УДК 531.36

©2002. **А.С. Кулешов**

ОБ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Доказано существование двух дополнительных первых интегралов в задаче о движении гиростата по абсолютно шероховатой плоскости.

Введение. В знаменитом трактате Э.Дж. Рауса [1] была рассмотрена задача о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости неоднородного шара, центр масс которого не совпадает с геометрическим центром, причем ось, проходящая через центр масс и геометрический центр шара, является осью динамической симметрии. Раусом было установлено, что в данной задаче, помимо интеграла энергии, существуют два линейных по обобщённым скоростям первых интеграла. Позднее С.А.Чаплыгин в работе [2] усилил этот результат, показав, что интегралы, подобные тем, что найдены Раусом, существуют и в случае, когда вдоль оси симметрии шара установлен ротор, обладающий постоянным гиростатическим моментом. Дальнейшему развитию результатов, касающихся данной задачи, посвящена настоящая работа.

1. Постановка задачи. Пусть по неподвижной горизонтальной плоскости катится без скольжения тяжелый неоднородный динамически симметричный шар. Движение шара будем рассматривать относительно подвижной системы координат $Gx_1x_2x_3$ с началом в центре масс шара и осями, направленными по главным центральным осям инерции. Тогда уравнения движения шара относительно данной системы координат можно записать в виде [3, 4]

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{K}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}] - m\,(\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\rho})\,\boldsymbol{\rho} + m\,(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})\,\dot{\boldsymbol{\omega}} - m\,(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\,\dot{\boldsymbol{\rho}} + m\,(\boldsymbol{\rho} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}})\,\boldsymbol{\omega} - \\
&\quad - m\,(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\,[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}] - m\mathrm{g}\,[\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0, \\
&\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь m – масса шара, $\mathbf{K} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент шара, $\boldsymbol{\Theta} = \mathrm{diag}\,(A_1, A_1, A_3)$ – центральный тензор инерции, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения, g – ускорение свободного падения. Единичный вектор восходящей вертикали обозначен через $\boldsymbol{\gamma}$, а через $\boldsymbol{\rho}$ обозначен радиус-вектор точки контакта шара с опорной плоскостью относительно центра масс. В рассматриваемом случае $\boldsymbol{\rho} = -r\boldsymbol{\gamma} + a\mathbf{e}_3$, где r – радиус шара, a – расстояние от центра масс шара до его геометрического центра, а $\mathbf{e}_3$ – единичный вектор оси динамической симметрии шара. В дальнейшем через ω_i и γ_i $(i = 1, 2, 3)$ будем обозначать проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ на главные центральные оси инерции шара.

Уравнения (1) допускают, помимо интеграла энергии, два линейных относительно квазискоростей ω_i $(i = 1, 2, 3)$ первых интеграла

$$A_1\,(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + A_3\omega_3\,(\gamma_3 - a/r) = \mathrm{c}_1, \tag{2}$$

$$\omega_3\sqrt{A_1A_3 + mr^2\left(A_1\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + A_3\,(\gamma_3 - a/r)^2\right)} = \mathrm{c}_2. \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (00-15-96150, 01-01-00141, 02-01-06041)

Интеграл (2) принято называть интегралом Желле [5], а интеграл (3) – интегралом Чаплыгина. Впервые интегралы (2), (3) получены Э.Дж. Раусом (см. [1]).

Интегралы подобные интегралам (2), (3) существуют и в случае, когда вдоль оси динамической симметрии шара установлен ротор, гиростатический момент которого постоянен. Уравнениями движения гиростата указанного вида являются уравнения (1), в которых вектор $\mathbf{K}$ имеет вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Theta}\boldsymbol{\omega} + s\mathbf{e}_3,$$

где $s = \mathrm{const}$ – постоянный гиростатический момент. В этом случае интегралы (2) и (3) несколько изменятся и будут иметь вид

$$A_1\left(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2\right) + \left(A_3\omega_3 + s\right)\left(\gamma_3 - a/r\right) = \mathrm{c}_1, \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\omega_3\sqrt{A_1A_3 + mr^2\left(A_1\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2\right) + A_3\left(\gamma_3 - a/r\right)^2\right)} + \\ + mr^2 s\int\frac{\left(\gamma_3 - a/r\right)d\gamma_3}{\sqrt{A_1A_3 + mr^2\left(A_1\left(1-\gamma_3^2\right) + A_3\left(\gamma_3 - a/r\right)^2\right)}} = \mathrm{c}_2.\end{gathered} \tag{5}$$

Второе слагаемое в интеграле (5) представляет собой неопределенный интеграл, выражающийся через элементарные функции. Существование интегралов (4), (5) было установлено в работах $[2, 6, 7]$.

