ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2001. Вып. 31

УДК 531.36:531.38:533.6.013.42

©2001. **Ю.Н. Кононов**

О КОЛЕБАНИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА, СОДЕРЖАЩЕГО ДВУХСЛОЙНУЮ ЖИДКОСТЬ, РАЗДЕЛЕННУЮ УПРУГОЙ МЕМБРАНОЙ

Выведены уравнения малых плоских колебаний физического маятника, имеющего цилиндрическую полость, частично заполненную двумя идеальными несмешивающимися жидкостями с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях стратифицированной жидкости. Получено частотное уравнение и условия устойчивости положения равновесия физического маятника. Обобщены условия устойчивости [1] на случай, когда на свободной и внутренней поверхностях двухслойной стратифицированной жидкости находятся упругие мембраны. Показано, что наличие мембран приводит к увеличению устойчивости, т. е. к стабилизации колебаний физического маятника.

Рассмотрим малые плоские колебания физического маятника, имеющего цилиндрическую полость радиуса a, частично заполненную до глубин h_1 и h_2 двумя идеальными несмешивающимися жидкостями плотности ρ_1 и ρ_2. Пусть на свободной поверхности и на поверхности раздела (внутренней поверхности) стратифицированной жидкости равномерно натянуты гибкие мембраны с растягивающими усилиями T_1 и T_2. Мембраны жестко закреплены по краю и считаются невесомыми. Движение жидкости и мембран будем рассматривать в подвижной системе координат $Oxyz$, жестко связанной с твердым телом и расположенной так, что плоскость Oxy совпадает с плоскостью раздела жидкостей в невозмущенном положении, а ось Oz направлена вдоль оси цилиндра. Движения жидкостей будем считать потенциальными.

В рамках линейной теории задача о колебании двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях может быть сформулирована следующим образом [1-3]

$$\begin{gathered}
\triangle\Phi_i = 0 \qquad \tau_i \quad (i=1,2)\,, \\
\partial\Phi_i/\partial r\big|_{r=a} = 0, \quad \partial\Phi_2/\partial z\big|_{z=-h_2} = 0, \\
\partial\Phi_1/\partial z = \partial W_1/\partial t \qquad z = h_1, \\
T_i \triangle_{x,y} W_i = P_{i-1} - P_i, \;\; W_i\big|_{r=a} = 0 \quad z = \begin{cases} h_1,\, i=1 \\ 0,\, i=2, \end{cases} \\
P_i = -\rho_i \left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} + gz + \left(l_0\ddot\theta + g\theta\right) y + \dot\theta\Psi_{i1} + Q_i(t)\right], \\
\partial\Phi_1/\partial z = \partial\Phi_2/\partial z = \partial W_2/\partial t \qquad z = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь Φ_i и $\mathbf{\Psi}_i$ — потенциал относительной скорости и потенциал Стокса-Жуковского для i - ой жидкости; τ_i — полость, занятая i - ой жидкостью; W_i — прогиб i-ой мембраны; P_i — давление жидкости в τ_i полости ($P_0 = 0$); l_0 — расстояние от оси вращения до начала системы координат $Oxyz$; θ — угол отклонения физического маятника от положения равновесия; $Q_i(t)$ —произвольная функция времени.

Будем искать решение задачи (1) в виде [2]

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}(t)\,e^{k_n z} + B_n(t)\,e^{-k_n z}\right] R_1(k_n r)\sin\phi,\\ \Phi_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}\cosh\, k_n(z+h_2)\,R_1(k_n r)\sin\phi, \end{aligned} \tag{2}$$

$$W_i = \left[A_i(t)\,r + \sum_{n=1}^{\infty} C_{in}(t)\,R_1(k_n r)\right]\sin\phi = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_{in}(t)\,R_1(k_n r)\sin\phi, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} R_1(k_n r) = J_1(k_n r)/J_1(\mu_n),\ \mu_n = k_n a,\ J_1'(\mu_n) = 0,\\ \xi_{in} = \alpha_n A_i + C_{in},\ \alpha_n = 2a/\left(\mu_n^2 - 1\right). \end{gathered}$$

Подставляя соотношения (2)-(3) в (1) и используя ортогональность функций Бесселя $J_1(k_n r)$, получим линейную систему дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций A_{in}, B_n, C_{in}, A_i, θ. Разрешая полученную систему уравнений относительно ξ_{in}, будем иметь

