ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2001. Вып. 31

УДК 531.35

©2001. **Б.И. Коносевич**

# О ПРИМЕНЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ ПОЛЕТА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СНАРЯДА

При исследовании динамики полета артиллерийского снаряда основное внимание, как правило, уделяют изучению его вращательного движения при помощи асимптотических методов теории нелинейных колебаний (см., например, обзор [1]). В данной статье такие методы применяются ко всей системе дифференциальных уравнений, описывающих движение осесимметричного быстровращающегося снаряда в поле силы тяжести под действием обычно рассматриваемых в баллистике аэродинамических сил и моментов. Получены уравнения поступательного движения снаряда, усредненные по обеим фазам угловых колебаний его оси симметрии, и дана оценка их погрешности по сравнению с исходными уравнениями движения и уравнениями, линеаризованными при малых углах атаки по переменным углового движения. Получены также уравнения движения снаряда, усредненные только по быстрой фазе угловых колебаний, и оценена их погрешность по сравнению с линеаризованными уравнениями. Использование этих двух форм усредненных уравнений движения снаряда позволяет получить большую экономию времени при вычислении его траектории. Кроме того, сама структура этих уравнений и найденные оценки их погрешности позволяют лучше понять механизм влияния колебаний оси симметрии на траекторию полета снаряда.

**1. Уравнения движения снаряда.** Принимая обозначения статьи [2], рассмотрим движение снаряда на отрезке времени $[t_0; t_1]$ от момента выстрела $t_0$ до момента $t_1$ падения снаряда на землю. Действующие на снаряд аэродинамические силы и моменты характеризуются функциями $R_x, R_{y1} = R_y/\sin\delta$, $R_{z1} = R_z/\sin\delta, M_p, M_\Omega, M_{y1} = M_y/\sin\delta, M_{z1} = M_z/\sin\delta$, где $\delta$ — угол атаки. Эти функции зависят от $y, v, \delta$, а $R_{z1}, M_{y1}$ — еще и от $p$. С их помощью формируются коэффициенты уравнений движения снаряда:

$$\begin{aligned} &K_x = \frac{R_x}{m}, \quad K_y = \frac{R_{y1}}{mv}, \quad K_z = \frac{R_{z1}}{mv}, \quad K_p = \frac{M_p}{I_1}, \\ &A_\Omega = \frac{M_\Omega}{I_2}, \quad A_{g0} = \frac{I_1 p}{I_2}, \quad B_y = \frac{M_{y1}}{I_2}, \quad B_z = \frac{M_{z1}}{I_2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Поскольку все функции (1), за исключением $A_{g0}$, четные по $\delta$, то в предположении достаточной гладкости при малых $\delta$ они могут быть представлены разложениями по четным степеням $\delta$ или $\zeta = \sin\delta$. Нулевые члены таких разложений равны

$$\begin{aligned} &K_{x0}, K_{y0}, K_{z0}, K_{p0}, A_{\Omega 0}, B_{y0}, B_{z0}(y, v, p) = \\ &\qquad = \tfrac{1}{m}R_x, \tfrac{1}{mv}R'_y, \tfrac{1}{mv}R'_z, \tfrac{1}{I_1}M_p, \tfrac{1}{I_2}M_\Omega, \tfrac{1}{I_2}M'_y, \tfrac{1}{I_2}M'_z(y, v, p, \delta)\Big|_{\delta=0}, \end{aligned}$$

здесь $K_{y0}, B_{z0}(y, v) > 0$, $K_{x0}, K_{p0}, A_{\Omega 0}(y, v) < 0$, штрихом обозначается производная по $\delta$, совпадающая при $\delta = 0$ с производной по $\zeta$.

В статье [3] в качестве новых масштабов переменных $x, y, z, v, \theta, \psi, p, q, r, \alpha, \beta$ и функций, входящих в уравнения движения снаряда, выбраны характерные числовые значения их модулей, а затем получена система (4), (7) дифференциальных уравнений движения снаряда, которая содержит малый параметр $\varepsilon$, соответствующий числу

$\varepsilon_0 = 0{,}1$. Для новых переменных в этой системе оставлены исходные обозначения. Запишем эту систему, выделяя члены, линейные по переменным $q, r, \alpha, \beta$ и углу $\psi$.

*Уравнения поступательного движения и продольного вращения* имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = \varepsilon^3 v\cos\theta + \varepsilon^7 H_x(v,\theta,\psi,\varepsilon),\\
&\dot{y} = \varepsilon^3 v\sin\theta + \varepsilon^7 H_y(v,\theta,\psi,\varepsilon),\\
&\varepsilon^2\dot{z} = \varepsilon^5 v\psi + \varepsilon^9 H_z(v,\psi,\varepsilon),\\
&\dot{v} = \varepsilon^3 K_{x0}(y,v) - \varepsilon^4 g\sin\theta + \varepsilon^6 H_v(y,v,\theta,\psi,\alpha,\beta,\varepsilon),\\
&\dot{\theta} = -\varepsilon^4\frac{g\cos\theta}{v} + \varepsilon^5[K_{y0}(y,v)\alpha - K_{z0}(y,v,p)\beta] + \varepsilon^7 H_\theta(y,v,\theta,\psi,p,\alpha,\beta,\varepsilon),\\
&\varepsilon^2\dot{\psi} = \varepsilon^6\frac{g}{v}\psi\sin\theta + \varepsilon^5[K_{z0}(y,v,p)\alpha + K_{y0}(y,v)\beta] + \varepsilon^8 H_\psi(y,v,\theta,\psi,p,\alpha,\beta,\varepsilon),\\
&\dot{p} = \varepsilon^4 pK_{p0}(y,v) + \varepsilon^7 H_p(y,v,p,\alpha,\beta,\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Полагаем для краткости $\xi = (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p)$, $\xi^5 = (y, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p)$, $\xi^3 = (y, v, p)$. Тогда уравнения (2) записываются следующим образом

$$
\dot{\xi} = \varepsilon^3 F(\xi,\varepsilon) + \varepsilon^5 F_\alpha(\xi)\alpha + \varepsilon^5 F_\beta(\xi)\beta + \varepsilon^6 H_\xi(y,v,\theta,\psi,\alpha,\beta,\varepsilon). \tag{3}
$$

Конкретный вид вектор-функций $F, F_\alpha, F_\beta$ ясен из сравнения (2) и (3).

