

УДК 531.38

©2002. И.Н. Гашененко

**ОГИБАЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА**

В задаче о движении тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки изучаются трехмерные алгебраические поверхности интегральных уровней и их топологические бифуркации. В фазовом пространстве построена двумерная поверхность сечения Пуанкаре и классифицированы возможные типы этих поверхностей, зависящие от значений констант первых интегралов.

**Введение.** Движение тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки описывается дифференциальными уравнениями [1]

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \mathbf{r} \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (1)$$

где  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции,  $\omega$  – угловая скорость тела-носителя в подвижном базисе,  $\nu$  – единичный вектор вертикали,  $\lambda$  – постоянный гиростатический момент и  $\mathbf{r}$  – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс механической системы. С помощью первых интегралов

$$H = \frac{1}{2}A\omega \cdot \omega - \mathbf{r} \cdot \nu = h, \quad G = (A\omega + \lambda) \cdot \nu = g, \quad I = \nu \cdot \nu = 1 \quad (2)$$

выделим в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^3(\omega) \times \mathbb{R}^3(\nu)$  трехмерное компактное подмножество

$$\mathcal{Q}_{h,g}^3 = \{H = h, G = g, I = 1\} \subset \mathbb{R}^6(\omega, \nu),$$

инвариантное относительно фазового потока системы (1). Инвариантные многообразия  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  зависят от констант  $g, h$  и набора конструктивных параметров  $A_i, r_i, \lambda_i$  и, как правило, являются гладкими многообразиями.

Топология многообразий  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  и их перестройки при изменении значения энергии  $h$  полностью определяются функцией Морса [2, 3]

$$U_g(\nu) = \frac{(g - \lambda \cdot \nu)^2}{2A\nu \cdot \nu} - \mathbf{r} \cdot \nu,$$

называемой приведенным (эффективным) потенциалом.

**Предложение.** Если значение  $h$  приведенного потенциала  $U_g(\nu)$  не является критическим, то  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  является гладким трехмерным ориентируемым многообразием.

Пусть  $\pi : (\omega, \nu) \mapsto \nu$  есть проекция пространства  $\mathbb{R}^3(\omega) \times \mathbb{R}^3(\nu)$  на второй сомножитель. Областью возможности движения называют область

$$\mathcal{U}_{h,g} = \{U_g(\nu) \leq h\} \subset S^2,$$

которая является проекцией  $\pi(\mathcal{Q}_{h,g}^3)$  многообразия  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  на сферу  $S^2 = \{|\nu| = 1\}$  (сферу Пуассона). Слой над произвольной точкой  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in S^2$  устроен просто: он гомеоморфен

либо окружности, либо точке, либо пуст. Существует взаимно-однозначное соответствие между топологическими структурами множеств  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  и  $\mathcal{U}_{h,g}$ , которое помогает находить топологический тип  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  при любых значениях параметров. Основанная на идеях Смейла схема топологической классификации изоэнергетических поверхностей  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  успешно применялась в задачах динамики твердого тела [3–6], но из-за большого числа свободных параметров, входящих в уравнение (1), полное исследование не было проведено даже для случая  $\lambda = 0$ .

Траектории динамической системы (1) проще изучать не во всем фазовом пространстве, а на фиксированных изоэнергетических поверхностях, которые имеют малую размерность и простую топологию. Важность топологического анализа  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  обусловлена еще и тем, что критические точки отображения

$$\mathcal{F} = H \times G : \mathbb{R}^3(\omega) \times S^2(\nu) \rightarrow \mathbb{R}^2(h, g)$$

являются относительными равновесиями исходной системы. Топологическая структура особых инвариантных многообразий  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  позволяет анализировать устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг вертикали и, наоборот, с помощью относительных равновесий удобно исследовать перестройки топологии  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ . Более важной задачей динамики гиростата является качественное описание траекторной структуры многообразия  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ . В некоторых специальных (интегрируемых) случаях изучение образов фазовых кривых на сфере Пуассона полезно для описания слоения Лиувилля [3] на  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ . Для интегрируемых систем общий метод классификации проекций инвариантных торов на  $S^2$  разработан в [2]. В неинтегрируемых случаях траектории хаотично заполняют область  $\mathcal{U}_{h,g}$  и только часть траекторий может касаться ее границы

$$\partial\mathcal{U}_{h,g} = \{U_g(\nu) = h\} \subset S^2.$$

В каждой внутренней точке области  $\mathcal{U}_{h,g}$  пересекается однопараметрическое семейство траекторий, прообразы которых принадлежат фиксированной изоэнергетической поверхности  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ . Конечно, с помощью проекций инвариантных многообразий на трехмерные подпространства фазового пространства  $\mathbb{R}^3(\omega) \times \mathbb{R}^3(\nu)$  можно получить более полную информацию о фазовых траекториях.

В данной работе разработан метод топологической классификации проекций инвариантных многообразий на подвижное пространство угловых скоростей, изучены двумерные *огibaющие поверхности*, которые ограничивают образы многообразий  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  в пространстве  $\mathbb{R}^3(\omega)$ . В рамках общей проблемы топологического анализа механических систем с симметрией предложен новый подход, позволяющий эффективно анализировать траекторную структуру многообразий  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  без введения каких-либо существенных параметрических ограничений.

