УДК 517.925,531.38

 А.Д. Брюно

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА МЕТОДАМИ СТЕПЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Система уравнений Эйлера–Пуассона, описывающая движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, рассматривается в случае $B \neq C$, $x_0 \neq 0$, $y_0 = z_0 = 0$. Преобразованием Н. Ковалевского она сводится к системе двух ОДУ. С помощью трехмерной степенной геометрии для решений этой системы в случае общего положения вычисляются все семейства степенных и степенно-логарифмических асимптотик и разложений. Указываются множества значений параметров A, B, C, в которых разложения всех семейств а) не имеют комплексных показателей, б) не имеют логарифмов, в) имеют только рациональные показатели. Рассматривается вопрос о дополнительном первом интеграле. Вычисляются характеристики соответствующих семейств разложений решений уравнений Эйлера-Пуассона.

1. О степенной геометрии. Пусть $X = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m$ – вектор зависимых переменных, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ – вектор независимых переменных. Положим $Z = (X, Y) = (z_1, \ldots, z_{m+n}) \in \mathbb{C}^{m+n}$. *Дифференциальным мономом* $a(Z)$ называется произведение обычного монома

$$z_1^{q_1} \ldots z_{m+n}^{q_{m+n}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} cZ^Q,\ c = \mathrm{const} \in \mathbb{C},\ Q = (q_1, \ldots, q_{m+n}) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

и конечного числа производных вида

$$\frac{\partial^l x_i}{\partial y_1^{l_1} \ldots \partial y_n^{l_n}},\ \ l_j \geq 0,\ \ l = l_1 + \ldots + l_n.$$

Сумма $f(Z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum a_k(Z)$ дифференциальных мономов называется *дифференциальной суммой*.

Степенная геометрия [1] рассматривает системы уравнений вида

$$f_i(Z) = 0,\ \ i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где f_i — дифференциальные суммы, и предлагает алгоритмы для вычислени асимптотик решений системы (1) при

$$y_j \to 0 \ \text{ или } \ y_j \to \infty,\ \ j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

В частности — всех асимптотик вида

$$x_i = b_i Y^{R_i},\ \ b_i \neq 0,\ \ R_i \in \mathbb{C}^n,\ \ i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где b_i суть функции от $\ln y_j$, кратных логарифмов $\ln\ln y_j$ и т.д. [2]. Для решений $X(Y)$ системы (1) со *степенными асимптотиками* (3), где все

$$b_i = \mathrm{const} \in \mathbb{C},\ \ i = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-01067

алгоритмы степенной геометрии позволяют найти разложения этих решений в ряды вида

$$x_i = Y^{R_i} \sum_S b_{iS} Y^S, \quad i = 1, \dots, m, \tag{5}$$

где показатели $S \in \mathbb{C}^n$ и не имеют точек накопления в $\mathbb{C}^n$, а b_{iS} — суть многочлены от $\ln Y \stackrel{\text{def}}{=} (\ln y_1, \dots, \ln y_n)$. В частности [3] — все степенные разложения (5) решений, где все

$$b_{iS} = \text{const} \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Эти асимптотики и разложения были вычислены для системы Н. Ковалевского. Результаты излагаются ниже.

2. Преобразование Н. Ковалевского уравнений Эйлера–Пуассона. Движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой описываются системой уравнений Эйлера–Пуассона

$$\begin{array}{l} Ap' + (C-B)qr = Mg(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), \ {\gamma'}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ Bq' + (A-C)pr = Mg(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \ {\gamma'}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ Cr' + (B-A)pq = Mg(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), \ {\gamma'}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \end{array} \tag{7}$$

где штрих означает дифференцирование по времени t; A, B, C, M, g, x_0, y_0, z_0 — вещественные постоянные; A, B, C положительны и удовлетворяют неравенствам треугольника. Система (1) имеет три общих первых интеграла

$$\begin{array}{l} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = h = \text{const}, \\ Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = l = \text{const}, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = m = \text{const}. \end{array} \tag{8}$$

Постоянные h и l произвольны, а $m = 1$. Предположим, что $Mg = 1$. Здесь рассмотрим только случай

$$B \neq C, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 = z_0 = 0. \tag{9}$$

Для этого случая Н. Ковалевский [4] предложил рассматривать p как независимую переменную, ввел новые зависимые переменные

$$\sigma = (B-C)q^2/A, \ \tau = (B-C)r^2/A \tag{10}$$

и получил систему уравнений в новых переменных

$$\begin{array}{l} f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{\sigma}\tau + \dot{\sigma}\dot{\tau}/2 + a_1 + a_2\sigma + a_3\dot{\tau}p + a_4\tau + a_5p^2 = 0, \\ f_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\ddot{\tau} + \dot{\sigma}\dot{\tau}/2 + b_1 + b_2\dot{\sigma}p + b_3\sigma + b_4\tau + b_5p^2 = 0, \end{array} \tag{11}$$

где точка означает дифференцирование по p. При этом

$$\begin{array}{l} q^2 = A\sigma/(B-C), \quad r^2 = A\tau/(B-C), \\ \gamma_1 = [h - A(B\sigma + C\tau)/(B-C) - Ap^2]/(2x_0), \\ \gamma_2 = -C[\dot{\tau} - 2(A-B)p/C]q/(2x_0), \\ \gamma_3 = B[\dot{\sigma} - 2(C-A)p/B]r/(2x_0), \quad t = \displaystyle\int dp\,/\sqrt{\sigma\tau}. \end{array} \tag{12}$$