*Уравнения углового движения* оси симметрии снаряда после введения в них малого параметра запишем, пользуясь в их линейной части комплексными переменными $\Omega = q + ir$, $\Delta = \alpha + i\beta$:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\Omega} = a(y,v,p,\varepsilon)\Omega + b(y,v,p,\varepsilon)\Delta + h_\Omega(y,v,\theta,\psi,p,q,r,\alpha,\beta,\varepsilon),\\
&\dot{\Delta} = -i\Omega - k(y,v,p,\varepsilon)\Delta + l(v,\theta,\varepsilon^2\psi,\varepsilon) + h_\Delta(y,v,\theta,\psi,p,q,r,\alpha,\beta,\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь $h_\Omega, h_\Delta = O(\varepsilon^4)$, а коэффициенты линейных членов равны

$$
\begin{aligned}
a(y,v,p,\varepsilon) = \varepsilon^2 A_{\Omega 0}(y,v) + iA_{g0}(p),\ b(y,v,p,\varepsilon) = \varepsilon^2 B_{y0}(y,v,p) + iB_{z0}(y,v),\\
k(y,v,p,\varepsilon) = \varepsilon^3 K_{y0}(y,v) + i\varepsilon^3 K_{z0}(y,v,p),\ l(v,\theta,\varepsilon^2\psi,\varepsilon) = \varepsilon L_\alpha(v,\theta,\varepsilon) + i\varepsilon^3 L_\beta(v,\theta,\psi,\varepsilon),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

причем $L_\alpha(v,\theta,\varepsilon) = \varepsilon g v^{-1}\cos\theta$, $L_\beta(v,\theta,\psi,\varepsilon) = -\varepsilon g v^{-1}\psi\sin\theta$.

При всех возможных траекториях полета снаряда вектор $\xi$ лежит в области

$$
\Xi = \{\xi : (0, 0, -\varepsilon^2 C_z^*, \sqrt{\varepsilon}C_{v*}, -C_\theta^*, -\varepsilon^2 C_\psi^*, C_{p*}) \le \xi \le (C_x^*, C_y^*, \varepsilon^2 C_z^*, C_v^*, C_\theta^*, \varepsilon^2 C_\psi^*, C_p^*)\}. \tag{6}
$$

Здесь буквой $C$ с индексами обозначены положительные постоянные порядка 1. Векторы $\xi^5, \xi^3$ принадлежат соответствующим областям $\Xi^5, \Xi^3$.

В дальнейшем символы $O(\varepsilon^n)$ $[O^*(\varepsilon^n)]$ обозначают функции фазовых переменных, времени и параметра $\varepsilon$, которые в рассматриваемой области изменения фазовых переменных и времени имеют при $\varepsilon \to 0$ порядок не ниже $\varepsilon^n$ [равный $\varepsilon^n$]; при этом для положительных функций используются обозначения $O_+(\varepsilon^n)$ $[O_+^*(\varepsilon^n)]$.

В уравнениях (2) и всюду в дальнейшем функции фазовых переменных, времени и параметра $\varepsilon$, обозначаемые заглавными латинскими буквами, равны $O(1)$ при $\xi \in$

$\Xi$, $q, r, \alpha, \beta = O(1)$, $t \in [t_0; t_1]$. Нулевые члены разложений аэродинамических функций (1) по степеням $\zeta$ равны $O(1)$ в $\Xi^3$, все их частные производные первого и второго порядков считаются равными $O(1)$ в $\Xi^3$. Это обозначается следующим образом

$$K_{x0}, K_{y0}, K_{z0}, K_{p0}, A_{\Omega 0}, B_{y0}, B_{z0}\,(y, v, p) = O^2(1), \quad (y, v, p) \in \Xi^3. \tag{7}$$

Величина $v^2$, а вместе с ней и функция $B_{z0}(y, v) > 0$ ограничены снизу значениями порядка $\varepsilon$, которые они могут принимать на среднем участке траектории при больших углах стрельбы. Функция $A_{g0}(p) = Ip$ (где $I$ – число, близкое к 1) принимает только значения порядка 1. Поэтому

$$\varepsilon/v^2 = O(1), \quad O^*_+(\varepsilon) \le B_{z0}(y, v) \le O^*_+(1), \quad A_{g0}(p) = O^*(1). \tag{8}$$

Система (2), (4) рассматривается на отрезке времени $[t_0; t_1]$ длины $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$.

**2. Усредненные уравнения поступательного движения.** Пусть $e_1, d_1(\xi^5, \varepsilon)$ — значения $\Omega$ и $\Delta$, при которых обращаются в нули правые части уравнений (4) с отброшенными $h_\Omega, h_\Delta$:

$$e_1 = bl/(ib - ak), \quad d_1 = -al/(ib - ak). \tag{9}$$

Введем комплексные функции $w^\circ, \lambda^\circ_j = n^\circ_j + i\omega^\circ_j$, зависящие от $\xi^3, \varepsilon$, по формулам

$$w^\circ = (a - k)^2/4 - ib + ak, \quad \lambda^\circ_j = (a - k)/2 \pm \sqrt{w^\circ} \qquad (j = 1, 2). \tag{10}$$

Здесь верхний знак соответствует $j = 1$, а нижний — $j = 2$. Подставив в (9),(10) выражения (5) для $a, b, k, l$ и выделив ведущие члены разложений по степеням $\varepsilon$, устанавливаем, что в области $\Xi^5$, а следовательно, и на траектории полета будет

$$\begin{gathered} k = O(\varepsilon^3),\ e_1 = O(\varepsilon),\ d_1 = O(1),\ w^\circ = O^*(1),\ \omega^\circ_1 - \omega^\circ_2 = O^*(1), \\ n^\circ_j = O(\varepsilon^2),\ \omega^\circ_j = O(1),\ 1/\omega^\circ_j = O(\varepsilon^{-1}),\ \lambda^\circ_j = O(1) \quad (j = 1, 2). \end{gathered} \tag{11}$$

Рассматривая зависимость $\xi(t, \varepsilon)$ как известную, перейдем в линейной части уравнений (4) от переменных $\Omega, \Delta$ к переменным $s_1, s_2$ по формулам

$$\begin{gathered} \Omega = is_1[\lambda^\circ_1(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + k(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)] \exp i\varphi_1(t, \varepsilon) + \\ + is_2[\lambda^\circ_2(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + k(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)] \exp i\varphi_2(t, \varepsilon) + e_1(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon), \\ \Delta = s_1 \exp i\varphi_1(t, \varepsilon) + s_2 \exp i\varphi_2(t, \varepsilon) + d_1(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon), \\ \varphi_j(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t} \omega^\circ_j(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\, d\tau \quad (j = 1, 2). \end{gathered} \tag{12}$$