**1. Фазовые сечения  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  и их бифуркации.** С помощью векторного равенства

$$F \equiv ((A\omega + \lambda) \times \nu) \cdot \mathbf{r} = 0 \tag{3}$$

введем в фазовом пространстве вспомогательную двумерную поверхность

$$\mathcal{P}_{h,g}^2 = \{H = h, G = g, I = 1, F = 0\} \subset \mathcal{Q}_{h,g}^3 \subset \mathbb{R}^6(\omega, \nu).$$

Бифуркационные диаграммы отображения

$$\mathcal{F}_1 = H \times G : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, g),$$

где  $M^4$  есть совместная поверхность уровня  $\{I = 1, F = 0\} \subset \mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})$ , позволяют полностью классифицировать возможные топологические типы  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ .

Критические точки отображения  $\mathcal{F}_1$  найдем из условия  $\text{rank } d\mathcal{F}_1 < 2$  или из эквивалентного условия

$$\mu_1 \frac{\partial H}{\partial(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})} + \mu_2 \frac{\partial G}{\partial(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})} + \mu_3 \frac{\partial F}{\partial(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})} + \mu_4 \frac{\partial I}{\partial(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})} = 0, \quad (4)$$

где  $\mu_i$  – действительные коэффициенты. Дифференцированием (2), (3) запишем (4) в виде системы двух векторных уравнений

$$\begin{cases} \mu_1 \boldsymbol{\omega} + \mu_2 \boldsymbol{\nu} + \mu_3 \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r} = 0, \\ \mu_2 (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) + \mu_3 \mathbf{r} \times (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) + 2\mu_4 \boldsymbol{\nu} - \mu_1 \mathbf{r} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Найдем физически допустимые решения системы алгебраических уравнений (2),(3),(5) относительно переменных  $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$ , все они будут являться критическими точками отображения  $\mathcal{F}_1$ . Подстановкой критических точек в интегралы (2) получим зависящие от параметров семейства разделяющих кривых  $\Sigma \cup \Sigma' \cup \Sigma'' \subset \mathbb{R}^2(h, g)$ .

Итак, обозначим через  $\Sigma$  бифуркационное множество отображения  $\mathcal{F} = H \times G$ . Параметрические уравнения кривых из множества  $\Sigma$  известны (см. формулы (4), (5) в работе [7]). Уравнения новых бифуркационных кривых имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Sigma' : \quad h &= \frac{g^2}{2|\mathbf{r}|^2} A^{-1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \mp |\mathbf{r}| \mp \frac{g}{|\mathbf{r}|} A^{-1} \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{2} A^{-1} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}; \\ \Sigma'' : \quad h &= \frac{1}{2} A^{-1} (\gamma \mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}) \cdot (3\gamma \mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}), \quad g = -\gamma^2 A^{-1} (\gamma \mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r}; \\ \gamma &\in \Gamma, \quad \Gamma = \{s_1(\gamma) \leq 0, \quad s_2(\gamma) \geq 0\} \subset \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$s_1(\gamma) = \gamma^2 [A^{-1} \mathbf{r} \cdot (\gamma \mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda})]^2 - |\mathbf{r}|^2, \quad s_2(\gamma) = \gamma^2 [\gamma^2 |A^{-1} \mathbf{r}|^2 - 2\gamma (A^{-1} \mathbf{r} \cdot A^{-1} \boldsymbol{\lambda}) + |A^{-1} \boldsymbol{\lambda}|^2] - 1.$$

Теперь приведем необходимые доказательства и укажем основные качественные свойства кривых (6).

**ТЕОРЕМА 1.** Критическими точками отображения  $\mathcal{F}_1$  являются:

1.  $\boldsymbol{\omega} = \gamma \boldsymbol{\nu}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  ( $\mu_4 \neq 0$ );
2.  $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} = \pm g \mathbf{r} / |\mathbf{r}|$ ,  $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r} / |\mathbf{r}|$  ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = 0$ ,  $\mu_3 \neq 0$ );
3.  $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} = \gamma \mathbf{r}$ ,  $\gamma \in \Gamma$  ( $\mu_4 = 0$ ,  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \neq 0$ ),

$$\gamma A^{-1} (\gamma \mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} + 1 = 0, \quad \gamma A^{-1} (\gamma \mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0.$$

Соответствующие этим точкам критические значения отображения  $\mathcal{F}_1$  принадлежат бифуркационному множеству  $\Sigma \cup \Sigma' \cup \Sigma'' \subset \mathbb{R}^2(h, g)$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $\mu_4 \neq 0$ . Из (5) и  $F = 0$  получим  $\mu_3 = 0$ . Следовательно, рассматриваемое семейство критических точек приводит к равенствам  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\nu}} = 0$  и соответствует зависимым

уровням первых интегралов (2). Бифуркационное множество  $\Sigma$  интегрального отображения  $\mathcal{F} = H \times G$  является частью множества критических значений отображения  $\mathcal{F}_1$ . Это означает, что критические точки отображения  $\mathcal{F} = H \times G$  всегда расположены на поверхностях  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ , отвечающих данным критическим значениям  $h, g$ . Изменение топологии многообразия  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  всегда приводит к перестройкам структуры  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ .

2. Пусть  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = 0$ ,  $\mu_3 \neq 0$ . Из уравнений (5) получим следующие равенства  $\mathbf{r} \times (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r} = 0$ , то есть векторы  $\mathbf{r}$ ,  $(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})$  и  $\boldsymbol{\nu}$  становятся коллинеарными в некоторый фиксированный момент времени. Из первых интегралов  $I, G$  находим  $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ ,  $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} = \pm g\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ . Подстановка этих выражений в интеграл  $H$  приводит к уравнениям кривых  $\Sigma' \subset \mathbb{R}^2(h, g)$ . В частном случае, когда центр масс гиростата расположен на главной оси инерции,  $\Sigma'$  является подмножеством  $\Sigma$ .

