УДК 531.383

©2002. **Л.Д. Акуленко, Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко**

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО МОМЕНТА

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, t – время) и угла нутации θ, а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Тело предполагается быстро закрученным, проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела предполагаются малыми по сравнению с восстанавливающим моментом. Получены усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближениях для существенно нелинейной двухчастотной системы. Рассмотрены примеры движения тела под действием конкретного вида возмущающего и управляющего моментов сил.

Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и угла нутации θ, а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - A)qr = k(\tau, \theta)\sin\theta\cos\varphi + M_1,\\
&A\dot{q} + (A - C)pr = -k(\tau, \theta)\sin\theta\sin\varphi + M_2,\\
&C\dot{r} = M_3,\\
&M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t \quad (i = 1, 2, 3),\\
&\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\,\mathrm{cosec}\,\theta,\\
&\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi,\\
&\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\theta.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на его главные оси инерции тела, проходящие через точку O. Величины M_i – проекции вектора возмущающего момента на те же оси. Они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и являются периодическими функциями углов Эйлера ψ, φ, θ с периодами 2π. Здесь A – экваториальный, C – осевой моменты инерции тела относительно точки $O, A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $k(\tau, \theta)$, медленно изменяющийся во времени и зависящий от угла нутации. При отсутствии возмущений $M_i = 0$ и $k(\tau, \theta) = \mathrm{const}$ уравнения (1) отвечают случаю волчка Лагранжа.

Система (1) исследуется при условии выполнения предположений

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \ll r, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_i| \ll k \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость осевого вращения достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом.

Неравенства (2) позволяют ввести следующие соотношения

$$\begin{gathered} p=\varepsilon P, \quad q=\varepsilon Q, \quad k(\tau,\theta)=\varepsilon K(\tau,\theta), \quad \tau=\varepsilon t, \\ M_i=\varepsilon^2 M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau) \ \ (i=1,2,3). \end{gathered} \tag{3}$$

Новые переменные P, Q, а также переменные r, ψ, θ, φ, функции K, M_i^* $(i=1,2,3)$ и параметры A, C предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \to 0$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1) при малом ε, если выполнены условия (2), (3). Это исследование будет проводиться методом усреднения [1, 2] на интервале времени порядка ε^{-1}. Метод усреднения широко применялся в задачах динамики твердого тела. Упрощающие предположения (2) или (3) дают возможность получить в общем случае довольно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

Сделаем в системе (1) замену переменных (3). Сократив обе части первых двух уравнений (1) на ε, получим

$$\begin{aligned} &A\dot P+(C-A)Qr=K(\tau,\theta)\sin\theta\cos\varphi+\varepsilon M_1^*, \\ &A\dot Q+(A-C)Pr=-K(\tau,\theta)\sin\theta\sin\varphi+\varepsilon M_2^*, \\ &C\dot r=\varepsilon^2 M_3^*, \quad \dot\psi=\varepsilon(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \\ &\dot\varphi=r-\varepsilon(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta, \\ &\dot\theta=\varepsilon(P\cos\varphi-Q\sin\varphi). \end{aligned} \tag{4}$$

По терминологии [1, 2] система (4) является двухчастотной и существенно нелинейной.

Рассмотрим сначала систему нулевого приближения и положим $\varepsilon=0$ в (4). Из последних четырех уравнений находим

$$r=r_0, \quad \psi=\psi_0, \quad \theta=\theta_0, \quad \varphi=r_0t+\varphi_0, \quad K_0=K(\tau_0,\theta_0). \tag{5}$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0, \tau_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t=0$. Подставим равенства (5) в первые два уравнения (4) при $\varepsilon=0$ и проинтегрируем полученную систему линейных уравнений для P, Q. Получим

$$\begin{aligned} P&=a\cos\gamma+b\sin\gamma+K(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi, \\ Q&=a\sin\gamma-b\cos\gamma+K(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi, \\ a&=P_0-K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0, \quad b=-Q_0+K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0, \\ \dot\gamma&=n, \quad \gamma(0)=0, \quad n=(C-A)A^{-1}r\neq 0, \quad \left|\frac{n}{r}\right|\leqslant 1, \\ \alpha&=\varphi+\gamma, \quad r=r_0+\varepsilon\delta. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь a, b – оскулирующие переменные типа Ван дер Поля, введенные вместо (3), а переменная γ имеет смысл фазы колебаний.