Тогда уравнения (4) преобразуются к следующим

$$\begin{gathered} \dot s_1 = n^\circ_1 s_1 - \big\{(\dot\lambda^\circ_1 + \dot k)s_1 + (\dot\lambda^\circ_2 + \dot k)s_2 \exp i(\varphi_2 - \varphi_1) - \\ - \big[i(\dot e_1 - h_\Omega) + (\lambda^\circ_2 + k)(\dot d_1 - h_\Delta)\big] \exp(-i\varphi_1)\big\}/2\sqrt{w^\circ}, \\ \dot s_2 = n^\circ_2 s_2 + \big\{(\dot\lambda^\circ_1 + \dot k)s_1 \exp i(\varphi_1 - \varphi_2) + (\dot\lambda^\circ_2 + \dot k)s_2 - \\ - \big[i(\dot e_1 - h_\Omega) + (\lambda^\circ_1 + k)(\dot d_1 - h_\Delta)\big] \exp(-i\varphi_2)\big\}/2\sqrt{w^\circ}. \end{gathered} \tag{13}$$

Аргументы функций здесь для краткости не написаны. Из формул преобразования, обратного к (12), с учетом установленных в [3] равенств $\Omega, \Delta = O(1)$ и оценок (11) находим, что $s_j = O(1)$ $(j = 1, 2)$. В соответствии с (3), при дифференцировании функций $k, \lambda_j^\circ, e_1, d_1(\xi(t,\varepsilon), \varepsilon)$ по $t$ их порядки по $\varepsilon$ повышаются на 3. Поэтому с учетом (11) имеем $\dot{k} = O(\varepsilon^6)$, $\dot{\lambda}_j^\circ = O(\varepsilon^3)$, $\dot{e}_1 = O(\varepsilon^4)$, $\dot{d}_1 = O(\varepsilon^3)$. Следовательно, уравнения (13) могут быть представлены так:

$$\dot{s}_1 = \varepsilon^2 N_1(t,\varepsilon) s_1 + \varepsilon^3 H_{s1}(t,\varepsilon), \quad \dot{s}_2 = \varepsilon^2 N_2(t,\varepsilon) s_2 + \varepsilon^3 H_{s2}(t,\varepsilon). \tag{14}$$

Из выражений (12) для $\varphi_j$ получаем дифференциальные уравнения $\dot{\varphi}_j = \omega_j^\circ$. Вместе с (3),(14) они образуют двухчастотную автономную вращательную систему [4]. Переменные $\xi$ и $s_1, s_2$ в этой системе являются медленно изменяющимися, а переменные $\varphi_1, \varphi_2$ — быстро изменяющимися. При этом формулы (12) показывают, что зависимости переменных $\Omega, \Delta$ от времени представляют собой быстрые двухчастотные колебания относительно медленно изменяющихся значений $e_1, d_1$. Полагая $d_1 = d_{1\alpha} + i d_{1\beta}$, отбросим в уравнениях (3) поступательного движения и продольного вращения члены, нелинейные по $\alpha, \beta, \psi$, а затем заменим $\alpha, \beta$ функциями $d_{1\alpha}, d_{1\beta}(\xi^5, \varepsilon)$. Получим замкнутую систему дифференциальных уравнений, которая в векторной форме имеет вид

$$\dot{\xi} = \varepsilon^3 F(\xi,\varepsilon) + \varepsilon^5 F_\alpha(\xi) d_{1\alpha}(\xi,\varepsilon) + \varepsilon^5 F_\beta(\xi) d_{1\beta}(\xi,\varepsilon). \tag{15}$$

Назовем ее *усредненной* системой уравнений поступательного движения осесимметричного снаряда. Полагая $||\xi|| = \max|\xi_j|$, $j = 1, \ldots, 7$, установим следующую оценку погрешности решения усредненной системы (15) по сравнению с решением полной системы (3),(4) при тех же начальных условиях для $\xi$.

*Пусть* $\xi, \Omega, \Delta(t,\varepsilon)$ *— решение полной системы* (3),(4) *при начальных условиях* $\xi, \Omega, \Delta(t_0,\varepsilon) = O(1)$, *а* $\widetilde{\xi}(t,\varepsilon)$ *— решение усредненной системы* (15) *при начальном условии* $\widetilde{\xi}(t_0,\varepsilon) = \xi(t_0,\varepsilon)$. *Тогда*

$$||\xi(t,\varepsilon) - \widetilde{\xi}(t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_1]. \tag{16}$$

Докажем оценку (16). При подстановке в (3) вместо $\xi, \alpha, \beta$ решения $\xi, \alpha, \beta\,(t,\varepsilon)$ полной системы уравнений (3),(4) получим векторное тождество, причем, согласно (2), переменные $\alpha, \beta\,(t,\varepsilon)$ входят линейно только в его пятую и шестую компоненты. Умножив шестую компоненту на $i$ и сложив с пятой, будем иметь равенство

$$\dot{\theta}(t,\varepsilon) + i\varepsilon^2\dot{\psi}(t,\varepsilon) = \varepsilon^3 \hat{F}(\xi(t,\varepsilon)) + \varepsilon^5 \hat{F}_\Delta(\xi(t,\varepsilon))\Delta(t,\varepsilon) + \varepsilon^7 \hat{H}(t,\varepsilon), \quad t \in [t_0; t_1]. \tag{17}$$

Здесь $\hat{F} = \varepsilon g v^{-1}(-\cos\theta + i\varepsilon^2\psi\sin\theta)$, $\hat{F}_\Delta = K_{y0} + iK_{z0}$. Подставим в (17) выражение (12) для $\Delta$. Вводя обозначения

$$\begin{gathered} h_j(t,\varepsilon) = \varepsilon^5 \int\limits_{t_0}^{t} \hat{F}_\Delta(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon) s_j(\tau,\varepsilon) [\exp \int\limits_{t_0}^{\tau} i\omega_j^\circ(\xi(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau_1]\, d\tau \quad (j = 1, 2), \\ h_3(t,\varepsilon) = \varepsilon^7 \int\limits_{t_0}^{t} \hat{H}(\tau,\varepsilon)\, d\tau, \quad \hat{G}(\xi,\varepsilon) = \hat{F}(\xi) + \varepsilon^2 \hat{F}_\Delta(\xi) d_1(\xi,\varepsilon) \end{gathered} \tag{18}$$

и переходя к интегральной форме записи, получим равенство

$$\begin{gathered}\theta(t,\varepsilon)+i\varepsilon^2\psi(t,\varepsilon)=\theta(t_0,\varepsilon)+i\varepsilon^2\psi(t_0,\varepsilon)+\varepsilon^3\int\limits_{t_0}^{t}\hat{G}(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau+\\ +h_1(t,\varepsilon)+h_2(t,\varepsilon)+h_3(t,\varepsilon),\quad t\in[t_0;t_1].\end{gathered}\tag{19}$$