3. Пусть  $\mu_4 = 0$ ,  $\mu_1\mu_2\mu_3 \neq 0$ . Это семейство критических точек определено функциями  $H, G, F$  и не зависит от интеграла  $I$ . Из второго уравнения (5) следует коллинеарность векторов  $\mathbf{r}$  и  $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$ . Обозначим  $\gamma = \mu_1/\mu_2$ , тогда скалярное умножение на  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\nu}$  первого уравнения системы (5) приводит к уравнениям

$$\gamma A^{-1}(\gamma\mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} + 1 = 0, \quad \gamma A^{-1}(\gamma\mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \quad (7)$$

Множитель  $\gamma$  определяется параметрами гиростата и критическими значениями первых интегралов, а непустое пересечение плоскостей (7) со сферой Пуассона соответствует двум критическим точкам для каждого критического значения.  $\square$

Уравнения  $\Sigma'$  описывают две параболы на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, g)$ . Они пересекаются, если  $A^{-1}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda} \neq 0$ . Вершины парабол расположены в точках с координатами

$$(h, g) = (\mp|\mathbf{r}| - \frac{1}{2}(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda})^2(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-1} + \frac{1}{2}A^{-1}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad \pm(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda})|\mathbf{r}|(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-1}).$$

Уравнениям  $\Sigma''$  соответствует плоская алгебраическая кривая 3-го порядка (полукубическая парабола), имеющая одну особую точку (точку возврата). Из условий  $dh/d\gamma = dg/d\gamma = 0$  найдем значение параметра  $\gamma_0 = \frac{2}{3}(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda})(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-1}$ , которое соответствует точке возврата. В случае  $|\mathbf{r}| \neq 0$  полиномы  $s_1(\gamma), s_2(\gamma)$  имеют действительные корни. Из тождества  $s_2(\gamma)|\mathbf{r}|^2 - s_1(\gamma) = \gamma^2|A^{-1}(\gamma\mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{r}|^2$  следует неравенство  $s_2(\gamma)|\mathbf{r}|^2 \geq s_1(\gamma)$ , которое выполняется для любого фиксированного значения  $\gamma$ . Корни полинома  $s_2(\gamma)$  расположены между корнями полинома  $s_1(\gamma)$ , то есть для любых допустимых значений параметров гиростата множество  $\Gamma$  не пусто. Кроме того, можно подобрать параметры таким образом, что множество  $\Gamma$  будет состоять из двух, трех или четырех сегментов действительной оси. Если  $s_1(\gamma_*) = 0$ ,  $s_2(\gamma_*) \geq 0$ , то в точке, соответствующей значению  $\gamma_*$ , кривая  $\Sigma''$  касается кривой  $\Sigma'$  или пересекает ее. Если  $s_1(\gamma_*) \leq 0$ ,  $s_2(\gamma_*) = 0$ , то  $\Sigma''$  при  $\gamma = \gamma_*$  касается  $\Sigma$  или пересекает эту кривую.

Множество  $\Sigma \cup \Sigma' \cup \Sigma''$  разделяет плоскость  $\mathbb{R}^2(h, g)$  на несколько подобластей, внутри которых топологический тип поверхности  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  сохраняется. Проекция многообразия  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  на сферу  $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$  позволяет исследовать перестройки топологии и определять топологический тип  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ , зависящий от значений параметров.

**2. Топология поверхности  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ .** Отображение проектирования  $\pi : (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) \mapsto \boldsymbol{\nu}$  переводит поверхность  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  в компактную область  $\tilde{\mathcal{U}}_{h,g} \subset \mathcal{U}_{h,g}$  на сфере  $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$ . В декартовых координатах запишем

$$\tilde{\mathcal{U}}_{h,g} = \{\tilde{U}_g(\boldsymbol{\nu}) \leq h\} \subset S^2.$$

Здесь аналогом приведенного потенциала  $U_g$  является функция

$$\tilde{U}_g(\boldsymbol{\nu}) = \frac{(A^{-1}\mathbf{w} \times A^{-1}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})}{2(A^{-1}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu},$$

где обозначены векторы

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{w} = g\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda}.$$

Действительная функция  $\tilde{U}_g$  определена на всей единичной сфере за исключением двух полюсов с координатами  $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ .

ТЕОРЕМА 2. Поверхность  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  гомеоморфна расслоенному пространству с базой  $\tilde{\mathcal{U}}_{h,g}$ , при этом слой над  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \tilde{\mathcal{U}}_{h,g}$  есть

1. окружность  $S^1$ , если  $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}| \notin \partial\mathcal{U}_{h,g}$ ;
2. точка  $S^0$ , если  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \partial\tilde{\mathcal{U}}_{h,g}$ ;
3. две точки  $2S^0$  – в остальных случаях.