Рассмотрим систему (4) при $\varepsilon\neq 0$ и соотношения (6) как формулы замены переменных (содержащие переменную γ), определяющие переход от переменных P, Q к переменным a, b и обратно. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (4) от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau$ к новым переменным $a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau$. Отметим, что фазы φ, α, γ связаны конечным соотношением, которое оказывается более удобным для дальнейших исследований стандартной системы с двумя вращающимися фазами γ, α. После ряда преобразований получим систему вида

$$
\begin{aligned}
\dot a = {} & \varepsilon A^{-1}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma) - \varepsilon K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta\,\times \\
& \times(b - K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) - \varepsilon C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha\,\times \\
& \times\left[\frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\theta}(a\cos\alpha + b\sin\alpha) + \frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\tau}\right] + \varepsilon^2 K(\tau,\theta)C^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha\, + \\
& +\varepsilon^2 K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(b - 2K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) + \\
& +\varepsilon^2 C^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\sin\alpha\left[\frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\theta}(a\cos\alpha + b\sin\alpha) + \frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\tau}\right], \\
\dot b = {} & \varepsilon A^{-1}(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma) + \varepsilon K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta\,\times \\
& \times(a + K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha) + \varepsilon C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha\,\times \\
& \times\left[\frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\theta}(a\cos\alpha + b\sin\alpha) + \frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\tau}\right] - \varepsilon^2 K(\tau,\theta)C^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha\, - \\
& -\varepsilon^2 K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(a + 2K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha) - \\
& -\varepsilon^2 C^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\cos\alpha\left[\frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\theta}(a\cos\alpha + b\sin\alpha) + \frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\tau}\right], \\
\dot\delta = {} & \varepsilon C^{-1}M_3^0, \quad \dot\theta = \varepsilon(a\cos\alpha + b\sin\alpha), \\
\dot\psi = {} & \varepsilon(a\sin\alpha - b\cos\alpha)\,\mathrm{cosec}\,\theta + \varepsilon K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-1} - \varepsilon^2 K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-2}\delta, \\
\dot\alpha = {} & CA^{-1}r_0 + \varepsilon CA^{-1}r_0\delta - \varepsilon(a\sin\alpha - b\cos\alpha)\,\mathrm{ctg}\,\theta\, - \\
& -\varepsilon K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta + \varepsilon^2 K(\tau,\theta)C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta, \\
\dot\gamma = {} & (C-A)A^{-1}r_0 + \varepsilon(C-A)A^{-1}\delta, \\
M_i^{\,0}(& a,b,\delta,\psi,\theta,\alpha,\gamma,\tau) = M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau) \quad (i = 1,2,3).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

При рассмотрении системы (7) используем подход, изложенный в работе [3] для постоянного восстанавливающего момента $k = \mathrm{const}$ и в [4,5] для восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации $k(\theta)$.

Система уравнений (7) может быть приведена к виду

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \varepsilon\mathbf{F_1}(x,y) + \varepsilon^2\mathbf{F_2}(x,y), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}, \\
\dot y^1 &= \omega_1 + \varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y), \quad y^1(0) = y^{10}, \\
\dot y^2 &= \omega_2 + \varepsilon h_1(x,y) + \varepsilon^2 h_2(x,y), \quad y^2(0) = y^{20},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где вектор-функция $\mathbf{x} = (x^1,\ldots,x^5)$ составлена из медленных переменных a,b,δ,ψ,θ; через y^1 и y^2 обозначены быстрые переменные α,γ; через ω_1,ω_2 – постоянные фазы, равные $CA^{-1}r_0$ и $(C-A)A^{-1}r_0$ соответственно. Функции $\mathbf{F}_i, g_i, h_i$ $(i = 1,2)$ определяются правыми частями уравнений (7).

Двумерный вектор (g_1,h_1) обозначим $\mathbf{Z}_1$. Так как возмущающие моменты M_i^* $(i = 1,2,3)$ периодичны по φ с периодом 2π, то согласно замене (6) функции M_i^0 из (7) будут периодическими функциями α и γ с периодами 2π.