При этой замене координат был использован первый из интегралов (8), а два других принимают соответственно вид

$$\begin{array}{l} f_3 \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\sigma}\tau - \sigma\dot{\tau} + c_1 + c_2p + c_3\sigma p + c_4\tau p + c_5p^3 = 0, \\ f_4 \stackrel{\text{def}}{=} d_1(\dot{\sigma})^2\tau + \sigma(\dot{\tau})^2 + d_2 + d_3\sigma + d_4\tau + d_5\sigma^2 + d_6\dot{\sigma}\tau p + \\ + d_7\sigma\dot{\tau}p + d_8\sigma\tau + d_9\tau^2 + d_{10}p^2 + d_{11}\sigma p^2 + d_{12}\tau p^2 + d_{13}p^4 = 0. \end{array} \tag{13}$$

Введем новые параметры

$$x = A/C, \;\; y = B/C, \;\; z = h/C, \;\; \lambda = l/C, \;\; \xi = x_0/C, \tag{14}$$

тогда величины a_i, b_i в (11) и c_i, d_i в (13) для $m = 1$ в (8) суть

$$\begin{aligned}
&a_1 = -z/y, \;\; a_2 = x/(y-1), \;\; a_3 = (x-2)/y,\\
&a_4 = (2xy + 2 - x - 2y)/(y(y-1)), \;\; a_5 = (3x - 2y)/y;\\
&b_1 = -z, \;\; b_2 = 2y - x, \;\; b_3 = (2y^2 + 2x - 2y - xy)/(y-1),\\
&b_4 = x/(y-1), \;\; b_5 = 3x - 2;\\
&c_1 = -2(y-1)\lambda\xi/(xy), \;\; c_2 = z(y-1)/y,\\
&c_3 = x - 2y, \;\; c_4 = (x-2)/y, \;\; c_5 = -x(y-1)/y;\\
&d_1 = y^2, \;\; d_2 = (z^2 - 4\xi^2)(y-1)/x, \;\; d_3 = -2zy, \;\; d_4 = -2z,\\
&d_5 = xy^2/(y-1), \;\; d_6 = -4(1-x)y, \;\; d_7 = -4(x-y),\\
&d_8 = 2xy/(y-1), \;\; d_9 = x/(y-1), \;\; d_{10} = -2z(y-1),\\
&d_{11} = 2(2x^2 - 3xy + 2y^2), \;\; d_{12} = 2(2 - 3x + 2x^2), \;\; d_{13} = x(y-1),
\end{aligned} \tag{15}$$

где x, y удовлетворяют неравенствам

$$x + y \ge 1, \;\; x - y \ge -1, \;\; y - x \ge -1, \;\; y \ne 0, \;\; y \ne 1.$$

Соответствующее множество точек (x, y) обозначено через $\mathbf{D}$ и показано на рис. 1. Система (11) и интегралы (13) обладают симметрией

$$(\sigma, \tau, p, x, y, z, \lambda, \xi) = (-\bar\tau, -\bar\sigma, \bar p, \bar x/\bar y, 1/\bar y, \bar z/\bar y, \bar\lambda/\bar y, \bar\xi/\bar y). \tag{16}$$

Для решений $\sigma(p)$ и $\tau(p)$ системы Н. Ковалевского (11) в случае общего положения при $p \to 0$ и при $p \to \infty$ найдены:

а) все степенные асимптотики [6–10]

$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha, \;\; \tau = \tau_0 p^\beta, \;\; \sigma_0, \tau_0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \;\; \sigma_0, \tau_0 \ne 0, \tag{17}$$

где

$$\sigma_0, \tau_0 = \mathrm{const}; \tag{18}$$

б) все степенно-логарифмические асимптотики [3] вида (17), где σ_0 и τ_0 суть функции от $\ln p$ и $\ln\ln p$;

в) все степенные разложения [5–11] вида

$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \sum_s \sigma_s p^{\alpha+s}, \;\; \tau = \tau_0 p^\beta + \sum_s \tau_s p^{\beta+s}, \tag{19}$$

где $\alpha, \beta, s \in \mathbb{C}$, значения s не имеют точек накопления на $\mathbb{C}$; $\mathrm{Re}\, s > 0$ и $\omega = -1$, если $p \to 0$, и $\mathrm{Re}\, s < 0$ и $\omega = 1$, если $p \to \infty$; постоянные коэфициенты σ_s и $\tau_s \in \mathbb{C}$; σ_0 и $\tau_0 \ne 0$;

г) все степенно-логарифмические разложения вида (19), где $\sigma_0, \tau_0 = \mathrm{const} \ne 0$, а σ_s и τ_s суть многочлены от $\ln p$.

Ниже в пп. 3–6 последовательно излагаются эти результаты, а в пп. 7–9 делаются из них выводы.

3. Степенные асимптотики. В [6–10] найдено всего 22 семейства $\mathcal{F}_1$–$\mathcal{F}_{22}$ степенных асимптотик (17), (18). Их данные приведены в табл. 1. В первой колонке дан номер k семейства $\mathcal{F}_k$, во второй — номер $\bar k$ симметричного по (16) семейства $\mathcal{F}_{\bar k} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\mathcal{F}_k}$, в третьей — значения α, β, ω для семейства $\mathcal{F}_k$, в четвертой, пятой и шестой — ограничения на σ_0, τ_0 и область определения семейства $\mathcal{F}_k$ соответственно. При этом $\varphi_0 = \sqrt{16xy^2 - 8x^2y + 9x^2 - 16xy}$. На рис. 2 показаны области $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_2$, а на рис. 3 — прямые $x = 1$, $x = 2$, $x = y$, $x = 2y$ и точки $x = y = 2$ и $x = 1$, $y = 1/2$, на которых определены или не определены некоторые из семейств $\mathcal{F}_k$. Из табл. 1 видно, что только у семейств $\mathcal{F}_9$ и $\mathcal{F}_{10}$ при $(x, y) \in \mathbf{F}_0$ и при $(x, y) \in \overline{\mathbf{F}_0}$ соответственно показатели α и β комплексные. В остальных случаях они вещественные.