*Доказательство.* Найдем соответствие между точками поверхности  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  и точками ее образа  $\pi(\mathcal{P}_{h,g}^2)$  на единичной сфере. Зафиксируем вектор  $\boldsymbol{\nu}$  и рассмотрим случай  $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r} \neq 0$  (когда векторы  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\mathbf{r}$  неколлинеарны). Тогда отображение  $\pi|_{\mathcal{P}_{h,g}^2}$  на слоях определяется следующей формулой

$$A\boldsymbol{\omega} = \mathbf{w} - \mathbf{v} \frac{(A^{-1}\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})}{(A^{-1}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})} \pm \mathbf{v} \frac{\sqrt{2(h - \tilde{U}_g(\boldsymbol{\nu}))}}{\sqrt{A^{-1}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}. \quad (8)$$

Непосредственная подстановка (8) в соотношения  $H = h$ ,  $G = g$ ,  $F = 0$  обращает их в тождества на единичной сфере, соответствующей интегральному уровню  $I = 1$ . Каждая точка сферы Пуассона, удовлетворяющая неравенствам  $\tilde{U}_g(\boldsymbol{\nu}) < h$  и  $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r} \neq 0$ , имеет ровно два прообраза на  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ . Граничные точки, которые удовлетворяют условиям  $\tilde{U}_g(\boldsymbol{\nu}) = h$  и  $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r} \neq 0$ , имеют только один прообраз  $S^0$  на  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ .

В альтернативном случае положим  $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ , тогда слой на  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  диффеоморфен окружности, сформированной пересечением эллипсоида и плоскости в  $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$  (см. интегральные уровни  $H = h$  и  $G = g$ ). Наконец, если  $\boldsymbol{\nu}$  принадлежит границе области возможности движения  $\partial\mathcal{U}_{h,g}$ , то эта окружность становится точкой на  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ , так как эллипсоид касается плоскости.  $\square$

На единичной сфере полюсы с координатами  $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  могут пересечь  $\partial\mathcal{U}_{h,g}$ , тогда следует равенство  $U_g(\pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|) = h$ . То есть полюсы принадлежат  $\partial\mathcal{U}_{h,g}$  только тогда, когда константы интегралов и параметры гиригастата связаны следующим уравнением

$$h = \frac{(g|\mathbf{r}| \mp \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r})^2}{2(A\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})} \mp |\mathbf{r}|. \quad (9)$$

С другой стороны, если векторы  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\mathbf{r}$  коллинеарны ( $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ ), тогда равенство  $F = 0$  выполняется при любых допустимых значениях  $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$  – кинетического момента гиригастата. Если точки  $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  принадлежат области  $\mathcal{U}_{h,g}$ , тогда они принадлежат  $\tilde{\mathcal{U}}_{h,g}$  также. В этом случае  $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  является особой точкой на  $\partial\tilde{\mathcal{U}}_{h,g}$ , которая появилась в

результате проектирования на сферу, но имеет регулярный прообраз на  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ . Как отмечалось ранее, топологические перестройки поверхности  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  происходят только в критических точках отображения  $\mathcal{F}_1$ , все эти точки были указаны в теореме 1.

Топологический тип поверхности  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  однозначно определяется двумя факторами: во-первых, структурой области  $\tilde{\mathcal{U}}_{h,g} \subset S^2$ , во-вторых, расположением диаметрально противоположных полюсов  $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  относительно этой области. Топология границы  $\partial\tilde{\mathcal{U}}_{h,g}$  изменяется либо на кривых бифуркационного множества  $\Sigma$  (когда меняется тип  $\partial\mathcal{U}_{h,g}$ ), либо на кривых  $\Sigma''$ . Число точек  $\boldsymbol{\nu} = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ , расположенных внутри области  $\tilde{\mathcal{U}}_{h,g}$ , изменяется только на бифуркационных кривых  $\Sigma'$ .

**3. Огибающая поверхность в  $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ .** С помощью интегралов исключим  $\boldsymbol{\nu}$  из уравнения  $F = 0$ :

$$f \equiv (|A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}|^2 - g^2)(|\mathbf{r}|^2 - (T - h)^2) - [(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r} - (T - h)g]^2 = 0. \quad (10)$$

Кинетическая энергия  $(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})/2$  механической системы обозначена в (10) через  $T$ . Функция  $f(\boldsymbol{\omega})$  впервые была получена П.В.Харламовым [1] при выводе специального вида уравнений движения тяжелого гиростата, классическим аналогом которых являются уравнения Гесса.

Пусть  $p : (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) \mapsto \boldsymbol{\omega}$  есть отображение проектирования фазового пространства  $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\nu})$  на первый сомножитель. Замкнутая область  $\mathcal{V}_{h,g} = p(\mathcal{Q}_{h,g}^3)$  является проекцией многообразия  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  на пространство  $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ . Назовем  $\mathcal{V}_{h,g}$  *областью допустимых скоростей*, соответствующих фиксированной поверхности  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ , ее край

$$\partial\mathcal{V}_{h,g} = \{f(\boldsymbol{\omega}) = 0\} \subset \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$$

назовем *огибающей поверхностью*. В интегрируемых случаях  $\partial\mathcal{V}_{h,g}$  является огибающей поверхностью для однопараметрического семейства сингулярных поверхностей – образов инвариантных торов Лиувилля. Пример исследования сингулярных поверхностей и их огибающих для классического случая Ковалевской см. в работе [8].