В данной работе показано, что интегралы вида (4), (5) будут существовать и в случае, когда компоненты кинетического момента имеют вид

$$K_1 = A_1\omega_1 + s(\gamma_3)\gamma_1, \quad K_2 = A_1\omega_2 + s(\gamma_3)\gamma_2, \quad K_3 = A_3\omega_3 + p(\gamma_3). \tag{6}$$

2. Дополнительные интегралы. Получим сначала интеграл, аналогичный интегралу (4). Умножим первое уравнение системы (1) скалярно на вектор $\boldsymbol{\rho}$. После умножения получим

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\cdot\boldsymbol{\rho}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\rho}\right) = \left(\mathbf{K}\cdot\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\right) = a\left(\mathbf{K}\cdot\frac{d\mathbf{e}_3}{dt}\right) = a\left(\omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2\right)s(\gamma_3) = as(\gamma_3)\dot{\gamma}_3 = a\frac{d}{dt}\int s(\gamma_3)d\gamma_3.$$

Таким образом, в случае, когда компоненты кинетического момента имеют вид (6), уравнения движения гиростата (1) допускают первый интеграл вида (4)

$$A_1\left(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2\right) + \left(A_3\omega_3 + p(\gamma_3)\right)\left(\gamma_3 - \frac{a}{r}\right) + \left(1-\gamma_3^2\right)s(\gamma_3) + \frac{a}{r}\int s(\gamma_3)d\gamma_3 = \mathrm{c}_1. \tag{7}$$

Для того, чтобы построить интеграл, аналогичный интегралу (5), в случае, когда компоненты кинетического момента имеют вид (6), воспользуемся способом, предложенным в работе [7]. Представим первое уравнение системы (1) в виде

$$\dot{\mathbf{K}} - m\left(\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\boldsymbol{\rho}\right)\boldsymbol{\rho} + \mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{B} = m\left(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}\right)\dot{\boldsymbol{\omega}} - m\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}\right)\dot{\boldsymbol{\rho}} + m\left(\boldsymbol{\rho}\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}\right)\boldsymbol{\omega} + \left[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}\right] - m\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}\right)\left[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}\right] - mg\left[\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\gamma}\right].$$

Проецируя данное уравнение на оси системы координат $Gx_1x_2x_3$, получим:

$$\begin{aligned} &A_1\dot{\omega}_1 + \frac{ds(\gamma_3)}{d\gamma_3}\dot{\gamma}_3\gamma_1 + s(\gamma_3)\dot{\gamma}_1 - mr^2\gamma_1^2\dot{\omega}_1 - mr^2\gamma_1\gamma_2\dot{\omega}_2 - mr\gamma_1\left(r\gamma_3 - a\right)\dot{\omega}_3 + B_1 = 0,\\ &A_1\dot{\omega}_2 + \frac{ds(\gamma_3)}{d\gamma_3}\dot{\gamma}_3\gamma_2 + s(\gamma_3)\dot{\gamma}_2 - mr^2\gamma_1\gamma_2\dot{\omega}_1 - mr^2\gamma_2^2\dot{\omega}_2 - mr\gamma_2\left(r\gamma_3 - a\right)\dot{\omega}_3 + B_2 = 0,\\ &A_3\dot{\omega}_3 + \frac{dp(\gamma_3)}{d\gamma_3}\dot{\gamma}_3 - mr\gamma_1\left(r\gamma_3 - a\right)\dot{\omega}_1 - mr\gamma_2\left(r\gamma_3 - a\right)\dot{\omega}_2 - m\left(r\gamma_3 - a\right)^2\dot{\omega}_3 + B_3 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Следуя рассуждениям, приведенным в [7], умножим третье из уравнений (8) на величину $A_1 + m\left(r\gamma_3 - a\right)^2$ и подставим вместо $A_1\dot{\omega}_1$ и $A_1\dot{\omega}_2$ их выражения из первых двух уравнений. После подстановки и приведения подобных членов указанное уравнение примет вид

$$x\frac{dy}{dt} + \frac{y}{2}\frac{dx}{dt} + F(\gamma_3)\dot{\gamma}_3 = 0, \tag{9}$$

где обозначено

$$x = A_1A_3 + mr^2\left(A_1\left(1-\gamma_3^2\right) + A_3\left(\gamma_3 - a/r\right)^2\right), \quad y = \omega_3,$$

$$\begin{aligned} F(\gamma_3) \ &= \ \left(A_1 + m\left(r\gamma_3 - a\right)^2\right)\left(\frac{dp(\gamma_3)}{d\gamma_3} - s(\gamma_3)\right) + \\ &+ \ mr^2\left(\gamma_3 - \frac{a}{r}\right)\left(\left(1-\gamma_3^2\right)\frac{ds(\gamma_3)}{d\gamma_3} + p(\gamma_3) - s(\gamma_3)\gamma_3\right). \end{aligned}$$

Заметим, что выражение x зависит только от переменной γ_3. Разделив уравнение (9) на $\sqrt{x}$, получим

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dt} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt} + \frac{F(\gamma_3)}{\sqrt{x}}\dot{\gamma}_3 = 0.$$

Тем самым, очевидно, уравнения движения гиростата (1) в случае, когда компоненты кинетического момента имеют вид (6), допускают первый интеграл вида (5)

$$y\sqrt{x} + \int \frac{F(\gamma_3)}{\sqrt{x}}d\gamma_3 = \mathrm{c}_2.$$

1. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. – М: Наука, 1983. – Т. 2. – 544 с.
2. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Чаплыгин С.А. Исследования по динамике неголономных систем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – С. 4–27.
3. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. – М.: Наука, 1992. – 336 с.
4. *Карапетян А.В.* О специфике применения теории Рауса к системам с дифференциальными связями // Прикл. математика и механика. – 1994. – **58**, вып. 3. – С. 17–22.
5. *Jellett J.H.* A Treatise on the Theory of Friction. – Dublin, London: MacMillan, 1872. – 230 p.
6. *Румянцев В.В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980, No 4. – С. 11–21.
7. *Кулешов А.С.* Об обобщенном интеграле Чаплыгина // Вест. молодых ученых. Сер. Прикл. математика и механика. – 2000. – No 4. – С. 26–30.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
kuleshov@mech.math.msu.su
akule@pisem.net

Получено 01.11.02