Так как $\hat{H}=O(1)$, а $t\in[t_0;t_1]$, $t_1-t_0=O(\varepsilon^{-3})$, то $h_3(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^4)$. Покажем, что $h_j=O(\varepsilon^4)$ $(j=1,2)$. Преобразуем выражения (18) для $h_j$ по формуле интегрирования по частям, а при вычислении возникающих после этого под знаком интеграла производных по $\tau$ от $\hat{F}_\Delta(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,s_j(\tau,\varepsilon)\,/\,i\omega_j^\circ(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ заменим $d\xi/d\tau, ds_j/d\tau$ правыми частями уравнений (3),(14). Учитывая, что согласно (7),(11) функции $\hat{F}_\Delta$ и $1/\omega_j^\circ$ вместе со своими частными производными по компонентам $\xi$ соответственно равны $O(1)$ и $O(\varepsilon^{-1})$, а $t_1-t_0=O(\varepsilon^{-3})$, получаем

$$h_j(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^4)-\varepsilon^7\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\hat{F}_\Delta(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)N_j(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)s_j(\tau,\varepsilon)}{i\omega_j^\circ(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}[\exp\int\limits_{t_0}^{\tau}i\omega_j^\circ(\xi(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau_1]\,d\tau.$$

Снова применяем описанную процедуру и пользуемся тем, что $s_j(t,\varepsilon)=O(1)$, а функции $N_j$ равны $O(1)$ вместе с частными производными по компонентам $\xi$. В результате имеем $h_j=O(\varepsilon^4)$, $j=1,2$. Перепишем равенство (19) с учетом найденных оценок для $h_3,h_j$:

$$\theta(t,\varepsilon)+i\varepsilon^2\psi(t,\varepsilon)=\theta(t_0,\varepsilon)+i\varepsilon^2\psi(t_0,\varepsilon)+\varepsilon^3\int\limits_{t_0}^{t}\hat{G}(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau+\varepsilon^4H(t,\varepsilon),\quad t\in[t_0;t_1].\tag{20}$$

В векторном тождестве, которое получается при подстановке $\xi,\alpha,\beta\,(t,\varepsilon)$ в (3), пятая и шестая компоненты являются действительной и мнимой частями комплексного равенства (17), а остальные компоненты содержат $\alpha,\beta\,(t,\varepsilon)$ только в нелинейных членах. Из (20),(2) следует тогда, что это векторное тождество может быть представлено в виде

$$\xi(t,\varepsilon)=\xi(t_0,\varepsilon)+\varepsilon^3\int\limits_{t_0}^{t}G(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau+\varepsilon^3H_\xi(t,\varepsilon),\quad t\in[t_0;t_1],\tag{21}$$

где $\varepsilon^3G(\xi,\varepsilon)$ — правая часть усредненной системы (15).

Кроме области (6), рассмотрим содержащую ее замкнутую область

$$\begin{aligned}\Xi_\varepsilon=\{\xi:(-\varepsilon,-\varepsilon,-1,\sqrt{\varepsilon}(C_{v*}-\varepsilon),-C_\theta^*-\varepsilon,-1,C_{p*}-\varepsilon)\le\xi\le\\ \le(C_x^*+\varepsilon,C_y^*+\varepsilon,1,C_v^*+\varepsilon,C_\theta^*+\varepsilon,1,C_p^*+\varepsilon)\},\end{aligned}\tag{22}$$

Так как $\xi(t,\varepsilon)\in\Xi\subset\Xi_\varepsilon$ для всех $t\in[t_0;t_1]$, а $\widetilde{\xi}(t_0;\varepsilon)=\xi(t_0;\varepsilon)$, то существует момент времени $\widetilde{t}_1$ такой, что $\widetilde{\xi}(t,\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon$ для всех $t$ из промежутка $[t_0;\widetilde{t}_1]$. Функция $G(\xi,\varepsilon)$ удовлетворяет в области $\Xi_\varepsilon$ условию Липшица $||G(\xi,\varepsilon)-G(\widetilde{\xi},\varepsilon)||\le L||\xi-\widetilde{\xi}||$ с постоянной $L>0$ порядка 1. Следовательно, на промежутке $[t_0;\widetilde{t}_1]$ это условие выполнено для векторов $\xi=\xi(t,\varepsilon),\widetilde{\xi}=\widetilde{\xi}(t,\varepsilon)$.

Для решения $\widetilde{\xi}(t,\varepsilon)$ системы (15) справедливо интегральное соотношение

$$\widetilde{\xi}(t,\varepsilon) = \xi(t_0,\varepsilon) + \varepsilon^3 \int\limits_{t_0}^{t} G(\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau, \quad t \in [t_0; t_1]. \tag{23}$$

Из (21),(23) следует тогда, что на промежутке $[t_0; \widetilde{t}_1]$, имеет место неравенство

$$||\xi(t,\varepsilon) - \widetilde{\xi}(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon^3 L \int\limits_{t_0}^{t} ||\xi(\tau,\varepsilon) - \widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau + \varepsilon^3 C, \quad t \in [t_0; t_1],$$

в котором $C > 0$ — постоянная. Воспользовавшись леммой Гронуолла (см. [5]), получаем на этом промежутке искомую оценку (16): $||\xi(t,\varepsilon) - \widetilde{\xi}(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon^3 C \exp \varepsilon^3 L(t-t_0) = O(\varepsilon^3)$.

Покажем, что такая оценка выполнена на всем промежутке $[t_0; t_1]$, то есть можно положить $\widetilde{t}_1 = t_1$. Для этого достаточно установить, что $\widetilde{\xi}(t,\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ при всех $t \in [t_0; t_1]$. Если допустить противное, то вектор $\widetilde{\xi}(\widetilde{t}_1,\varepsilon)$ принадлежит границе области $\Xi_\varepsilon$, то есть для какой-то из его компонет $\widetilde{\xi}_j$ одно из условий в (22) выполняется со знаком равенства. Учитывая, что $\xi(\widetilde{t}_1,\varepsilon) \in \Xi$, получим отсюда неравенство $|\xi_j - \widetilde{\xi}_j| > O_+(\varepsilon^3)$. Но это невозможно, так как в момент $\widetilde{t}_1$ соотношение (16) еще выполняется.