Область допустимых скоростей является “почти” многообразием с краем, так как край  $\partial\mathcal{V}_{h,g}$  может иметь несколько (но не более трех!) особых точек, расположенных на фиксированной прямой в  $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ . Все особые точки поверхности  $\partial\mathcal{V}_{h,g}$  изучены в работе [7]. Их классификация связана с кривыми (6): единственное отличие состоит в том, что параметр  $\gamma$  в уравнениях  $\Sigma''$  принадлежит множеству  $\{s_1(\gamma) \leq 0\} \subset \mathbb{R}$ . Следовательно, только часть особых точек  $\partial\mathcal{V}_{h,g}$  связана с особыми точками  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ . Установим точное соответствие между поверхностями  $\partial\mathcal{V}_{h,g}$  и  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  – неособая поверхность уровня и  $\partial\mathcal{V}_{h,g} = p(\mathcal{P}_{h,g}^2)$  – ее образ в  $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ . Тогда слой в  $\mathcal{P}_{h,g}^2 \subset \mathcal{Q}_{h,g}^3$  над  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \partial\mathcal{V}_{h,g}$  является окружностью  $S^1$  (если точка принадлежит прямой  $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} = \gamma\mathbf{r}$ ), либо точкой  $S^0$  (в остальных случаях).

*Доказательство.* Предположим, что векторы  $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$ ,  $\mathbf{r}$  удовлетворяют равенству (3) и не являются коллинеарными. Тогда единственный вектор  $\boldsymbol{\nu}$ , соответствующий фиксированному вектору  $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{V}_{h,g}$ , однозначно определяется соотношением  $\boldsymbol{\nu} = \zeta_1(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) + \zeta_2\mathbf{r}$ , где

$$\zeta_1 = \frac{|\mathbf{r}|^2 g + (h - T)(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r}}{|(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{r}|^2}, \quad \zeta_2 = \frac{(T - h)|A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}|^2 - g(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r}}{|(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{r}|^2}.$$

Однако, если  $\omega \in \partial\mathcal{V}_{h,g}$  и, кроме того, принадлежит специальной оси в  $\mathbb{R}^3(\omega)$  с ортом  $\mathbf{l} = A^{-1}(\gamma\mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda})/|A^{-1}(\gamma\mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda})|$ , тогда  $\boldsymbol{\nu}$  удовлетворяет уравнениям

$$\gamma\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = g, \quad |\boldsymbol{\nu}| = 1, \quad (11)$$

где коэффициент  $\gamma$  есть действительное решение кубического уравнения [7]

$$\frac{1}{2}(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\gamma^3 - (A^{-1}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda})\gamma^2 + \left[ \frac{1}{2}(A^{-1}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - h \right] \gamma - g = 0. \quad (12)$$

Заданное уравнениями (11) непустое пересечение плоскости с единичной сферой формирует окружность  $S^1 \subset \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\nu})$ . Докажем, что все точки этой окружности принадлежат области  $\tilde{\mathcal{U}}_{h,g} \subset \mathcal{U}_{h,g}$ . С помощью уравнений (11), (12) преобразуем  $\tilde{U}_g(\boldsymbol{\nu})$  и найдем выражение

$$h - \tilde{U}_g(\boldsymbol{\nu})|_{S^1} = \frac{[(\mathbf{w} - \gamma\mathbf{v}) \cdot A^{-1}\mathbf{v}]^2}{2(A^{-1}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}. \quad (13)$$

Неотрицательность правой части уравнения (13) означает, что любой точке окружности  $S^1$  отвечают допустимые значения  $\omega$ , полученные по формуле (8). Окружность может касаться границы  $\partial\tilde{\mathcal{U}}_{h,g}$ , но не пересекает ее. Итак, слой над данной точкой  $\omega \in \partial\mathcal{V}_{h,g}$  есть  $S^1$ .  $\square$

Любое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие всегда можно представить в виде объединения двух полных “кренделей” подходящего рода без общих внутренних точек, то есть всегда можно найти  $M^+, M^- \subset \mathcal{Q}^3$  такие, что  $M^+ \cup M^- = \mathcal{Q}^3$  и  $M^+ \cap M^- = \partial M^+ = \partial M^-$ . Такое разбиение многообразия  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  называется разбиением Хегора рода  $m$ , где  $m$  – топологический род “кренделя”  $\partial M$ . Именно с разбиением Хегора связан распространенный и удобный способ задания замкнутых ориентируемых многообразий [9]. В рассматриваемой задаче поверхностью  $\partial M$  служит связная компонента  $\mathcal{P}_{h,g}^2 = p^{-1}(\partial\mathcal{V}_{h,g})$ , ее род  $m$  зависит от параметров гиростата. Как известно, род – единственный топологический инвариант замкнутых ориентируемых связных поверхностей; две поверхности  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  диффеоморфны в том и только в том случае, когда их род  $m$  совпадает. Связная компонента двумерной поверхности  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  разбивает неособую компоненту  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  на два ориентируемых многообразия с гомеоморфными краями, а открытое множество  $\mathcal{V}_{h,g} \setminus \partial\mathcal{V}_{h,g}$  двулистно накрывается множеством  $\mathcal{Q}_{h,g}^3 \setminus \mathcal{P}_{h,g}^2$ .

Любое трехмерное замкнутое многообразие не вкладывается и не погружается в пространство  $\mathbb{R}^3$ , поэтому полученное здесь представление  $\mathcal{V}_{h,g} = p(\mathcal{Q}_{h,g}^3)$  в виде двух непесекающихся копий  $\mathcal{V}_{h,g} = p(M^+)$  и  $\mathcal{V}_{h,g} = p(M^-)$  в  $\mathbb{R}^3(\omega)$  позволяет изучать конечные дуги траекторий отдельно на каждой копии. Внутри  $p(M^\pm)$  траектории не пересекаются.