4. Степенно-логарифмические асимптотики. Было найдено шесть семейств $\mathcal{G}_1$–$\mathcal{G}_6$ степенно-логарифмических асимптотик [3]. Семейство $\mathcal{G}_1$ определено на кривой

$$x = \frac{2y(y-1)}{y+2}$$

(рис. 2, $\alpha = -1$), для него

$$\sigma = cp^{-1}\left[\ln p - (\beta_1 + (6/5)(1 + \ln\ln p)) + O\left((\ln p)^{-1}\right)\right],$$

$$\tau = -\frac{2yp^2}{y+2}\left[1 + \frac{2}{\ln p} + \frac{3 + 2\beta_1 + (12/5)\ln\ln p}{(\ln p)^2} + O\left(\frac{1}{(\ln p)^3}\right)\right],$$

где c и β_1 — произвольные постоянные.

Семейство $\mathcal{G}_3$ определено на кривой

$$x = \frac{16y(y-1)}{8y-9}$$

(рис. 2, $\alpha = 4$) и имеет вид

$$\sigma = \frac{cp^4}{(\ln p)^4}\left[1 - \frac{\beta_1 + (13/5)(1 + \ln\ln p)}{\ln p} + O\left(\frac{1}{(\ln p)^2}\right)\right],$$

$$\tau = -\frac{yp^2}{8y-9}\left[1 - \frac{2}{\ln p} + \frac{3 - \beta_1/2 - (13/10)\ln\ln p}{(\ln p)^2} + O\left(\frac{1}{(\ln p)^3}\right)\right],$$

где c и β_1 — произвольные постоянные.

Семейство $\mathcal{G}_5$ определено для $x = 2$, $y \neq 2$ (см. рис. 2, отрезок γ) и имеет вид

$$\sigma = p^2\left[-\frac{1}{2y-2} + \frac{\kappa_1}{(2y-2)^3\ln p} + \frac{\kappa_2 - (2y-2)y\beta_2 + \kappa_3\ln\ln p}{(2y-2)^5(\ln p)^2} + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{(\ln p)^3}\right)\right], \quad \tau = p^2\left[\eta_0\ln p + \beta_2 + \eta_1\ln\ln p + O\left(\frac{1}{\ln p}\right)\right],$$

где $\kappa_1 = (y-2)(3y-2)$, $\kappa_2 = (y-2)(3y-2)(6y^2 - 10y + 5)$, $\kappa_3 = -y(y-2)(3y-2)^2(3y-4)$, $\eta_0 = 2(y-1)(y-2)/y$, $\eta_1 = (y-2)(3y-2)(3y-4)/(2y-2)$, а β_2 — произвольно.

Семейства $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_4$ и $\mathcal{G}_6$ симметричны по (16) семействам $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_3$ и $\mathcal{G}_5$ соответственно. Они определены на линиях $x = 2(1-y)/(1+2y)$, $x = 16(y-1)/(9y-8)$ и $x = 2y$, $x \neq 1$ соответственно (рис. 2, $\bar{\alpha} = -1$, $\bar{\alpha} = 4$ и $\bar{\gamma}$).

5. Степенные разложения. Каждой степенной асимптотике

$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha, \quad \tau = \tau_0 p^\beta, \quad \sigma_0, \tau_0 = \mathrm{const} \neq 0 \tag{20}$$

решений системы (11) соответствуют четыре собственных числа s_1, s_2, s_3, s_4. При построении соответствующих степенных разложений

$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \sum \sigma_s p^{\alpha+s}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta + \sum \tau_s p^{\beta+s}, \quad \sigma_s, \tau_s = \text{const} \tag{21}$$

решений системы (11) коэфициенты σ_s и τ_s определяются последовательно по росту $|\mathrm{Re}\, s|$ из системы линейных уравнений. Если число s не является собственным, то матрица этой системы невырождена, и коэффициенты σ_s, τ_s определяются однозначно. Если число s является собственным, то матрица этой системы вырождена, и ее решение имеется только при выполнении условия совместности. Если это условие выполнено, то имеется однопараметрическое семейство коэффициентов σ_s, τ_s. Собственное число s называется *критическим*, если $\omega \mathrm{Re}\, s_i < 0$. Напомним, что $\omega = -1$, если $p \to 0$ (тогда в (21) $\mathrm{Re}\, s > 0$), и $\omega = 1$, если $p \to \infty$ (тогда в (21) $\mathrm{Re}\, s < 0$). Критическое собственное число s_i называется *опасным*, если для $s = s_i$ имеется нетривиальное условие совместности. Два собственных числа s_3 и s_4 соответствуют интегралам f_3 и f_4 из (13) в том смысле, что при подстановке разложения (21) в интеграл f_i постоянная этого интеграла встречается при $s = s_i$ $(i = 3, 4)$. Поэтому эти собственные числа s_3 и s_4 всегда неопасны. Оставшиеся собственные числа s_1 и s_2 упорядочим так: $\mathrm{Re}\, s_1 \le \mathrm{Re}\, s_2$. Оказалось, что опасным может быть только одно из них, и это происходит в сравнительно редких случаях.

