, \quad t \geqslant 0. \tag{12}$$

Достаточно показать, что (12) имеет место для значений $t = t_n$ с достаточно большими номерами. Из левого неравенства (5) следует: $v(t_n) \geqslant \alpha_1\Big(\big|\,|\varphi_n(0)| - |g(\varphi_n, t_n)|\,\big|\Big)$. Имеем: $|\varphi_n(0)| \geqslant |\varphi(0)| - \Delta_n = \|\varphi\| - \Delta_n$, $|g(\varphi_n, t_n)| \leqslant \rho\|\varphi_n\| \leqslant \rho(\|\varphi\| + \Delta_n)$, где Δ_n – число (11), откуда

$$|\varphi_n(0)| - |g(\varphi_n, t_n)| \geqslant (1-\rho)\|\varphi\| - 2\Delta_n.$$

Ввиду (11) правая часть положительна начиная с некоторого номера n_0, поэтому, с учетом монотонности $\alpha_1(s)$,

$$v(t_n) \geqslant \alpha_1\Big((1-\rho)\|\varphi\| - 2\Delta_n\Big), \quad n \geqslant n_0.$$

В силу непрерывности $\alpha_1(s)$ отсюда следует (12) при $t = t_n$ с достаточно большим номером.

Из (12) с учетом монотонности $v(t)$ следует: существует

$$\lim V(x_t, t) = V_0 > 0 \quad (t \to +\infty). \tag{13}$$

Рассмотрим четверку $h_n = (F_n, G_n, \omega_{0n}, \omega_{1n}) \in H$, вычисляемую по формуле (9) с заменой t на $t + t_n$. Выделяя сходящуюся подпоследовательность и сохраняя для нее те же обозначения, получим

$$h_n \underset{M}{\rightrightarrows} h = (F, G, \omega_0, \omega_1) \in H. \tag{14}$$

Пусть $y(t) = y(t,\varphi)$ – решение системы (10), где F, G взяты из h, с построенной выше начальной функцией $\varphi(\theta)$. Так как, очевидно, $x_n(t) = x(t+t_n)$ – решение системы, получаемой из (10) заменой (F,G) на (F_n, G_n), с начальной функцией $\varphi_n(\theta)$, то в силу (11), (14) и утверждения (i) пункта 2 имеем

$$x(t+t_n) \underset{[0,T]}{\rightrightarrows} y(t) \qquad \forall\, T > 0. \tag{15}$$

Пусть $V_h(\varphi, t)$ – функционал, вычисляемый по формуле (4) с заменой (v_0, v_1) парой (ω_0, ω_1) из h. Имеем

$$V_h(y_t, t) = a_n(t) + b_n(t) + c_n(t),$$

где $a_n = V_h(y_t, t) - V(y_t, t+t_n)$, $b_n = V(y_t, t+t_n) - V(x_{t+t_n}, t+t_n)$, $c_n = V(x_{t+t_n}, t+t_n)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, с учетом (4), (13)–(15) получим: $V_h(y_t, t) \equiv V_0 > 0$, что противоречит утверждению (ii) пункта 2. □

Приведем простой иллюстративный пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt}[x(t) - a(t)x(t-1)] = -x(t) - a(t)x(t-1).$$

Здесь $a(t)$ – почти периодическая функция со значениями в $\mathbb{R}$, $|a(t)| \leqslant \rho < 1$, $x(t) : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$. Пусть

$$V(\varphi, t) = \frac{1}{2}[\varphi(0) - a(t)\varphi(-1)]^2 + \int_{-1}^{0} \varphi^2(\theta) d\theta,$$

тогда $\dot{V}(\varphi, t) = -[1 - a^2(t)]\varphi^2(-1)$. Очевидным образом выполнены все условия теоремы, поэтому решение $x = 0$ асимптотически устойчиво. Обратим внимание, что здесь не выполняется условие Ляпунова $\dot{V} < 0$.

1. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240с.
2. *Добровольский С.М., Романовский Р.К.* Метод функций Ляпунова для почти периодических систем // Мат. заметки. – 1997. – **62**, №1. – С.151-153.
3. *Алексенко Н.В.* Устойчивость решений нелинейных почти периодических систем функционально - дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Изв. вузов. Математика. – 2000. – №2. – С. 3-6.
4. *Алексенко Н.В., Романовский Р.К.* Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, №2. – С. 147-153.
5. *Хейл Дж.* Теория функционально - дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421с.
6. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Прикл. математика и механика. – 1979. – **43**, №2. – С. 209-218.
7. *Павликов С.В., Хусанов Д.Х.* Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости неавтономных функционально - дифференциальных уравнений нейтрального типа // УлГУ. – Ульяновск, 1996. – 41с. – Деп. в ВИНИТИ 22.03.96., №881–В96.
8. *Андреев А.С., Павликов С.В.* К методу функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально - дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 2000. – **68**, №3. – С. 323-331.
9. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448с.
10. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 204с.

Омский гос. технический ун-т, Омск
`alextroz@mail.ru`

Получено 08.11.2002