Траектории  $\omega(t)$  заполняют замкнутую область  $\mathcal{V}_{h,g}$  и касаются огибающей поверхности  $\partial\mathcal{V}_{h,g} \subset \mathbb{R}^3(\omega)$ . В фазовом пространстве многообразия  $M^+, M^-$  имеют общий край – поверхность  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ , и любая непериодическая траектория пересекает этот край бесконечное число раз. Все траектории не могут быть одновременно направлены внутрь  $M^+$  (или  $M^-$ ). Следовательно, можно указать области на  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  с различными направлениями фазового потока: из  $M^+$  в  $M^-$  или из  $M^-$  в  $M^+$ . Действительная функция времени  $|A\omega + \boldsymbol{\lambda}|$  достигает локального экстремума в момент контакта траектории с поверхностью  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ . Поэтому одна часть  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  соответствует локальным минимумам, а другая – локальным максимумам функции  $|A\omega + \boldsymbol{\lambda}|$ . Из условия  $d^2|A\omega + \boldsymbol{\lambda}|^2/dt^2 = 0$ , записанного в виде

$$|\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}|^2 + ((A\omega + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\mathbf{r} \times \omega) = 0, \quad (14)$$

найдем уравнение кривой, разделяющей эти два множества на  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ . Если в точке указанной сепаратрисы (14) выполняется неравенство  $d^3|A\omega + \lambda|^2/dt^3 \neq 0$ , тогда траектория после контакта с  $\mathcal{P}_{h,g}^2$  снова возвращается в исходную область  $\mathcal{M}^+$  или  $\mathcal{M}^-$ .

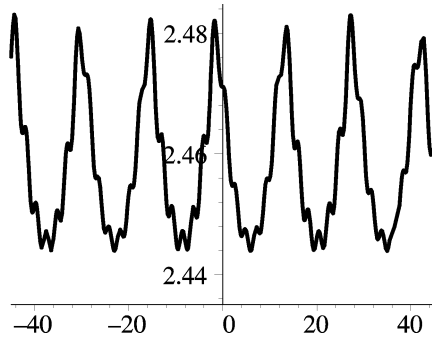


Рис. 1. Функция  $|A\omega(t) + \lambda|$  в окрестности разделяющей кривой (14).

Вычислим значения функции  $|A\omega(t) + \lambda|$  вдоль траектории, находящейся в малой окрестности кривой (14) на  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ . Результаты представлены на рис. 1. В данном примере начальные условия подобраны так, что траектория не выходит из указанной окрестности, а значение модуля кинетического момента  $|A\omega + \lambda|$  мало отличается от константы. Локальные минимумы и максимумы здесь чередуются с точками перегиба, в которых фазовая траектория касается кривой (14) на поверхности  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ . Напомним, что в рассматриваемой задаче модуль кинетического момента постоянен только

в решении Эйлера-Жуковского, во всех случаях равномерных вращений и в некоторых частных случаях решений Лагранжа и Гесса-Сретенского, характеризуемых прецессионными движениями тела-носителя вокруг вертикали [10]. Соответствующие этим решениям траектории целиком принадлежат поверхности  $\mathcal{P}_{h,g}^2$ .

Табл. Допустимые типы неособых многообразий ( $\lambda \approx 0$ )

$\mathcal{Q}_{h,g}^3$	$\mathbb{R}P^3$	$S^3$	$S^1 \times S^2$	$(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$
$\mathcal{P}_{h,g}^2$	—	$S^2$	$T^2$	$M_2^2(?)$
	—	$T^2$	$M_2^2$	$M_3^2$
	$T^2$	$M_2^2$	$M_3^2$	$M_4^2$
	$M_2^2$	$M_3^2$	$M_4^2$	$M_5^2$

В таблице перечислены допустимые типы многообразий  $\mathcal{Q}_{h,g}^3, \mathcal{P}_{h,g}^2$ , которые существуют при малых значениях модуля гиросtatического момента и, в частности, при  $\lambda = 0$ . Двумерное компактное ориентируемое многообразие рода  $m$  в таблице обозначено через  $M_m^2$ , а для сферы и тора использованы стандартные обозначения  $S^2 \equiv M_0^2, T^2 \equiv M_1^2$ . Представленное в виде связной суммы  $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$  многообразие  $\mathcal{Q}_{h,g}^3$  является “кренделем”, который получен из трехмерной сферы приклеиванием двух “ручек” (см. [11, с. 345]). Полное исследование случая  $\lambda = 0$  проведено автором совместно с П.Х.Рихтером. Для всех пар  $(\mathcal{Q}_{h,g}^3, \mathcal{P}_{h,g}^2)$ , кроме  $((S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2), M_2^2)$ , были найдены соответствующие этим многообразиям примеры областей в пространстве параметров твердого тела.

На рис. 2, а показаны множества:  $\mathcal{U}_{h,g} \subset S^2$  (серая область),  $\mathcal{U}_{h,g} \setminus \mathcal{U}_{h,g}$  (темная область) и  $S^2 \setminus \tilde{\mathcal{U}}_{h,g}$  (светлая область). Центр масс тела принадлежит главной плоскости инерции, точкой на сфере отмечен полюс  $\nu = -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ . На рис. 2, б изображена огибающая поверхность, соответствующая многообразиям  $\mathcal{P}_{h,g}^2 = T^2 \cup S^2 \cup S^2$  и  $\mathcal{Q}_{h,g}^3 = S^3 \cup S^3 \cup S^3$ . Точкой на оси отмечено расположение центра масс в базисе, жестко связанном с телом-носителем. Две основные проекции многообразия  $\mathcal{Q}_{h,g}^3 = S^3 \cup S^3 \cup S^3$  показаны на рис. 3, а, б.