Согласно известной процедуре построения асимптотики [2], ищем замену переменных

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{u}_1(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) + \varepsilon^2\mathbf{u_2}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) + \ldots, \\
\mathbf{y} &= \mathbf{y}^* + \varepsilon\mathbf{v_1}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) + \varepsilon^2\mathbf{v_2}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) + \ldots, \\
\mathbf{y} &= (y^1,y^2), \quad \mathbf{x}^* = (x^{*1},\ldots,x^{*5}), \quad \mathbf{y}^* = (y^{*1},y^{*2})
\end{aligned}
\tag{9}
$$

такую, чтобы система (8) в новых переменных приняла вид

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}^*} = \varepsilon \mathbf{A_1}(\mathbf{x}^*) + \varepsilon^2 \mathbf{A_2}(\mathbf{x}^*) + \ldots, \\ &\dot{\mathbf{y}^*} = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \mathbf{B_1}(\mathbf{x}^*) + \varepsilon^2 \mathbf{B_2}(\mathbf{x}^*) + \ldots, \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{10}$$

Известно [2], что уравнения для вектор-функций $\mathbf{u_1}, \mathbf{v_1}$ записываются следующим образом

$$\boldsymbol{\omega} \frac{\partial \mathbf{u_1}}{\partial \mathbf{y}^*} = \mathbf{F_1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) - \mathbf{A_1}(\mathbf{x}^*), \qquad \boldsymbol{\omega} \frac{\partial \mathbf{v_1}}{\partial \mathbf{y}^*} = \mathbf{Z_1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) - \mathbf{B_1}(\mathbf{x}^*), \tag{11}$$

где $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ – матрица частных производных $\left\|\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\right\|$ $(i, j = 1, \ldots, 5)$. Функции $\mathbf{A_1}(\mathbf{x}^*), \mathbf{B_1}(\mathbf{x}^*)$ определяются по формулам

$$\mathbf{A_1}(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{F_1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) dy^{*1} dy^{*2}, \quad \mathbf{B_1}(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{Z_1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) dy^{*1} dy^{*2}. \tag{12}$$

Функция $\mathbf{u_2}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ должна быть решением уравнения

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega} \frac{\partial \mathbf{u_2}}{\partial \mathbf{y}^*} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) - \mathbf{A_2}(\mathbf{x}^*), \\ &\mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{F_2}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \mathbf{u_1} \frac{\partial \mathbf{F_1}}{\partial \mathbf{x}^*} + \mathbf{v_1} \frac{\partial \mathbf{F_1}}{\partial \mathbf{y}^*} - \mathbf{A_1}(\mathbf{x}^*) \frac{\partial \mathbf{u_1}}{\partial \mathbf{x}^*} - \mathbf{B_1}(\mathbf{x}^*) \frac{\partial \mathbf{u_1}}{\partial \mathbf{y}^*}. \end{aligned} \tag{13}$$

Функция $\mathbf{A_2}(\mathbf{x}^*)$ находится по формуле

$$\mathbf{A_2}(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) dy^{*1} dy^{*2}. \tag{14}$$

Определяем усредненную систему уравнений первого приближения для медленных переменных

$$\dot{\mathbf{x}_1^*} = \varepsilon \mathbf{A_1}(\mathbf{x}_1^*), \quad \mathbf{x}_1^*(0) = \mathbf{x_{10}}, \tag{15}$$

систему второго приближения для медленных переменных

$$\dot{\mathbf{x}_2^*} = \varepsilon \mathbf{A_1}(\mathbf{x}_2^*) + \varepsilon^2 \mathbf{A_2}(\mathbf{x}_2^*), \quad \mathbf{x}_2^*(0) = \mathbf{x_{20}} \tag{16}$$

и систему уравнений второго приближения для быстрых переменных

$$\dot{\mathbf{y}_2^*} = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \mathbf{B_1}(\mathbf{x}_1^*(t)), \quad \mathbf{y}_2^*(0) = \mathbf{y^0}, \quad \mathbf{y^0} = (y^{10}, y^{20}), \tag{17}$$

которая сразу интегрируется

$$\mathbf{y}_2^*(t) = \mathbf{y^0} + \boldsymbol{\omega} t + \varepsilon \int_0^t \mathbf{B_1}(\mathbf{x}_1^*(s)) ds. \tag{18}$$

Определим вектор-функции

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{x}^{(\mathbf{1})}(\varepsilon t) + \varepsilon \mathbf{x}^{(\mathbf{2})}(\varepsilon t) + \varepsilon \mathbf{u_1}\left(\mathbf{x}^{(\mathbf{1})}(\varepsilon t), \quad \mathbf{y^0} + \boldsymbol{\omega} t + \varepsilon \int\limits_0^t \mathbf{B_1}(\mathbf{x}^{(\mathbf{1})}(\varepsilon s))ds\right),$$
$$\mathbf{y}^{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{y^0} + \boldsymbol{\omega} t + \varepsilon \int\limits_0^t \mathbf{B_1}(\mathbf{x}^{(1)}(\varepsilon s))ds. \tag{19}$$