Для 22 семейств $\mathcal{F}_k$ степенных асимптотик (20) были вычислены собственные числа s_1, s_2, s_3, s_4 и выделены опасные значения. Соответствующее семейству $\mathcal{F}_k$ степенных асимптотик (20) семейство степенных разложений (21) обозначено как $\mathcal{H}_k$. Результаты этих вычислений представлены в табл. 2. В первой колонке приведен номер семейства k, затем собственные числа s_1, s_2, s_3, s_4, опасные значения, число произвольных коэффициентов в разложении (21). Эта таблица составлена как продолжение табл. 1. При этом

$$\varphi_1 = \sqrt{(16y^2 - 8xy + 9x - 16y)/x},$$
$$\varphi_3 = \sqrt{(13y + 23)/(y - 1)},$$
$$\varphi_5 = \sqrt{(4x^2 - 8xy - 8x + 17y)/y},$$

и n — любое натуральное число. Из табл. 2 видно, что опасные значени для семейств $\mathcal{H}_5$, $\mathcal{H}_6$, $\mathcal{H}_9$, $\mathcal{H}_{10}$, $\mathcal{H}_{19}$ встречаются на кривых в множестве $\mathbf{D}$. Для $\mathcal{H}_6$, $\mathcal{H}_9$, $\mathcal{H}_{10}$, $\mathcal{H}_{19}$ они показаны на рис. 4. На нем заштрихованы области, в которых разложени (21) для семейств $\mathcal{H}_9$, $\mathcal{H}_{10}$ и $\mathcal{H}_{19}$ имеют комплексные показатели $s + \alpha$ или $s + \beta$. Для семейств $\mathcal{H}_9$ и $\mathcal{H}_{10}$ комплексными являются α и β, а для семейства $\mathcal{H}_{19}$ — числа s_1 и s_2. Семейство $\mathcal{H}_{11}$ имеет опасные значения для счетного множества точек на прямой $x = y$. В частности, в это множество попадает точка $x = y = 2$, в которой существует дополнительный первый интеграл С. Ковалевской [12]. В ней значение $s_1 = -4/3$ и $n = 2$. Однако в этой точке условие совместности для семейства $\mathcal{H}_{11}$ выполнено. Кроме того, для $y < 1$ разложения (11) семейства $\mathcal{H}_{11}$ имеют комплексные показатели, ибо s_1 и s_2 комплексные и $\mathrm{Re}\, s_1 < 0$. Наконец, для семейства $\mathcal{F}_{22}$ нет соответствующих степенных разложений, ибо условие совместности везде в области его определения не выполнено (то есть для $x \ne y$ и $x \ne 1$). Поэтому семейство $\mathcal{H}_{22}$ отсутствует. Согласно теории [3] разложения (21) могут расходиться только для семейств $\mathcal{H}_{11} - \mathcal{H}_{18}$; для остальных семейств они сходятся.

6. Степенно-логарифмические разложения. Теперь для степенных асимптотик (20) будем искать степенно-логарифмические разложени

$$\sigma = \sigma_0 p^\alpha + \sum \sigma_s(\ln p) p^{\alpha+s}, \quad \tau = \tau_0 p^\beta + \sum \tau_s(\ln p) p^{\beta+s} \tag{22}$$

решений системы (11), где σ_s и τ_s суть многочлены от $\ln p$. Такие разложения возникают только в тех случаях, когда не выполнено условие совместности. Согласно табл. 2 они имеются для семи семейств $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_6$, $\mathcal{F}_9$, $\mathcal{F}_{10}$, $\mathcal{F}_{11}$, $\mathcal{F}_{12}$, $\mathcal{F}_{19}$ на опасных кривых и точках в области $\mathbf{D}$. Кроме того, разложения (22) имеются в случаях кратных критических чисел s_i, даже если условие совместности выполнено. Такие случаи имеются для семейств $\mathcal{F}_5$ и $\mathcal{F}_6$ при $s_2 = 2$ и для семейства $\mathcal{F}_{19}$ при $s_1 = s_2 = -1/2$. Причем во всех этих случаях получаются однопараметрические логарифмы. Все степенно-логарифмические разложения, соответствующие семейству $\mathcal{F}_k$, объединены в одно семейство $\mathcal{K}_k$.

Для семейства $\mathcal{F}_{22}$ условие совместности не выполнено во всей области определения (то есть при $x \neq y$, $x \neq 1$). Для него разложения (22) имеют вид

$$\sigma = \sigma_0 p^2 + \sigma_1 p + \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n(\ln p) p^{2-n}, \quad \tau = \tau_0 p^2 + \tau_1 p + \sum_{n=2}^{\infty} \tau_n(\ln p) p^{2-n}, \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}
&\sigma_0 = (1-x)/y, \quad \tau_0 = x - y,\\
&\sigma_1 \text{ — произвольно}, \quad \tau_1 = -y^2\sigma_1,\\
&\sigma_2 = \xi_0 + \xi_1 \ln p + \xi_2 (\ln p)^2, \quad \tau_2 = \eta_0 + \eta_1 \ln p + \eta_2 (\ln p)^2,\\
&\xi_0, \xi_1 \text{ — произвольны}, \quad \xi_2 = \frac{y^2(y-1)\sigma_1^2}{2(x-1)(x-y)},\\
&\eta_0 = -y\xi_0 + \left[z - y\xi_1 + \frac{y^2(x-2y+1)\sigma_1^2}{2(x-y)} \right] \frac{y-1}{x},\\
&\eta_1 = -y\xi_1 - \frac{y^3(y-1)^2\sigma_1^2}{2x(x-1)(x-y)}, \quad \eta_2 = -\frac{y^3(y-1)\sigma_1^2}{2(x-1)(x-y)},\\
&\sigma_3 = \zeta_0 + \zeta_1 \ln p + \zeta_2 (\ln p)^2, \quad \tau_3 = \rho_0 + \rho_1 \ln p + \rho_2 (\ln p)^2,\\
&\zeta_0 \text{ — произвольно}, \ \text{ а } \ \zeta_1, \zeta_2, \rho_0, \rho_1, \rho_2\\
&\text{однозначно определяются через } \ \sigma_1, \xi_0, \xi_1, \zeta_0;
\end{aligned}$$

σ_n и τ_n суть многочлены от $\ln p$ степени не выше n, их коэффициенты определяются однозначно. Здесь важно, что σ_2 и τ_2 суть двупараметрические функции от $\ln p$. Семейство разложений (23) решений системы (11) обозначим $\mathcal{K}_{22}$.

7. Сортировка разложений. Будем различать следующие четыре сорта разложений (21) и (22).

Сорт 1. Разложение (21) и все показатели $\alpha + s$, $\beta + s$ целые.