Оценке (16) соответствуют определенные числовые оценки погрешностей усредненной системы для исходных переменных. Чтобы получить их из (16), достаточно учесть, что малый параметр $\varepsilon$ вводился вместо числа $\varepsilon_0 = 0{,}1$, а в качестве масштабов для новых переменных $x, y, z, v, \theta, \psi, p, q, r, \alpha, \beta$ взяты верхние характерные значения модулей соответствующих исходных переменных, указанные в таблице, приведенной в [3]. В частности, для координат центра масс $x, y, z$ эти оценки устанавливают погрешность порядка 10 м.

**3. Линеаризованные уравнения движения снаряда. Приближенное решение уравнений углового движения.** В теоретических работах по баллистике и в практических расчетах часто используют систему уравнений движения снаряда, линеаризованную по переменным углового движения $q, r, \alpha, \beta$ и по переменной $\psi$. Ввиду своего широкого применения линеаризованная система представляет интерес как самостоятельный объект исследования. Ниже приведены некоторые результаты, относящиеся к применению асимптотических методов малого параметра к такой системе.

Линеаризованная система уравнений движения снаряда получается из системы (3), (4) путем отбрасывания дополнительных членов:

$$\dot{\xi} = \varepsilon^3 F(\xi,\varepsilon) + \varepsilon^5 F_\alpha(\xi)\alpha + \varepsilon^5 F_\beta(\xi)\beta, \tag{24}$$

$$\dot{\Omega} = a(y,v,p,\varepsilon)\Omega + b(y,v,p,\varepsilon)\Delta, \quad \dot{\Delta} = -i\Omega - k(y,v,p,\varepsilon)\Delta + l(v,\theta,\varepsilon^2\psi,\varepsilon). \tag{25}$$

В соответствии с (5),(8), имеем $a/b = O(\varepsilon^{-1})$, и тогда из (7), (9) следует, что

$$e_1(\xi^5,\varepsilon) = \varepsilon E_1(\xi^5,\varepsilon), \quad d_1(\xi^5,\varepsilon) = D_1(\xi^5,\varepsilon), \qquad E_1, D_1(\xi^5,\varepsilon) = O^2(1). \tag{26}$$

При известной зависимости $\xi(t,\varepsilon)$ выражения $\Omega = e_1(\xi^5,\varepsilon), \Delta = d_1(\xi^5,\varepsilon)$ представляют приближенное частное решение неоднородной системы (25). Уточненное частное решение системы (25) имеет вид $\Omega = e_1 + e_2$, $\Delta = d_1 + d_2$, где функции $e_2, d_2(\xi^5, \varepsilon)$ выражаются формулами

$$e_2 = -\frac{\widetilde{\dot{e}_1}k + \widetilde{\dot{d}_1}b}{ib - ak} = O(\varepsilon^3), \quad d_2 = \frac{i\widetilde{\dot{e}_1} + \widetilde{\dot{d}_1}a}{ib - ak} = O(\varepsilon^2). \tag{27}$$

Здесь $\widetilde{\dot{e}_1}, \widetilde{\dot{d}_1}(\xi^5, \varepsilon)$ — это приближенные выражения $\dot{e}_1, \dot{d}_1(\xi^5, \alpha, \beta, \varepsilon)$, вычисленные в соответствии с системой (24), в которой отброшены члены с $\alpha, \beta$:

$$\widetilde{\dot{e}_1}(\xi^5, \varepsilon) = \varepsilon^4 \frac{\partial E_1(\xi^5, \varepsilon)}{\partial \xi} F(\xi^5, \varepsilon), \quad \widetilde{\dot{d}_1}(\xi^5, \varepsilon) = \varepsilon^3 \frac{\partial D_1(\xi^5, \varepsilon)}{\partial \xi} F(\xi^5, \varepsilon), \tag{28}$$

$$\dot{e}_1 - \widetilde{\dot{e}_1} = O(\varepsilon^6), \quad \dot{d}_1 - \widetilde{\dot{d}_1} = O(\varepsilon^5). \tag{29}$$

Пусть функции $w, \lambda_j = n_j + i\omega_j$, зависящие от $\xi^3, \varepsilon$, и функции $\lambda_j^+$, зависящие от $\xi^5, \varepsilon$, определены формулами

$$w = \frac{(a-k)^2}{4} - ib + ak - \frac{a_0^1}{2}, \quad \lambda_j = \frac{a-k}{2} \pm \sqrt{w}, \quad \lambda_j^+ = \lambda_j - \frac{\dot{w}}{4w} \qquad (j = 1, 2), \tag{30}$$

причем верхний знак соответствует $j = 1$, а нижний — $j = 2$. Через $a_0^1$ обозначен главный член в выражении $\dot{a}(\xi^5, \varepsilon) = a_0^1(\xi^3, \varepsilon) + a_1^1(\xi^5, \varepsilon)$ производной функции $a(\xi^3, \varepsilon)$ по $t$, взятой в соответствии с уравнениями (24): $a_0^1(\xi^3, \varepsilon) = i\varepsilon^4 A_{g0}(p) K_{p0}(y, v)$, $a_1^1 = O(\varepsilon^5)$. Подставив это выражение $a_0^1$ вместе с выражениями (5) для $a, b, k$ в (30) и выделив главные члены разложений по степеням $\varepsilon$, устанавливаем с учетом условия гироскопической устойчивости $1 - 4B_{z0}/A_{g0}^2 > 0$ и соотношений (8), что

$$\begin{gathered} w, \lambda_1, \omega_1, \omega_1 - \omega_2 = O^*(1), \quad O_+^*(\varepsilon) \le |\lambda_2| \le O_+^*(1), \quad O_+^*(\varepsilon) \le |\omega_2| \le O_+^*(1), \\ n_1, n_2 = O(\varepsilon^2), \quad 1/\lambda_1, 1/\omega_1 = O^2(1), \quad 1/\lambda_2, 1/\omega_2 = O^2(\varepsilon^{-1}). \end{gathered} \tag{31}$$

Предположим, что на отрезке $[t_0; t_1]$ выполняются неравенства $n_1, n_2 \le O_+(\varepsilon^4)$. Поскольку $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, то тогда

$$\left| \exp \int_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau, \varepsilon)\, d\tau \right| = 1 + O_+(\varepsilon), \quad j = 1, 2. \tag{32}$$

Можно показать [3], что при выполнении неравенств $n_1, n_2 \le O_+(\varepsilon^4)$, условий гироскопической устойчивости и предположений, сделанных при введении в уравнения движения снаряда малого параметра, будет $\Omega, \Delta(t, \varepsilon) = O(1)$, $t \in [t_0; t_1]$.