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{1n} + \tilde{\omega}_{1n}^2\xi_{1n} - \frac{\ddot{\xi}_{2n}}{\cosh æ_{1n}} - \frac{k_n^2\omega_{1n}^2 T_1\alpha_n A_1}{g\rho_1} &= -\frac{\omega_{1n}^2\alpha_n}{g}\left[(\Omega_{1n} - h_1)\,\ddot{\theta} + g\theta\right],\\ \ddot{\xi}_{2n} + \tilde{\omega}_{2n}^2\xi_{2n} - \frac{\rho_1\ddot{\xi}_{1n}}{a_n\sinh æ_{1n}} - \frac{k_n^2\omega_{2n}^2 T_2\alpha_n A_2}{g\triangle\rho} &= -\frac{\omega_{2n}^2\alpha_n}{g}\left(b_n\ddot{\theta}/\triangle\rho + g\theta\right), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_{in} = 0,\ i = 1,2. \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \omega_{1n}^2 = gk_n\tanh æ_{1n},\ \omega_{2n}^2 = \triangle\rho g k_n/a_n,\ \triangle\rho = \rho_2 - \rho_1,\ æ_{in} = k_n h_i,\\ \tilde{\omega}_{1n}^2 = \omega_{1n}^2\left(1 + k_n^2\tfrac{T_1}{g}\rho_1\right),\ \tilde{\omega}_{2n}^2 = \omega_{2n}^2\left(1 + k_n^2\tfrac{T_2}{g}\triangle\rho\right),\\ a_n = \rho_1\coth æ_{1n} + \rho_2\coth æ_{2n},\ b_n = \rho_1\Omega_{1n} + \rho_2\Omega_{2n},\\ \Omega_{1n} = \tilde{f}_{1n} - l_0,\ \Omega_{2n} = \tilde{f}_{2n} + l_0,\ \tilde{f}_{in} = \tfrac{2}{k_n}\tanh\tfrac{æ_{in}}{2}. \end{gathered}$$

Для вывода уравнений движения физического маятника воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения системы твердое тело + жидкость [3]

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G} = \mathbf{M}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{G} = (J_0 + J_1 + J_2)\,\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{2}\rho_i\int_{\tau_i}\mathbf{r}\times\mathbf{u}_i d\tau,$$

J_0 и J_i — осевые моменты инерции твердого тела и затвердевшей i-ой жидкости, $\mathbf{u}_i$ — относительная скорость жидкости в τ_i-ой полости, $\mathbf{M}$ — главный момент силы тяжести, $\boldsymbol{\omega}$ —угловая скорость твердого тела.

В проекции на ось вращения уравнение (6) примет вид

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} + k^2\theta = &-\rho_1\sum_{n=1}^{\infty} D_n\left[(\Omega_{1n} - h_1)\,\ddot{\xi}_{1n} + g\xi_{1n}\right] -\\ &-\sum_{n=1}^{\infty} D_n\left(b_n\ddot{\xi}_{2n} + \triangle\rho g\xi_{2n}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$J = J_0 + m_1\left(\tfrac{h_1^2}{3} - l_0 h_1 + l_0^2\right) + m_2\left(\tfrac{h_2^3}{3} + l_0 h_2 + l_0^2\right) +$$
$$+\rho_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_n \left(4\tilde{f}_{1n} - 3h_1\right) + \rho_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_n \left(4\tilde{f}_{2n} - 3h_2\right), \ m_i = \pi a^2 \rho_i h_i,$$
$$k^2 = mg\left(l_0 - z_0\right), \ m = m_0 + m_1 + m_2, \ D_n = \pi a^3/\mu_n^2,$$

J — момент инерции эквивалентного твердого тела, z_0 — аппликата центра тяжести механической системы.

Таким образом, полученная счетная система дифференциальных (4), (7) и линейных (5) уравнений описывают малые плоские колебания физического маятника, содержащего двухслойную жидкость с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях стратифицированной жидкости.