Таким образом, построение приближенных решений $\mathbf{x}^{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \mathbf{y}^{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ сводится к следующей процедуре: решаем с помощью рядов Фурье уравнения (11), (13), затем по формуле (14) строим вектор-функцию $\mathbf{A_2}(\mathbf{x}^*)$, после этого определяем решение $\mathbf{x}^{(\mathbf{1})}$ и $\mathbf{x}^{(\mathbf{2})}$ согласно [3] и, наконец, по формуле(19) получаем искомые приближения.

Далее описанная процедура реализуется для некоторых конкретных систем уравнений динамики твердого тела.

Рассмотрим возмущенное движение твердого тела в случае Лагранжа с учетом моментов, действующих на тело со стороны внешней среды. Примером может служить внешняя среда, медленно изменяющая свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры или состава. Возмущающие моменты являются линейно-диссипативными и с учетом (3) имеют вид

$$M_1 = -\varepsilon^2 I_1(\tau)P, \quad M_2 = -\varepsilon^2 I_1(\tau)Q, \quad M_3 = -\varepsilon^2 I_3(\tau)r. \tag{20}$$

Здесь $I_1(\tau)$, $I_3(\tau)$ – положительные интегрируемые функции на промежутке $[0, 1)$.

Определим решение усредненной системы уравнений первого приближения (15) с учетом (20) для медленных переменных

$$\begin{aligned}
&\theta_1(t) = \theta_0,\\
&\psi_1(t) = \psi_0 + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \int\limits_0^t K(\varepsilon t', \theta_0)dt', \quad \delta_1(t) = -\varepsilon C^{-1} r_0 \int\limits_0^t I_3(\varepsilon t')dt',\\
&a_1(t) = \exp[F_1](a_0 \cos w - b_0 \sin w), \quad b_1(t) = \exp[F_1](a_0 \sin w + b_0 \cos w),\\
&w = \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \int\limits_0^t \left[\cos\theta_0 K(\varepsilon t', \theta_0) + \frac{1}{2}\sin\theta_0 \left.\frac{\partial K(\varepsilon t', \theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0}\right] dt',\\
&F_1 = -\varepsilon A^{-1} \int\limits_0^t I_1(\varepsilon t')dt'.
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь a_0 и b_0 определяются из формул (6).

Решение усредненной системы уравнений второго приближения для быстрых переменных (18) примет вид

$$\gamma_2(t) = (C - A)A^{-1} r_0 t - \varepsilon^2 (C - A)A^{-1} C^{-1} r_0 \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^{t'} I_3(\varepsilon t'')dt''\right] dt', \tag{22}$$

$$\alpha_2(t) = CA^{-1} r_0 t - \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \cos\theta \int\limits_0^t K(\varepsilon t', \theta_0)dt' - \varepsilon^2 A^{-1} r_0 \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^{t'} I_3(\varepsilon t'')dt''\right] dt' + \varphi_0.$$

Согласно (19) и формулам (21) и (22), (11), (13), (14), (16) определим компоненты функций $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{v}}(t)$, отвечающие переменным ψ и θ

$$\begin{aligned}
&u_1^{\theta} = AC^{-1}r_0^{-1}(a^{(1)}\sin\alpha^{(2)} - b^{(1)}\cos\alpha^{(2)}),\\
&u_1^{\psi} = -AC^{-1}r_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0(a^{(1)}\cos\alpha^{(2)} + b^{(1)}\sin\alpha^{(2)}),\\
&A_2^{\theta} = I_1(\tau)K(\tau,\theta_0)C^{-2}r_0^{-2}\sin\theta_0 + AC^{-2}r_0^{-2}\sin\theta_0\frac{\partial K(\tau,\theta_0)}{\partial\tau},\\
&A_2^{\psi} = -K(\tau,\theta_0)C^{-1}r_0^{-2}\delta^{(1)} + AK^2(\tau,\theta_0)C^{-3}r_0^{-3}\cos\theta_0,\\
&A'_{1\theta} = 0, \quad A'_{1\psi} = C^{-1}r_0^{-1}\left.\frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0},\\
&(\mathbf{x^{(1)}}(\tau) = \mathbf{x_1}(t), \quad \tau = \varepsilon t).
\end{aligned} \tag{23}$$