Сорт 2. Разложение (21) и все показатели $\alpha + s$, $\beta + s$ рациональные.

Сорт 3. Разложение (21) с вещественными показателями $\alpha + s$, $\beta + s$ и разложение (22) с однопараметрическим логарифмом.

Сорт 4. Разложение (21) с комплексными показателями $\alpha + s$, $\beta + s$ и разложение (22) с двупараметрическим логарифмом.

Очевидно, что с возрастанием сорта увеличивается сложность решения. Для каждой точки $(x, y) \in \mathbf{D}$ определим ее сорт как наибольший среди сортов всех разложений, имеющихся в этой точке.

Точки множества $\mathbf{D}$, лежащие вне прямых $x = 1$ и $x = y$, относятся к сорту 4, благодаря семейству $\mathcal{K}_{22}$. Поскольку прямые $x = 1$ и $x = y$ симметричны друг другу по (16), то достаточно далее рассмотреть только точки прямой $x = y$. Точки с $y < 1$ относятся к сорту 4, ибо разложения семейства $\mathcal{H}_{11}$ имеют там комплексные показатели. Точки с $y > 1$ имеют сорт 3 и меньше. Точек первого сорта здесь нет. Все точки второго сорта имеют вид

$$y = 1 + (2-\alpha)/\alpha^2, \tag{24}$$

где (α, γ) — рациональные точки кривой

$$\alpha^2 + (\alpha - 2)(\gamma^2 - 13/36) = 0. \tag{25}$$

Кривая (25) имеет счетное число рациональных точек. Некоторые из них представлены в табл. 3. Замечательно, что в точках $y = 2$ и $y = 4$ имеются первый интеграл С. Ковалевской и частный интеграл Чаплыгина соответственно [12].

8. О существовании дополнительного первого интеграла. К настоящему времени дополнительный первый интеграл системы (7) известен только в трех случаях [12]: Эйлера, Лагранжа и С. Ковалевской. При ограничениях (9) имеется только случай С. Ковалевской для $x = y = 2$ и для $x = 1$, $y = 1/2$. Для $x = y = 2$ дополнительный первый интеграл С. Ковалевской для системы (11) имеет вид

$$f_5 \stackrel{\text{def}}{=} (2p^2 + \tau - z/2)^2 + 2\sigma(2p + \dot{\tau}/2)^2 - k = 0,$$

где $k = \text{const}$.

Будем искать дополнительный первый интеграл системы (11) в виде конечной дифференциальной суммы с производными не выше первого порядка. Если показатели степеней переменных предполагаются любыми вещественными, то, согласно результатам п. 7, такой интеграл может быть только при $x = y > 1$. Однако, согласно п. 4, при $y = 4$ и $y = 4/3$ имеются двупараметрические логарифмические асимптотики семейств $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_4$ соответственно. Поэтому для $y = 4/3$ и $y = 4$ такой интеграл невозможен. В частности, при $y = 4$ имеется частный интеграл Чаплыгина, но дополнительного первого интеграла нет.

Если в дополнительном первом интеграле показатели степеней переменных предполагаются рациональными, то, скорее всего, такие интегралы существуют в точках (24), (25), хотя и не обязательно.

Во всех точках $x = y > 1$ имеются семейства $\mathcal{H}_1$–$\mathcal{H}_7$. Другие семейства $\mathcal{H}_k$, имеющиеся при $x = y > 1$, представлены в табл. 4. В первой колонке указан номер k семейства, во второй колонке для $y \in (1, 2)$ указаны: число произвольных коэффициентов у семейства; базис показателей $\alpha + s$, $\beta + s$ в разложениях (21) этого семейства. В третьей и четвертой колонках указаны эти же данные для $y = 2$ и $y > 2$ соответственно. Семейство $\mathcal{H}_{11}$ имеется во всех трех случаях, но остальные семейства $\mathcal{H}_k$ из табл. 4 имеются только для одного из них. Случай $y = 2$ это случай С. Ковалевской, когда известен дополнительный первый интеграл. Во всех трех случаях имеется семейство с четырьмя произвольными коэффициентами: $\mathcal{H}_{10}$, $\mathcal{H}_{20}$, $\mathcal{H}_{15}$. Согласно общей теории [3] разложения (21) у семейств $\mathcal{H}_{10}$ и $\mathcal{H}_{20}$ сходятся, а у семейства $\mathcal{H}_{15}$ они могут расходиться, также как у семейств $\mathcal{H}_{11}$, $\mathcal{H}_{13}$, $\mathcal{H}_{17}$. В табл. 4 номера этих семейств отмечены звездочками. В ней $(y-1)\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$, $3(y-1)\gamma^2 + (y-1)\gamma - y - 2 = 0$, $\beta = y/(y-1)$.

Гипотеза. Разложения (21) для семейства $\mathcal{H}_{15}$ расходятся, и при $x = y > 2$ нет дополнительного первого интеграла.

Поэтому новый дополнительный первый интеграл можно ожидать только при $y \in (1, 2)$.

9. Возвращение к системе (7). По формулам (12) из решений системы (11) можно получить решения системы (7). Разложениям (21) и (22) решений системы (11) соответствуют разложения

$$\begin{aligned} &p = t^{n_1} \sum p_s t^s, \quad q = t^{n_2} \sum q_s t^s, \quad r = t^{n_3} \sum r_s t^s, \quad p_0, q_0, r_0 \neq 0, \\ &\gamma_i = t^{m_i} \sum g_{is} t^s, \quad g_{i0} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{26}$$

решений системы (7), где $\operatorname{Re} s \geq 0$, если $t \to 0$, и $\operatorname{Re} s \leq 0$, если $t \to \infty$. При этом характер разложения сохраняется, то есть степенные переходят в степенные, а степенно-логарифмические в степенно-логарифмические. Обозначим через $\mathcal{H}'_k$ семейство разложений решений системы (7), полученное из семейства $\mathcal{H}_k$ решений системы (11). Каждое из семейств $\mathcal{H}'_k$ имеет шесть собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$, $\lambda_6 = -1$. В табл. 5 приведены значени $N = (n_1, n_2, n_3)$, $M = (m_1, m_2, m_3)$, $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ для семейств $\mathcal{H}'_k$. Сорта точек (x, y) для системы (7) такие же, как для системы (11), кроме точек $x = y = 2$ и $x = 1$, $y = 1/2$, которые являются точками первого сорта для системы (7). В них все разложения (26) не имеют логарифмов, имеют целые показатели и имеется первый интеграл С. Ковалевской [12].