Если i-я мембрана жестко не закреплена по контуру, то уравнение (5) для данного i исключается из рассмотрения и имеет место равенство $A_i = 0$. Если же обе мембраны свободные, то с учетом введенных частот $\tilde{\omega}_{1n}^2$ и $\tilde{\omega}_{2n}^2$ система дифференциальных уравнений (4) и (7) совпадает с уравнениями работы [1] и может быть исследована аналогичным образом.

Представив функции $\xi_{in}(t)$, $A_i(t)$, $\theta(t)$ в виде $\xi_{in}(t) = \xi_{in0}e^{i\omega t}$, $A_i(t) = A_{i0}e^{i\omega t}$, $\theta(t) = \theta_0 e^{i\omega t}$, запишем характеристическое уравнение для системы уравнений (4)-(5) и (7)

$$\begin{gathered} k^2 - \omega^2 J = -\rho_1 g \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_n a_{1n} \left(d_{1n} + T_{2n}\tilde{A}_1 + \omega^2 \tilde{b}_n \tilde{A}_2\right)/(\triangle_n \omega_{1n}^2) - \\ -\triangle\rho g \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_n a_{2n} \left(d_{2n} + T_{1n}\tilde{A}_2 + \omega^2 \tilde{b}_n \tilde{A}_1\right)/(\triangle_n \omega_{2n}^2), \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} a_{1n} = \omega_{1n}^2\left[\omega^2\left(\Omega_{1n} - h_1\right) - g\right]/g, \ a_{2n} = \omega_{2n}^2\left[\tfrac{b_n}{\triangle\rho}\omega^2 - g\right]/g, \\ d_{1n} = \left(\omega^2 - \tilde{\omega}_{2n}^2\right)\tilde{a}_{1n} + \omega^2 \tilde{a}_{2n}/\cosh æ_{1n}, \ \tilde{b}_n = k_n^3/(a_n \cosh æ_{1n}), \\ d_{2n} = \omega^2 \tilde{a}_{1n}\rho_1/(a_n \sinh æ_{1n}) + \left(\omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2\right)\tilde{a}_{2n}, \\ T_{1n} = k_n^3\left(\omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2\right)/a_n, \ T_{2n} = k_n^3\left(\omega^2 - \tilde{\omega}_{2n}^2\right)/(\rho_1 \coth æ_{1n}), \\ \triangle_n = \left(\omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2\right)\left(\omega^2 - \omega_{2n}^2\right) - 2\rho_1\omega^4/(a_n \sinh 2æ_{1n}), \\ \tilde{A}_1 = \tfrac{1}{\triangle}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n d_{1n}/\triangle_n \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_{1n}/\triangle_n - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n d_{2n}/\triangle_n \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{b}_n/\triangle_n\right), \\ \tilde{A}_2 = \tfrac{1}{\triangle}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, d_{2n}/\triangle_n \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_{2n}/\triangle_n - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n d_{1n}/\triangle_n \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{b}_n/\triangle_n\right), \\ \triangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_{1n}/\triangle_n \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_{2n}/\triangle_n - \omega^4\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{b}_n/\triangle_n\right)^2. \end{gathered} \tag{9}$$

Следует отметить, что полюсы правой части характеристического уравнения (8) $\triangle_n = 0$, совпадают с частотами колебания жидкости в неподвижном сосуде с незакрепленными мембранами, а $\triangle = 0$ – с закрепленными мембранами.

Рассмотрим некоторые частные случаи исходной задачи.

1. Пусть мембрана находится только на свободной поверхности двухслойной жидкости. В этом случае граничное условие (5) для $i = 2$ исключается из рассмотрения, в

формулах (9) полагается $T_2 = 0$ и частотное уравнение (8) имеет вид

$$\begin{gathered} k^2 - \omega^2 J = -\rho_1 g \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_n a_{1n} \left(d_{1n} + T_{2n}\tilde{A}_1 \right) / (\triangle_n \omega_{1n}^2) - \\ - \triangle\rho g \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_n a_{2n} \left(d_{2n} + \omega^2 \tilde{b}_n \tilde{A}_1 \right) / (\triangle_n \omega_{2n}^2). \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь

$$\tilde{A}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{d_{1n}}{\triangle_n} / \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{T_{2n}}{\triangle_n}.$$