На основании приведенных формул получим выражения для переменных ψ и θ в виде

$$\begin{aligned}
&\theta_\varepsilon^{\mathrm{v}}(t) = \theta_0 + R_1^{(1)} + R_1^{(2)},\\
&R_1^{(1)} = \varepsilon C^{-2}r_0^{-2}\sin\theta_0\int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau)K(\tau,\theta_0)d\tau + \varepsilon AC^{-1}r_0^{-1}\times\\
&\qquad\times\exp\left[-A^{-1}\int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau)d\tau\right][a_0\sin(\alpha^{(2)}-w) - b_0\cos(\alpha^{(2)}-w)],\\
&R_1^{(2)} = \varepsilon AC^{-2}r_0^{-2}\sin\theta_0[K(\varepsilon t,\theta_0) - K_0],\\
&\psi_\varepsilon^{\mathrm{v}} = \psi_0 + S_1^{(1)} + S_1^{(2)} + S_1^{(3)},\\
&S_1^{(1)} = C^{-1}r_0\int_0^{\varepsilon t} K(\tau,\theta_0)d\tau,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
S_1^{(2)} &= \varepsilon C^{-3}r_0^{-3}\sin\theta_0\left[\int_0^{\varepsilon t}\left(\int_0^{\tau} I_1(\tau^*)K(\tau^*,\theta_0)d\tau^*\right)\left.\frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}d\tau +\right.\\
&\quad\left.+A\int_0^{\varepsilon t}[K(\tau,\theta_0) - K_0]\left.\frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}d\tau\right],\\
S_1^{(3)} &= \varepsilon AC^{-3}r_0^{-3}\cos\theta_0\int_0^{\varepsilon t} K^2(\tau,\theta_0)d\tau + \varepsilon C^{-1}r_0^{-1}\int_0^{\varepsilon t} K(\tau,\theta_0)\left[\int_0^{\tau} I_3(\tau^*)d\tau^*\right]d\tau -\\
&\quad-\varepsilon AC^{-1}r_0^{-1}\exp\left[-A^{-1}\int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau)d\tau\right][a_0\cos(\alpha^{(2)}-w) + b_0\sin(\alpha^{(2)}-w)].
\end{aligned}$$

Зависимость восстанавливающего момента от медленного времени и угла нутации $K(\tau,\theta)$ привела к появлению в формулах (24) дополнительных слагаемых и слагаемых, содержащих интегралы. Для угла нутации $\theta_\varepsilon^{\mathrm{v}}(t)$ дополнительным слагаемым является $R_1^{(2)}$, а $R_1^{(1)}$ – слагаемое, содержащее интегралы. Для угла прецессии $\psi_\varepsilon^{\mathrm{v}}(t)$ дополнительным слагаемым является $S_1^{(2)}$, а $S_1^{(1)} = C^{-1}r_0 \int\limits_0^{\varepsilon t} K(\tau,\theta_0)d\tau$ и $S_1^{(3)}$ – слагаемые, содержащие интегралы.

Заметим, что формулы для углов нутации и прецессии не содержат параметров возмущающих моментов, если ограничиться построением первого приближения (см. (21)). В этом случае влияние возмущений на регулярную прецессию тела не учитывается и, таким образом, построение второго приближения является существенным.

Рассмотрим задачу о приведении волчка в "спящее состояние". Малые управляющие моменты примут вид

$$
\begin{gathered}
M_1 = -\varepsilon^2 h(\tau)\frac{p^*}{(p^{*2}+q^{*2})^{\frac{1}{2}}}, \quad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau)\frac{q^*}{(p^{*2}+q^{*2})^{\frac{1}{2}}}, \quad M_3 = \varepsilon^2 u(\tau), \\
p^* = p - k(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi, \qquad q^* = q - k(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi.
\end{gathered} \tag{25}
$$

Здесь $h(\tau), u(\tau)$ – заданные интегрируемые функции на промежутке $[0,1)$; $h(\tau) > 0$, $\tau \sim 1$. С учетом соотношений (3) и (6) для p и q возмущающие моменты согласно (25) имеют вид

$$
M_1 = -\varepsilon^2 h(\tau)\frac{a\cos\gamma + b\sin\gamma}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau)\frac{a\sin\gamma - b\cos\gamma}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad M_3 = \varepsilon^2 u(\tau). \tag{26}
$$