**4. Сечение Пуанкаре.** Пусть  $\mathcal{Q}^3$  – замкнутое компактное гладкое ориентируемое многообразие, целиком состоящее из траекторий;  $\dot{x} = v(x)$  – дифференциальное уравнение, заданное гладким векторным полем на  $\mathcal{Q}^3$ ;  $F$  – гладкая действительная функция на мно-



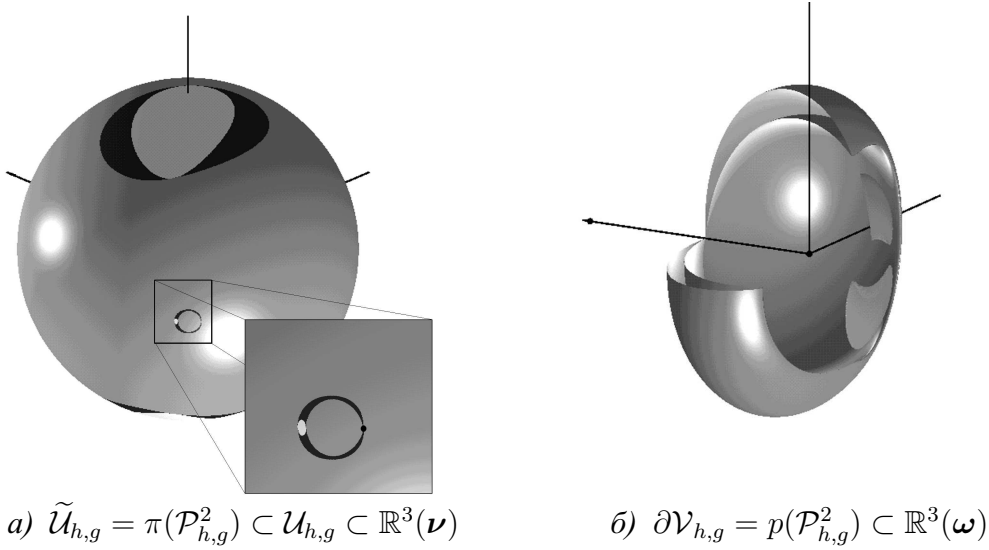


Рис. 2. Проекция поверхности  $\mathcal{P}^2_{h,g}$ .

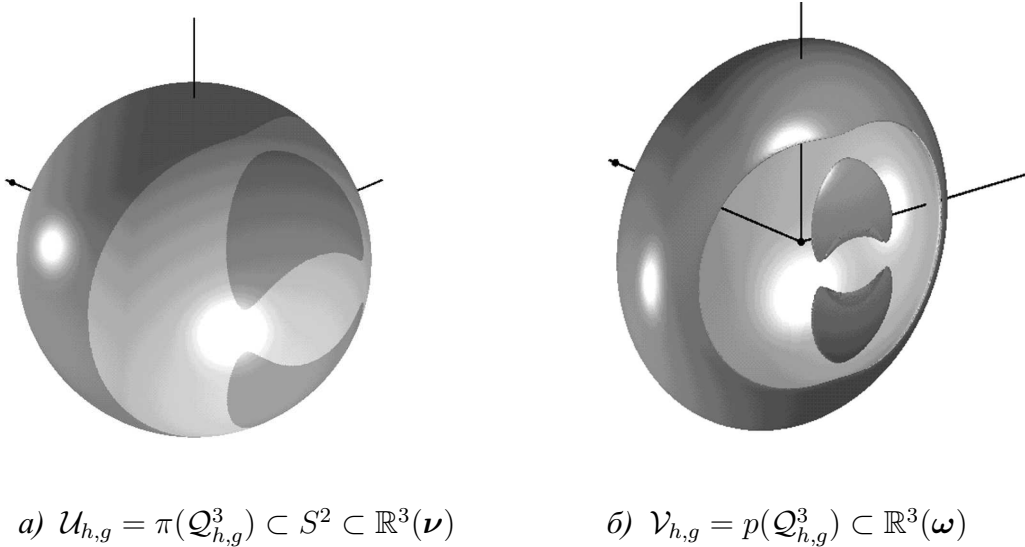


Рис. 3. Проекция изоэнергетической поверхности  $\mathcal{Q}^3_{h,g}$ .

гообразии  $\mathcal{Q}^3$ . Если ноль не является критическим значением  $F$ , то множество уровня  $\mathcal{P}^2 = F^{-1}(0)$  является гладким подмногообразием в  $\mathcal{Q}^3$ . Из теоремы о неявной функции следует существование двух гладких многообразий  $\mathcal{M}^\pm = \{x \in \mathcal{Q}^3 : \pm F(x) \leq 0\}$  с общим краем  $\mathcal{P}^2 = F^{-1}(0)$ . Касание траекторий с поверхностью  $\mathcal{P}^2$  происходит только на кривой  $\partial\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{P}^2 : \nabla F(x) \cdot v(x) = 0\}$ , которая разделяет  $\mathcal{P}^2$  на два подмножества  $\mathcal{N}^\pm = \{x \in \mathcal{P}^2 : \pm \nabla F(x) \cdot v(x) \leq 0\}$ . Кривая  $\partial\mathcal{N}$  может состоять из нескольких замкнутых связных компонент. Выберем такое сечение  $\mathcal{P}^2 = F^{-1}(0) \subset \mathcal{Q}^3$ , чтобы все траектории его пересекали. Сделаем это следующим образом. Пусть  $F_0$  – ограниченная дифференцируемая функция, заданная на  $\mathcal{Q}^3$ . Если  $F_0$  не постоянна на траекториях рассматриваемой динамической системы, тогда положим  $F = \nabla F_0(x) \cdot v(x)$ . Например, в качестве  $F_0$  может быть использовано сужение действительной функции  $|\mathcal{A}\omega + \lambda|$  на множестве  $\mathcal{Q}^3$ .