Логарифмические асимптотики п. 4 переходят в логарифмические асимптотики решений системы (7). Поэтому все, что было сказано в п. 8 о существовании дополнительного первого интеграла системы (11) в случае (9), справедливо и для системы (7).

Семейство $\mathcal{H}'_{11}$ вычислял Аппельрот [13]. Семейства $\mathcal{H}'_{19}$ и $\mathcal{H}'_{20}$ вычисляла С. Ковалевская [14], при этом для семейства $\mathcal{H}'_{19}$ она неверно вычислила собственное число λ_3 как 0. Для некоторых случаев показатели N, M и собственные числа вычислил Гашененко [15].

Замечание 1. У системы Н. Ковалевского (11) при $\lambda = 0$ есть еще несколько семейств степенных разложений решений. Но им не соответствуют степенные или степенно-логарифмические разложения решений системы Эйлера–Пуассона (7).

Замечание 2. При $p \to p_0 = \mathrm{const} \neq 0$ имеются степенные разложени решений системы (11) по $p - p_0$, которые дают степенные разложения для решений системы (7). Согласно п. 2 их изучение не было среди целей настоящей работы. Таким является семейство, названное И.Н. Гашененко [15] "случай Бобылева–Стеклова".

10. Уравнения П.В. Харламова. Как показал П.В. Харламов [16;17;18, гл. I, п. 3.4], система Эйлера–Пуассона (7) в общем случае с помощью первых интегралов (8) сводится к системе двух уравнений

$$
\begin{gathered}
[(a_2 - a_1)yz + (b_2 y - b_1 z)x]\left(y\frac{dz}{dx} - z\frac{dy}{dx}\right) + (b_1 y + b_2 z)(y^2 + z^2) + \\
+ x\left[\left(a - \frac{a_1}{2}\right)y^2 + \left(a - \frac{a_2}{2}\right)z^2\right] + \frac{a}{2}x^3 - Ex - m = 0, \\
\left\{(a - a_1)xy + (b_1 y + b_2 z)y - b_1 x^2 + [(a_2 - a_1)yz + (b_2 y - b_1 z)x]\frac{dz}{dx}\right\}^2 + \\
+ \left\{(a - a_2)xz + (b_1 y + b_2 z)z - b_2 x^2 + [(a_1 - a_2)yz + (b_1 z - b_2 y)x]\frac{dy}{dx}\right\}^2 + \\
+ \left\{\frac{1}{2}(ax^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2) + (b_1 y + b_2 z)x - E\right\}^2 - \Gamma^2 = 0.
\end{gathered}
$$

где x — независимая переменная, y и z — две зависимые переменные, постоянные a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, E, m, Γ являются определенными функциями от постоянных системы (7) и интегралов (8). Левые части этих уравнений являются дифференциальными суммами. Поэтому к этой системе также применимы методы трехмерной степенной геометрии, что позволит получить для решений уравнений Эйлера–Пуассона (7) в общем случае все степенные и степенно-логарифмические асимптотики и разложения.

Предварительная версия этой работы — препринт [19].

Автор благодарит И.Н. Гашененко за обсуждения по табл. 5 и по замечанию 2.

Приложение А. Таблицы

Табл. 1. Характеристики семейств $\mathcal{F}_k$

k	$\bar{k}$	α, β, ω	$\sigma_0 =$	$\tau_0 =$	ог. на обл. опр.
1	2	$0, 1, -1$			$\lambda \neq 0$
3	3	$0, 0, -1$			
4	4	$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -1$			$\lambda = 0$
5	6	$-1, 2, -1$		$-\frac{x}{y-1}$	
7	8	$\frac{x-\varphi_0}{2(x-2y)(y-1)}, 2, -1$		$\frac{x-2y}{2-\alpha}$	$(x, y) \in \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}'_1$
9	10	$\frac{x \pm \varphi_0}{2(x-2y)(y-1)}, 2, 1$		$\frac{x-2y}{2-\alpha}$	$(x, y) \in \mathbf{F}_2 \cup \mathbf{F}_0$
11	12	$2, \frac{2}{3}, 1$	$-\frac{y}{y-1}$		$x = y$
13	14	$2, \frac{y}{y-1}, 1$	$-\frac{y}{y-1}$		$x = y > 2, \lambda \neq 0$
15	16	$2, \frac{y}{y-1}, 1$	$-\frac{y}{y-1}$		$x = y > 2$
17	18	$2, \frac{y}{y-1}, 1$	$-\frac{y}{y-1}$		$x = y > 2, \lambda = 0$
19	19	$2, 2, 1$	$\frac{x-1}{x-2y}$	$\frac{y-x}{x-2}$	$x \neq 1, 2, y, 2y$
20	21	$2, 2, 1$	$-\frac{1}{2}$		$x = y = 2$
22	22	$2, 2, 1$	$\frac{1-x}{y}$	$x - y$	$x \neq 1, y$