В случае однородной жидкости ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) частотное уравнение (10) записывается следующим образом

$$k^2 - \omega^2 J = -\frac{\rho}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_n \tilde{a}_n \frac{\omega_n^2}{\triangle_n} \left(k_n^2 \tilde{A}_0 + \tilde{a}_n \right), \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} \omega_n^2 = g k_n \tanh æ_n, \ \tilde{\omega}_n^2 = \omega_n^2 \left(1 + k_n^2 T_1 / g\rho\right), \ æ_n = k_n h, \ h = h_1 + h_2, \\ \triangle_n = \omega^2 - \tilde{\omega}_n^2, \ \tilde{A}_0 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \acute{a}_n \omega_n^2 / \triangle_n \right) / \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n k_n^2 / \triangle_n, \\ \tilde{a}_n = \omega^2 \left(\Omega_n - h\right) - g, \ \Omega_n = f_n + l_0, \ f_n = \tfrac{2}{k_n} \tanh \tfrac{æ_n}{2}, \end{gathered}$$

При отсутствии мембраны на свободной поверхности ($T_1 = 0$) уравнение (10) представляется в виде

$$k^2 - \omega^2 J = \frac{\rho}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_n \frac{\tilde{a}_n^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2}.$$

и совпадает с известным уравнением работы [3].

2. Пусть мембрана находится только на внутренней поверхности, т.е. разделяет двухслойную жидкость. В этом случае граничное условие (5) для $i = 1$ исключается из рассмотрения, в формулах (9) полагается $T_1 = 0$ и частотное уравнение (8) имеет вид

$$\begin{gathered} k^2 - \omega^2 J = -\rho_1 g \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_n a_{1n} \left(d_{1n} + \omega^2 \tilde{b}_n \tilde{A}_2 \right) / (\triangle_n \omega_{1n}^2) - \\ - \triangle\rho g \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_n a_{2n} \left(d_{2n} + T_{1n} \tilde{A}_2 \right) / (\triangle_n \omega_{2n}^2). \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь

$$\tilde{A}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{d_{2n}}{\triangle_n} / \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{T_{1n}}{\triangle_n}.$$

Частотные уравнения (8), (10)-(12) являются довольно сложными уравнениями. Необходимое условие устойчивости положения равновесия физического маятника состоит в требовании действительности всех корней этих уравнений. По аналогии с работой [3] исследование частотного уравнения (8) можно проводить графически. Однако, из-за большого количества параметров в нашем случае это будет затруднительно.

Для исследования устойчивости положения равновесия физического маятника, содержащего двухслойную жидкость с упругими мембранами, запишем потенциальную энергию. Потенциальная энергия системы твердое тело + стратифицированная жидкость + упругие мембраны имеет вид [1,4]

$$\Pi = \tfrac{1}{2}k^2\theta^2 + g\theta \int\limits_S (\rho_1 W_1 + \triangle\rho W_2)\, y\, ds +$$
$$+\tfrac{1}{2}g\int\limits_S \left(\rho_1 W_1^2 + \triangle\rho W_2^2\right) ds + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} T_i \int\limits_S \left[\left(\tfrac{\partial W_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial W_i}{\partial y}\right)^2\right] ds. \tag{13}$$

Подставляя соотношения (3) в (13) и произведя необходимые вычисления, получим

$$\Pi = \frac{1}{2}k^2\theta^2 + g\theta\sum_{n=1}^{\infty} D_n\left(\rho_1\xi_{1n} + \triangle\rho\xi_{2n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_{in}^2 f_{in}. \tag{14}$$

Здесь

$$f_{in} = \pi\left[g\left(\rho_i - \rho_{i-1}\right)d_n + aT_i/\alpha_n\right],\ \rho_0 = 0, d_n = a^2(\mu_n^2 - 1)/(2\mu_n^2).$$

Как и в работе [1] в выражении (14) сделаем замену переменных $\xi_{in} = \tilde{\xi}_{in} + p_{in}\theta$. При $p_{in} = -g\left(\rho_i - \rho_{i-1}\right)D_n/f_{in}$ потенциальная энергия (14) в новых переменных имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}\tilde{k}\theta^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\xi}_{in}^2 f_{in}, \quad \text{где} \quad \tilde{k} = k^2 - g^2\sum_{n=1}^{\infty} D_n^2\left(\frac{\rho_1^2}{f_{1n}} + \frac{\triangle\rho^2}{f_{2n}}\right). \tag{15}$$

Для устойчивости положения равновесия необходимо и достаточно чтобы потенциальная энергия имела изолированный минимум. Квадратичная форма (15) будет положительно определенной при

$$\tilde{k} > 0, \quad f_{1n} > 0, \qquad f_{2n} > 0. \tag{16}$$

Последние два условия в (16) определяют условия устойчивости положения равновесия двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях в неподвижном сосуде. Второе условие в (16) всегда выполнено. Следовательно, условие устойчивости положения равновесия в неподвижном сосуде определяется только величиной натяжения внутренней мембраны и разностью плотностей.