Рассматривая зависимость $\xi(t, \varepsilon)$ как известную, определим теперь приближенное решение системы (25) формулами

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}(t, \varepsilon) &= i\widetilde{s}_{1\xi}(t, \varepsilon)[\lambda_1^+(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + k(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)] \exp i\varphi_{1\xi}(t, \varepsilon) + \\ &\quad + i\widetilde{s}_{2\xi}(t, \varepsilon)[\lambda_2^+(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + k(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)] \exp i\varphi_{2\xi}(t, \varepsilon) + e_1(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + e_2(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon), \\ \widetilde{\Delta}(t, \varepsilon) &= \widetilde{s}_{1\xi}(t, \varepsilon) \exp i\varphi_{1\xi}(t, \varepsilon) + \widetilde{s}_{2\xi}(t, \varepsilon) \exp i\varphi_{2\xi}(t, \varepsilon) + d_1(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + d_2(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$\widetilde{s}_{j\xi}(t,\varepsilon) = C_j \exp \int\limits_{t_0}^{t} \Big[n_j(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - \frac{\dot{w}(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{4w(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}\Big]\, d\tau = C_j \frac{w^{1/4}(\xi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)}{w^{1/4}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)} \exp \nu_{j\xi}(t,\varepsilon),$$

$$\nu_{j\xi}(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} n_j(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau, \quad \varphi_{j\xi}(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} \omega_j(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\, d\tau \quad (j=1,2). \tag{34}$$

Комплексные постоянные $C_j = \widetilde{s}_{j\xi}(t_0,\varepsilon)$, $j=1,2$, определяются из условий $\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Delta}(t_0,\varepsilon) = \Omega, \Delta(t_0,\varepsilon)$. Решение (33), (34) аналогично решению, изучавшемуся в [6]. Более подробно процедура его построения дана в [7].

*Пусть в уравнениях* (25) *вместо* $\Omega, \Delta$ *введены переменные* $s_{1\xi}, s_{2\xi}$ *по формулам*

$$\begin{aligned} \Omega &= i s_{1\xi}[\lambda_1^+(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + k(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)] \exp i\varphi_{1\xi}(t,\varepsilon) + \\ &\quad + i s_{2\xi}[\lambda_2^+(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + k(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)] \exp i\varphi_{2\xi}(t,\varepsilon) + e_1(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + e_2(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon), \\ \Delta &= s_{1\xi} \exp i\varphi_{1\xi}(t,\varepsilon) + s_{2\xi} \exp i\varphi_{2\xi}(t,\varepsilon) + d_1(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) + d_2(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon), \end{aligned} \tag{35}$$

*и пусть* $\widetilde{s}_{1\xi}, \widetilde{s}_{2\xi}$ *определены формулами* (34). *Тогда*

$$s_{j\xi}(t,\varepsilon) - \widetilde{s}_{j\xi}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad j=1,2, \quad t \in [t_0; t_1], \tag{36}$$

$$\dot{s}_{j\xi}(t,\varepsilon) - \dot{\widetilde{s}}_{j\xi}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^4), \quad j=1,2, \quad t \in [t_0; t_1]. \tag{37}$$

Действительно, $s_{1\xi}, s_{2\xi}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{s}_{1\xi} &= (n_1 - \frac{\dot{w}}{4w}) s_{1\xi} + \rho[s_{1\xi} + s_{2\xi} \exp i(\varphi_{2\xi} - \varphi_{1\xi})] - \\ &\qquad - \frac{1}{2w^{1/2}}[i h_e + (\lambda_2^+ + k) h_d] \exp(-i\varphi_{1\xi}), \\ \dot{s}_{2\xi} &= (n_2 - \frac{\dot{w}}{4w}) s_{2\xi} - \rho[s_{1\xi} \exp i(\varphi_{1\xi} - \varphi_{2\xi}) + s_{2\xi}] + \\ &\qquad + \frac{1}{2w^{1/2}}[i h_e + (\lambda_1^+ + k) h_d] \exp(-i\varphi_{2\xi}), \end{aligned} \tag{38}$$

которая выводится из (25),(35). Здесь функции $\rho, h_e, h_d(\xi^5, \alpha, \beta, \varepsilon)$ равны

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{8w^{1/2}} \left( \frac{\ddot{w}}{w} - \frac{5\dot{w}^2}{4w^2} - \frac{a_1^1 + \dot{k}}{2} \right) = O(\varepsilon^5), \\ h_e &= \dot{\widetilde{e}}_1 - \dot{e}_1 - \dot{e}_2 = O(\varepsilon^6), \quad h_d = \dot{\widetilde{d}}_1 - \dot{d}_1 - \dot{d}_2 = O(\varepsilon^5). \end{aligned} \tag{39}$$

Аргументы функций в (38) для краткости не написаны: $\rho, h_e, h_d$ зависят от $t, \varepsilon$ посредством $\xi^5, \alpha, \beta$, выражения $n_j - \dot{w}/4w$, $\lambda_{3-j}^+ + k$ и $w$ зависят от $t, \varepsilon$ посредством $\xi^5$ и $\xi^3$. Так как $e_1 + e_2 = O(\varepsilon)$, $d_1 + d_2 = O(1)$ согласно (26),(27), а $\Omega, \Delta = O(1)$, то, разрешив формулы замены (35) относительно $s_{1\xi}, s_{2\xi}$, с учетом (31) будем иметь $s_{1\xi}, s_{2\xi} = O(1)$. Тогда, принимая во внимание оценки, указанные в (39), дифференциальные уравнения (38) можно записать в виде

$$\dot{s}_{j\xi} = (n_j - \dot{w}/4w) s_{j\xi} + O(\varepsilon^5), \quad j=1,2. \tag{40}$$

Умножим обе части уравнений (40) на $\exp\int_{t_0}^{t} -(n_j - \dot{w}/4w)\, d\tau_1$ и проинтегрируем в пределах от $t_0$ до $t$. Пользуясь соотношением $t - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ и вытекающими из (32) равенствами

$$\exp\int_{\tau}^{t} (n_j - \dot{w}/4w)\, d\tau_1 = \frac{w^{1/4}(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{w^{1/4}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)} \exp\int_{\tau}^{t} n_j\, d\tau_1 = O(1), \qquad (41)$$
$$t_0 \le \tau \le t \le t_1, \quad j = 1, 2,$$

получаем искомые оценки (36). Учитывая, что $n_{j\xi} = O(\varepsilon^2)$, $\dot{w}/4w = O(\varepsilon^3)$, в правых частях (40) полагаем $s_{j\xi} = \widetilde{s}_{j\xi} + O(\varepsilon^2)$. Из полученных равенств вычитаем равенства $\dot{\widetilde{s}}_{j\xi} = (n_j - \dot{w}/4w)\widetilde{s}_{j\xi}$, которые следуют из (34), и приходим к оценкам (37).