Теперь траектории, которыми заполнено инвариантное многообразие  $\mathcal{Q}^3$ , либо пересекают поверхность  $\mathcal{P}^2$ , либо (в исключительных случаях) целиком ей принадлежат. *Отоб-*

ражением последования назовем отображение, сопоставляющее точке  $x \in \mathcal{P}^2$  первую по времени точку пересечения с поверхностью  $\mathcal{P}^2$  исходящей из  $x$  полутраектории фазового потока. Если каждая траектория  $\mathcal{Q}^3$  пересекает сечение  $\mathcal{P}^2$ , то отображение последования в значительной степени определяет поведение всех траекторий на инвариантном многообразии. Две близкие точки  $x, x'$  имеют близкие образы при отображении последования. Исключением являются точки и их образы, оказавшиеся на кривой  $\partial\mathcal{N}$ . В частности, образ любой связной компоненты  $\partial\mathcal{N}$  не является замкнутой кривой. Чтобы избежать этих исключительных случаев, сечением обычно выбирают криволинейную односвязную область, лежащую внутри  $\mathcal{N}^+$  или  $\mathcal{N}^-$ . Для интегрируемых динамических систем на  $\mathcal{P}^2$  существует однопараметрическое семейство замкнутых кривых, инвариантных относительно отображения последования. Метод фазовых сечений и теорию инвариантных кривых для отображений последования впервые разработал Пуанкаре [12, гл. 27].

Локальное сечение можно представить в виде малой гладкой площадки коразмерности 1, трансверсально пересекающей замкнутую траекторию в фазовом пространстве. Локальные сечения эффективно используются при изучении периодических и асимптотических решений, но для общего описания динамики они почти бесполезны: такие сечения пересекаются только частью траекторий и, кроме того, некоторые траектории не возвращаются на сечение. Глобальное сечение в виде компактного многообразия, трансверсального к фазовому потоку, можно построить только в исключительных случаях [13]. Например, в рассматриваемой задаче лишь для многообразия  $\mathcal{Q}^3 = S^1 \times S^2$  могут (теоретически!) существовать глобальные трансверсальные сечения вида  $\mathcal{P}^2 = S^2$ . В этой статье исследовано глобальное нетрансверсальное сечение динамической системы (1) и доказаны его основные свойства:

- $\mathcal{P}^2$  является замкнутым гладким подмногообразием  $\mathcal{Q}^3$ , следовательно, все точки фазового сечения принадлежат  $\mathcal{Q}^3$ ;
- сечение разделяет каждую компоненту  $\mathcal{Q}^3$  на два замкнутых подмногообразия с общим краем;
- любая траектория на  $\mathcal{Q}^3$  пересекает сечение  $\mathcal{P}^2$ ;
- каждая полутраектория снова возвращается на  $\mathcal{P}^2$ ;
- если функция  $F_0$  не постоянна на траекториях инвариантного многообразия  $\mathcal{Q}^3$ , тогда возвращение на  $\mathcal{P}^2$  происходит за конечный интервал времени;
- требование трансверсальности  $\mathcal{P}^2$  к потоку нарушается только на кривой  $\partial\mathcal{N}$ ;
- кривая  $\partial\mathcal{N}$  разделяет  $\mathcal{P}^2$  на области  $\mathcal{N}^\pm$ , каждую из которых траектории пересекают в одном направлении.

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
2. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 200 с.
3. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. – Ижевск: Удмуртский ун-т, 1999. – Т. 2. – 448 с.

4. *Татаринов Я.В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика. – 1974. – N 6. – С. 99-105.
5. *Oshemkov A.A.* Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // *Advances in Sov. Math.* – 1991. – 6. – P. 67-146.
6. *Гашененко И.Н., Кучер Е.Ю.* Анализ изоэнергетических поверхностей для точных решений задачи о движении твердого тела// Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 18-30.
7. *Гашененко И.Н.* Инвариантные множества в пространстве угловых скоростей тяжелого гиростата// Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 79-87.
8. *Gashenenko I.N.* Angular velocity of the Kovalevskaya top// *Regular and chaotic dynamics.* – 2000. – 5, N 1. – P. 104-113.
9. *Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. – М: Изд-во МГУ, 1991. – 301 с.
10. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата// Механика твердого тела. – 1974. – Вып.6. – С. 9–15.
11. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
12. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. – Избр. труды в 3-х томах. – М.: Наука, 1972. – Т. II. – 999 с.
13. *Bolsinov A.V., Dullin H.R., Wittek A.* Topology of energy surfaces and existence of transversal Poincaré section// *J. Phys. A.* – 1996. – 29, N 16. – P. 4977–4985.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк  
gashenenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 19.10.02