Первое и третье условия соотношений (16) запишем в удобном для исследования виде

$$k^2 > 8g\rho_2 J_s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2\left(\mu_n^2 - 1\right)}d_n, \tag{17}$$

$$1 - \rho_{12} + \beta_2\mu_n^2 > 0 \qquad \beta_2 > \frac{\rho_{12} - 1}{\mu_1^2} = 0.295\left(\rho_{12} - 1\right). \tag{18}$$

Здесь

$$d_n = \rho_{12}/(1 + \beta_1\mu_n^2) + \left(1 - \rho_{12}\right)^2/(1 - \rho_{12} + \beta_2\mu_n^2), \quad \beta_i = T_i/(g\rho_i a^2),$$
$$\rho_{12} = \rho_1/\rho_2, \quad J_S = \pi a^2/4.$$

При отсутствии мембран ($\beta_1 = \beta_2 = 0$) условия (17), (18) имеют вид

$$k^2 > g\rho_2 J_S, \quad \rho_2 > \rho_1 \tag{19}$$

и с точностью до обозначений совпадают с результатами работы [1].Для однородной жидкости ($\rho_1 = \rho_2$) первое неравенство в (19) хорошо известно специалистам по теории корабля, перевозящего жидкие грузы [3].

При получении первого неравенства в (19) была использована формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2\left(\mu_n^2 - 1\right)} = \frac{1}{8},$$

доказательство которой не сложно провести на Maple V.

В случае однородной жидкости ($\rho_1 = \rho_2$) $d_n < 1$ и правая часть неравенства (17) меньше величины $g\rho_2 J_s$. Следовательно, упругая мембрана, находящаяся на свободной поверхности однородной жидкости способствует стабилизации положения равновесия физического маятника. Интересно отметить, что в этом случае условия устойчивости (17)-(18) не зависят от натяжения внутренней мембраны β_2, т.е. введение в однородную жидкость внутренней упругой мембраны не влияет на устойчивость положения равновесия. Под стабилизацией положения равновесия будем считать мероприятия, направленные на выполнение первого условия (19), а именно на уменьшение величины $g\rho_2 J_s$ путем введения в механическую систему упругой безынерционной мембраны, так как в этом случае величина левой части неравенства (19) остается постоянной.

Пусть более тяжелая жидкость находится внизу сосуда ($\rho_2 > \rho_1$). В этом случае неравенство (18) выполнено и

$$\frac{\rho_{12}}{1 + \beta_1 \mu_n^2} < \rho_{12}, \qquad \frac{(1 - \rho_{12})^2}{1 - \rho_{12} + \beta_2 \mu_n^2} < 1 - \rho_{12}$$

откуда следует, что $d_n < 1$.

Таким образом, наличие упругих мембран приводит к уменьшению величины $g\rho_2 J_S$, то есть к увеличению устойчивости физического маятника, содержащего стратифицированную жидкость.

Полученные условия (17)-(18) обобщают известные условия устойчивости [1,3] на случай, когда на свободной и внутренней поверхностях двухслойной жидкости находятся упругие мембраны. Наличие мембран, как правило, приводит к стабилизации положени равновесия физического маятника, то есть к увеличению устойчивости.

1. *Кононов Ю.Н.* Задача о физическом маятнике, содержащем стратифицированную жидкость // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 145–153.
2. *Кононов Ю.Н.* Поперечные колебания цилиндрического сосуда с двухслойной жидкостью, разделенной упругой мембраной // Теор. и прикл. механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 145-151.
3. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
4. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 439 с.

Донецкий нац. ун-т
kononov@univ.donetsk.ua

Получено 27.03.01