Из (33),(35),(36) заключаем, что на отрезке $[t_0; t_1]$ имеет место следующая оценка погрешности приближенного решения $\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Delta}$ системы (25) по сравнению с точным решением $\Omega, \Delta$ этой системы: $\Omega - \widetilde{\Omega} = O(\varepsilon^2)$, $\Delta - \widetilde{\Delta} = O(\varepsilon^2)$. В [7] показано, что эта оценка будет выполняться вместе с (36) и в том случае, когда в определении (33) приближенного решения $\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Delta}$ не учитываются $e_2, d_2$. Но вместо (37) тогда будет $\dot{s}_{j\xi} - \dot{\widetilde{s}}_{j\xi} = O(\varepsilon^3)$.

**4. Частично усредненные уравнения движения снаряда.** Усредненная система (15) получается из системы (24), если заменить в ней переменные $\alpha, \beta$ выражениями $d_{1\alpha} = \operatorname{Re} d_1, d_{1\beta} = \operatorname{Im} d_1$, где функция $d_1(\xi^5, \varepsilon)$ определена в (19). Если решение усредненной системы (15) сравнивать не с решением исходной системы (3),(4), а с решением линеаризованной системы (24), (25), то оценка (16) улучшается на один порядок по $\varepsilon$.

*Пусть* $\xi, \Omega, \Delta(t, \varepsilon)$ *— решение линеаризованной системы* (24), (25) *при начальных условиях* $\xi, \Omega, \Delta(t_0, \varepsilon) = O(1)$, *а* $\widetilde{\xi}(t, \varepsilon)$ *— решение усредненной системы* (15) *при начальном условии* $\widetilde{\xi}(t_0, \varepsilon) = \xi(t_0, \varepsilon)$. *Тогда имеет место оценка*

$$||\xi(t,\varepsilon) - \widetilde{\xi}(t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^4), \quad t \in [t_0; t_1].$$

Это следует из доказательства оценки (16), если учесть, что в данном случае $\hat{H} = 0, H_\xi = 0$ в (17),(21).

Для частот $\omega_1, \omega_2$ угловых колебаний оси симметрии снаряда справедливы соотношения (31). Они показывают, что частота $\omega_1$ принимает только значения порядка 1, в то время как $|\omega_2|$ принимает значения в диапазоне от $O_+(\varepsilon)$ до $O_+(1)$. Учитывая это, подставим в уравнения (24) поступательного движения и продольного вращения выражения $\alpha, \beta$, соответствующие второй формуле (33), и усредним полученные уравнения по фазе $\varphi_{1\xi}$, соответствующей большей частоте $\omega_1$, а вместо $s_{2\xi}$ при этом возьмем приближенное выражение $\widetilde{s}_{2\xi}$, определенное в (34). Усреднение по $\varphi_{1\xi}$ здесь означает, что отбрасываются члены, содержащие $\varphi_{1\xi}$. Полученная таким образом *частично усредненная* система уравнений движения снаряда имеет следующий вид

$$\begin{aligned} &\dot{\xi} = \varepsilon^3 F(\xi,\varepsilon) + \varepsilon^5 F_\alpha(\xi)\widetilde{\widetilde{\alpha}}(\xi,c,s,e,\varepsilon) + \varepsilon^5 F_\beta(\xi)\widetilde{\widetilde{\beta}}(\xi,c,s,e,\varepsilon), \\ &\dot{c} = -\omega_2(\xi,\varepsilon)s, \quad \dot{s} = \omega_2(\xi,\varepsilon)c, \quad \dot{e} = n_2(\xi,\varepsilon)e. \end{aligned} \qquad (42)$$

Здесь функции $\widetilde{\widetilde{\alpha}}, \widetilde{\widetilde{\beta}}(\xi, c, s, e, \varepsilon)$ определены соотношением

$$\widetilde{\widetilde{\alpha}} + i\widetilde{\widetilde{\beta}} = C_2 \frac{w^{1/4}(\xi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)}{w^{1/4}(\xi,\varepsilon)} e(c + is) + d_1(\xi,\varepsilon) + d_2(\xi,\varepsilon). \qquad (43)$$

Переменные $c, s, e$ в (42) удовлетворяют начальным условиям $c, e(t_0,\varepsilon) = 1, s(t_0,\varepsilon) = 0$, и следовательно,

$$c(t,\varepsilon) = \cos\int\limits_{t_0}^{t} \omega_2(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau,\ s(t,\varepsilon) =$$

$$= \sin\int\limits_{t_0}^{t} \omega_2(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau,\ e(t,\varepsilon) = \exp\int\limits_{t_0}^{t} n_2(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,d\tau.$$

Комплексная постоянная $C_2$ определяется вместе с $C_1$ как указано выше в п. 3. Таким образом, правая часть (43) — это выражение (33) для $\widetilde{\Delta}(t,\varepsilon)$, в котором отброшено первое слагаемое $\widetilde{s}_{1\xi}\exp i\varphi_{1\xi}$.

*Пусть* $\xi, \Omega, \Delta(t,\varepsilon)$ *— решение полной линеаризованной системы* (24), (25), *и пусть* $\widetilde{\xi}, c, s, e(t,\varepsilon)$ *— соответствующее решение частично усредненной системы* (42) *при* $\widetilde{\xi}(t_0,\varepsilon) = \xi(t_0,\varepsilon)$. *Для* $\widetilde{\xi}(t,\varepsilon)$ *справедлива оценка погрешности*

$$||\xi(t,\varepsilon) - \widetilde{\xi}(t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^5), \quad t \in [t_0; t_1]. \tag{44}$$

Докажем эту оценку. При подстановке в (24) вместо $\xi, \alpha, \beta$ решения системы (24), (25) получим тождество по $t$. Умножим шестую компоненту этого тождества на $i$ и сложим с пятой, а затем подставим вместо $\Delta$ правую часть второй формулы замены (35) и проинтегрируем обе части тождества в пределах от $t_0$ до $t$. Вводя обозначения

$$\hat{G}(\xi,\varepsilon) = \hat{F}(\xi) + \varepsilon^2\hat{F}_\Delta(\xi)\big(d_1(\xi,\varepsilon) + d_2(\xi,\varepsilon)\big), \quad \hat{\Phi}_\Delta(\xi,\varepsilon) = \frac{\hat{F}_\Delta(\xi)w^{1/4}(\xi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)}{w^{1/4}(\xi,\varepsilon)},$$