Табл. 2. Характеристики семейств $\mathcal{H}_k$ и $\mathcal{K}_{22}$

k	s_1	s_2	s_3	s_4	оп. зн.	ч. пр. коэф.
1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$		3
3	0	0	1	1		4
4	-1	0	$-\frac{1}{3}$	0		2
5	$-\frac{5+\varphi_1}{4}$	$\frac{\varphi_1-5}{4}$	0	2	$s_2 = n-1$	$2, 3$
7	$-2+\frac{\alpha}{2}$	0	$-\alpha-1$	-2α		3
9	$-2+\frac{\alpha}{2}$	0	$-\alpha-1$	-2α	$s_1 = n(2-\alpha)$	$3, 4$
11	$-\frac{1+\varphi_3}{6}$	$\frac{\varphi_3-1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	0	$s_1 = -\frac{n+2}{3}$	$2, 3$
13	0	$\frac{3}{2}\beta-1$	0	$1-\beta$		3
15	0	0	$1-\frac{3}{2}\beta$	$2-\frac{5}{2}\beta$		4
17	0	$\frac{5}{2}\beta-2$	$\beta-1$	0		2
19	$-\frac{1+\varphi_5}{2}$	$\frac{\varphi_5-1}{2}$	-3	-4	$s_1 = -\frac{1}{n+2}$, $s_1 = -2$	$2, 3, 4$
20	-1	0	-3	-4		4
22	-2	-1	-3	-3	$s_1 = -2$	4

Табл. 3. Рациональные точки кривой (25)

k	1	2	3	4	5	6
$\alpha_{\pm k} < 0$	-1	-2	-46	$-\frac{34}{81}$	$-\frac{1483}{3\cdot 11^2}$	$-\frac{11177}{2^{10}}$
$\alpha_{\pm k} > 0$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{23}{12}$	$\frac{17}{49}$	$\frac{2\cdot 1483}{47^2}$	$\frac{2\cdot 11177}{23^2\cdot 25}$
$\lvert\gamma_k\rvert$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{83}{2\cdot 7\cdot 9}$	$\frac{5465}{6\cdot 11\cdot 47}$	$\frac{34181}{2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 23}$
$y_k - 1$	3	1	$\frac{12}{23^2}$	$\frac{81\cdot 49}{17^2}$	$\frac{3\cdot 11^2\cdot 47^2}{1483^2}$	$\frac{2^{10}\cdot 23^2\cdot 25}{11177^2}$

Табл. 4. Характеристики семейств $\mathcal{H}_k$ при $x = y > 1$

k	$y \in (1,2)$	$y = 2$	$y > 2$
8			$3, 1$ и $\alpha < -2$
10	$3; 1$ и $\alpha > 4$		
$\tilde{10}$	$4; 1$ и $\frac{\alpha}{2} \in (1,2)$		
$11*$	$3; \frac{1}{3}$ и γ	$3; \frac{1}{3}$	$3; \frac{1}{3}$ и γ
$13*$			$3; 1$ и $\beta \in (1,2)$
$15*$			$4; 1$ и $\frac{\beta}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$
$17*$			$2; 1$ и $\beta \in (1,2)$
20		$4; 1$	

Табл. 5. Характеристики семейств $\mathcal{H}'_k$

k	N	M	Λ
1	$2, 0, 1$	$0, 0, 1$	$-2, 0, 0, 1, 2$
3	$1, 0, 0$	$0, 0, 0$	$1, 0, 0, 0, 2$
4	$3, 1, 1$	$0, 0, 0$	$-3, 0, -1, 0, 2$
5	$2, -1, 2$	$-2, 1, -2$	$-\frac{5+\varphi_1}{2}, \frac{\varphi_1 - 5}{2}, 0, 4, 2$
7	$-\frac{2}{\alpha}, -1, -\frac{2}{\alpha}$	$-2, -\frac{2}{\alpha} - 1, -2$	$\frac{4}{\alpha} - 1, 0, 2 + \frac{2}{\alpha}, 4, 2$
9	$-\frac{2}{\alpha}, -1, -\frac{2}{\alpha}$	$-2, -\frac{2}{\alpha} - 1, -2$	$\frac{4}{\alpha} - 1, 0, 2 + \frac{2}{\alpha}, 4, 2$
11	$-3, -3, -1$	$-2, -2, 0$	$\frac{1+\varphi_3}{2}, \frac{1-\varphi_3}{2}, 1, 0, 2$
13	$-\frac{2}{\beta}, -\frac{2}{\beta}, -1$	$-2, -2, 1$	$0, \frac{2}{\beta} - 3, 0, 2 - \frac{2}{\beta}, 2$
15	$-\frac{2}{\beta}, -\frac{2}{\beta}, -1$	$-2, -2, \frac{2}{\beta} - 2$	$0, 0, 3 - \frac{2}{\beta}, 5 - \frac{4}{\beta}, 2$
17	$-\frac{2}{\beta}, -\frac{2}{\beta}, -1$	$-2, -2, 3 - \frac{2}{\beta}$	$0, \frac{4}{\beta} - 5, \frac{2}{\beta} - 2, 0, 2$
19	$-1, -1, -1$	$-2, -2, -2$	$\frac{1+\varphi_5}{2}, \frac{1-\varphi_5}{2}, 3, 4, 2$
20	$-1, -1, -1$	$-2, -2, -1$	$1, 0, 3, 4, 2$

Приложение B. Рисунки

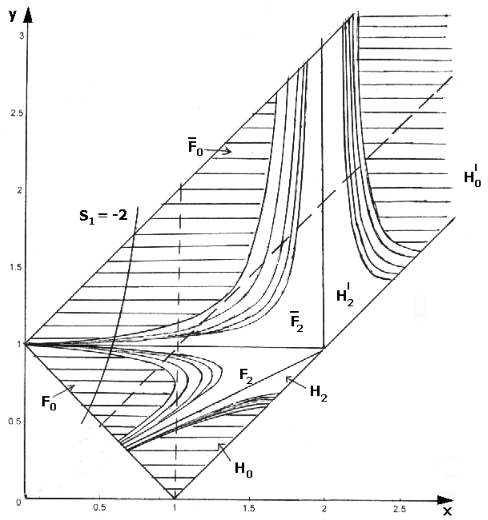

Рис. 1. Множество $\mathbf{D}$.