После подстановки в (7) возмущающих моментов (26) и ряда преобразований получим решение усредненной системы уравнений первого приближения для медленных переменных

$$
\begin{aligned}
&\theta^{(1)} = \theta_0, \\
&r^{(1)} = r_0 + \varepsilon C^{-1}\int\limits_0^\tau u(\tau')d\tau', \\
&\psi^{(1)} = \psi_0 + C^{-1}r_0^{-1}\int\limits_0^\tau K(\tau',\theta_0)d\tau', \\
&a^{(1)} = F_4[P_0\cos\beta + Q_0\sin\beta - K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\beta+\varphi_0)], \\
&b^{(1)} = F_4[P_0\sin\beta - Q_0\cos\beta + K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\beta+\varphi_0)], \\
&F_4 = 1 - A^{-1}(a_0^2+b_0^2)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^\tau h(\tau')d\tau', \\
&\beta = C^{-1}r_0^{-1}\int\limits_0^{\varepsilon t}\left[K(\tau,\theta_0)\cos\theta_0 + \frac{1}{2}\sin\theta_0\left.\frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}\right]d\tau.
\end{aligned} \tag{27}
$$

Здесь угол нутации постоянен. Приращение угла прецессии зависит от восстанавливающего момента $K(\tau,\theta)$. Осевая составляющая вектора угловой скорости ограничена. Медленные переменные a, b являются произведением сомножителя, принимающего положительные, отрицательные значения и нуль в зависимости от подынтегральной функции $h(\tau)$, и осциллирующего сомножителя.

Определим компоненты функции $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{v}}(t)$, отвечающие переменным ψ и θ,

$$
\begin{aligned}
&\theta_\varepsilon^{\mathrm{v}}(t) = \theta_0 + R_2^{(1)} + R_2^{(2)},\\
&R_2^{(1)} = \varepsilon AC^{-1} r_0^{-1} F_4[a_0 \sin(\alpha^{(2)} - \beta) - b_0 \cos(\alpha^{(2)} - \beta)],\\
&R_2^{(2)} = \varepsilon AC^{-2} r_0^{-2} \sin\theta_0 [K(\varepsilon t, \theta_0) - K_0],\\
\\
&\psi_\varepsilon^{\mathrm{v}} = \psi_0 + S_2^{(1)} + S_2^{(2)} + S_2^{(3)},\\
&S_2^{(1)} = C^{-1} r_0 \int\limits_0^{\varepsilon t} K(\tau, \theta_0) d\tau,\\
&S_2^{(2)} = \varepsilon AC^{-3} r_0^{-3} \sin\theta_0 \int\limits_0^{\varepsilon t} [K(\tau, \theta_0) - K_0)] \left.\frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} d\tau,\\
&S_2^{(3)} = \varepsilon AC^{-3} r_0^{-3} \cos\theta_0 \int\limits_0^{\varepsilon t} K^2(\tau, \theta_0) d\tau - \varepsilon C^{-2} r_0^{-2} \int\limits_0^{\varepsilon t} K(\tau, \theta_0) \left[\int\limits_0^{\tau} u(\tau') d\tau'\right] d\tau -\\
&\qquad - \varepsilon AC^{-1} r_0^{-1} \operatorname{cosec}\theta_0 F_4[a_0 \cos(\alpha^{(2)} - \beta) + b_0 \sin(\alpha^{(2)} - \beta)].
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Полученные слагаемые $S_2^{(1)}, S_2^{(2)}, S_2^{(3)}$ дополняют известное из приближенной теории гироскопов выражение для угловой скорости прецессии $\omega_p = KC^{-1} r_0^{-1}$.

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
3. *Лещенко Д.Д., Шамаев А.С.* Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – №6. – С. 8–17.
4. *Лещенко Д.Д., Саллам С.Н.* Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Прикл. математика и механика. – 1990. – **54**, вып. 2 – С. 224 – 232.
5. *L. Akulenko, D. Leshchenko, T. Kushpil and I. Timoshenko.* Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments // Multibody System Dynamics. – 2001. – **6**. – №1. – P. 3–16.

Ин-т проблем механики Российской академии наук, Москва
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса
leshchenko_d@mail.ru; leshchenko_d@ukr.net
Получено 01.11.2002