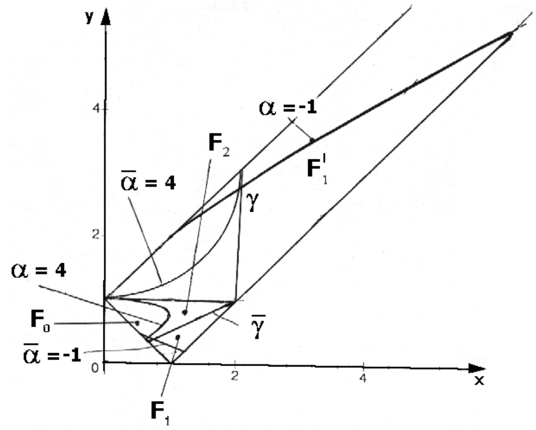

Рис. 2. Части $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_1'$, $\mathbf{F}_2'$ *Множества* $\mathbf{D}$, *отрезки* γ, $\overline{\gamma}$ *и кривые* $\alpha = -1$, $\overline{\alpha} = -1$, $\alpha = 4$, $\overline{\alpha} = 4$.

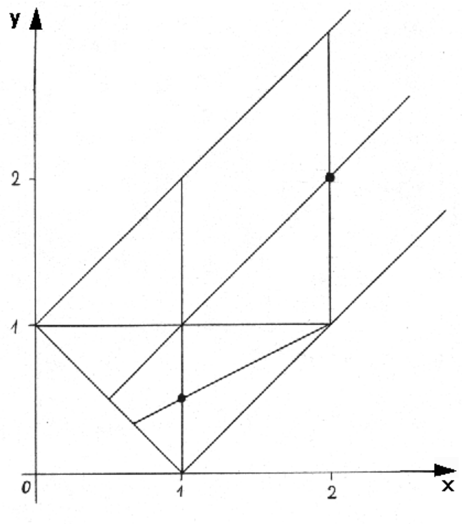

Рис. 3. Отрезки $\gamma(x = 2y)$, $\gamma'(x = 2)$, $x = 1$, $y = 1$, $x = y$ *и точки* $x = y = 2$, $x = 1$, $y = 1/2$ *в множестве* $\mathbf{D}$.

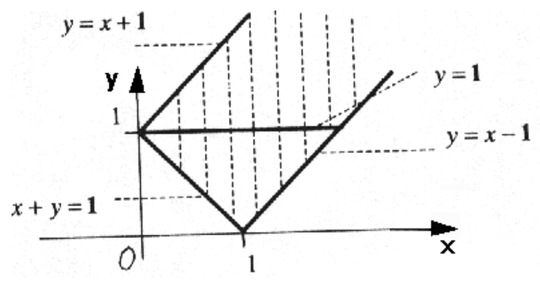

Рис. 4. Разбиение множества $\mathbf{D}$ *на части* $\mathbf{F}_0$, $\overline{\mathbf{F}}_0$, $\mathbf{F}_2$, $\overline{F}_2$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_0'$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_2'$ *и некоторые опасные кривые.*

1. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. – М.: Физматлит, 1998. – 288 с.
2. *Брюно А.Д.* Асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – (Препринт / РАН Ин-т. прикл. математики, N 40). – М., 2002. – 23 с.
3. *Брюно А.Д.* Степенные разложения решений системы алгебраических и дифференциальных уравнений // Докл. РАН. – 2001. – **380**, вып. 3. – С. 298–304.
4. *Kowalewski N.* Eine neue partikulare Losung der Differenzialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Korpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1908. – **65**. – S. 528–537.
5. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* О вычислении степенных разложений модифицированных движений твердого тела // Докл. РАН. – 2002. – **386**, вып. 1. – С. 11–17.
6. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Семейства степенных разложений модифицированных движений твердого тела // Там же. – 2002. – **387**, вып. 3. – С. 297–303.
7. *Брюно А.Д.* Степенные свойства движений твердого тела // Там же. – 2002. – **387**, вып. 6.
8. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Модифицированная система уравнений движения твердого тела. – (Препринт / РАН Ин-т. прикл. математики, N 49). – М., 2001. – 36 с.
9. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Локальные разложения модифицированных движений твердого тела. – (Препринт / РАН Ин-т. прикл. математики, N 73). – М., 2001. – 39 с.
10. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Асимптотические разложения модифицированных движений твердого тела. – (Препринт / РАН Ин-т. прикл. математики, N 90). – М., 2001. – 34 с.
11. *Брюно А.Д., Лунев В.В.* Свойства разложений модифицированных движений твердого тела. – (Препринт / РАН Ин-т. прикл. математики, N 23. – М., 2002. – 44 с.
12. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. – М.: Гостехиздат, 1953. – 287 с.
13. *Аппельрот Г.Г.* По поводу первого параграфа мемуара С.В. Ковалевской // Матем. сборник. – 1892. – **16**, вып. 3. – С. 483–507, 592–596.
14. *Ковалевская С.В.* Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений, определяющей вращение твердого тела около неподвижной точки // Научные работы. – М.; Л.: Из-во АН СССР, 1948. – С. 221–234.
15. *Гашененко И.Н.* О мероморфных решениях уравнений Эйлера–Пуассона // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 1–8.
16. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-ние НГУ, 1965. – 221 с.
17. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 4. – С. 703–707.
18. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. – М.: Наука, 1977. – 328 с.
19. *Брюно А.Д.* Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии. – (Препринт / РАН Ин-т. прикл. математики, N 41). – М., 2002. – 20 с.

Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
bruno@spp.keldysh.ru

Получено 01.12.2002