получим интегральное тождество

$$\theta(t,\varepsilon) + i\varepsilon^2\psi(t,\varepsilon) = \theta(t_0,\varepsilon) + i\varepsilon^2\psi(t_0,\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{t}\Big\{\varepsilon^3\hat{G}(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon^5\hat{\Phi}_\Delta(\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)C_2\Big[\exp\int\limits_{t_0}^{\tau}\big(n_2(\xi(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon) + i\omega_2(\xi(\tau_1,\varepsilon),\varepsilon)\big)\,d\tau_1\Big]\Big\}\,d\tau + h_1(t,\varepsilon) + h_2(t,\varepsilon), \tag{45}$$

где

$$h_1(t,\varepsilon) = \varepsilon^5\int\limits_{t_0}^{t}\hat{F}_\Delta(\xi(\tau,\varepsilon))s_{1\xi}(\tau,\varepsilon)\exp i\varphi_{1\xi}(\tau,\varepsilon)\,d\tau,$$

$$h_2(t,\varepsilon) = \varepsilon^5\int\limits_{t_0}^{t}\hat{F}_\Delta(\xi(\tau,\varepsilon))[s_{2\xi}(\tau,\varepsilon) - \widetilde{s}_{2\xi}(\tau,\varepsilon)]\exp i\varphi_{2\xi}(\tau,\varepsilon)\,d\tau.$$

В предыдущем параграфе при оценке такого же интеграла $h_1$ использовались соотношения $1/\omega_1, 1/\omega_2 = O(\varepsilon^{-1})$, тогда как $1/\omega_1 = O(1)$ согласно (31). Поэтому $h_1 = O(\varepsilon^5)$. Для интеграла $h_2$, пользуясь формулой интегрирования по частям и оценками (36),(37), имеем $h_2 = O(\varepsilon^5)$. Записав для частично усредненной системы (42) тождество, аналогичное (45), и вычтя его из (45), с учетом найденных оценок для $h_1, h_2$ получим

$$\theta(t,\varepsilon) - \widetilde{\theta}(t,\varepsilon) + i\varepsilon^2[\psi(t,\varepsilon) - \widetilde{\psi}(t,\varepsilon)] = h_3(t,\varepsilon) + h_4(t,\varepsilon) + h_5(t,\varepsilon) + \varepsilon^5 H(t,\varepsilon). \qquad (46)$$

Здесь $\varepsilon^5 H = h_1 + h_2$,

$$h_3(t,\varepsilon) = \varepsilon^3 \int\limits_{t_0}^{t} [\hat{G}(\xi(\tau,\varepsilon)) - \hat{G}(\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon))]\, d\tau,$$

$$h_4(t,\varepsilon) = \varepsilon^5 C_2 \int\limits_{t_0}^{t} [\hat{\Phi}_\Delta(\xi(\tau,\varepsilon)) - \hat{\Phi}_\Delta(\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon))] \exp[\nu_{2\xi}(\tau,\varepsilon) + i\varphi_{2\xi}(\tau,\varepsilon)]\, d\tau, \qquad (47)$$

$$h_5(t,\varepsilon) = \varepsilon^5 C_2 \int\limits_{t_0}^{t} \hat{\Phi}_\Delta(\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon)) \left\{\exp[\nu_{2\xi}(\tau,\varepsilon) + i\varphi_{2\xi}(\tau,\varepsilon)] - \exp[\nu_{2\widetilde{\xi}}(\tau,\varepsilon) + i\varphi_{2\widetilde{\xi}}(\tau,\varepsilon)]\right\} d\tau,$$

функции $\nu_{2\widetilde{\xi}}, \varphi_{2\widetilde{\xi}}$ определены так же, как $\nu_{2\xi}, \varphi_{2\xi}$ в (34), но вместо $\xi$ взято $\widetilde{\xi}$.

В области $\Xi_\varepsilon$, определенной в (22), функции $\hat{G}, \hat{\Phi}_\Delta, \lambda_2 = n_2 + i\omega_2$ удовлетворяют условиям Липшица по $\xi$ с постоянными $L_{\hat{G}}, L_{\hat{\Phi}_\Delta}, L_{\lambda_2}, L_{n_2}, L_{\omega_2}$ порядка 1. Это позволяет сразу получить для $h_3, h_4$ неравенства вида

$$|h_3(t,\varepsilon)| \le \varepsilon^3 L_{h_3} \int\limits_{t_0}^{t} ||\xi(\tau,\varepsilon) - \widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon)||\, d\tau, \quad |h_4(t,\varepsilon)| \le \varepsilon^5 L_{h_4} \int\limits_{t_0}^{t} ||\xi(\tau,\varepsilon) - \widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon)||\, d\tau, \quad (48)$$

причем для оценки экспоненты в выражении $h_4$ необходимо воспользоваться соотношением (32). Неравенства (48) выполняются до тех пор, пока $\widetilde{\xi}(t,\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$.

Чтобы получить аналогичное неравенство для интеграла $h_5$, запишем его выражение (47) в виде $h_5 = h_{51} + h_{52}$, где

$$h_{51}(t,\varepsilon) = \varepsilon^5 C_2 \int\limits_{t_0}^{t} \hat{\Phi}_\Delta(\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) \exp \nu_{2\xi}(\tau,\varepsilon) \left[\exp i\varphi_{2\xi}(\tau,\varepsilon) - \exp i\varphi_{2\widetilde{\xi}}(\tau,\varepsilon)\right] d\tau,$$

$$h_{52}(t,\varepsilon) = \varepsilon^5 C_2 \int\limits_{t_0}^{t} \hat{\Phi}_\Delta(\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) \left[\exp \nu_{2\xi}(\tau,\varepsilon) - \exp \nu_{2\widetilde{\xi}}(\tau,\varepsilon)\right] \exp i\varphi_{2\widetilde{\xi}}(\tau,\varepsilon)\, d\tau.$$

В формуле, определяющей $h_{51}$, выражение в квадратных скобках может быть представлено следующим образом $\exp i\varphi_{2\xi} - \exp i\varphi_{2\widetilde{\xi}} = 2i \sin \frac{1}{2}(\varphi_{2\xi} - \varphi_{2\widetilde{\xi}}) \exp \frac{i}{2}(\varphi_{2\xi} + \varphi_{2\widetilde{\xi}})$. Преобразуем выражение $h_{51}$ по формуле интегрирования по частям $\int u\, dv = uv - \int v\, du$, $dv = d(\exp \frac{i}{2}(\varphi_{2\xi} + \varphi_{2\widetilde{\xi}}))$, и оценим $|h_{51}|$, пользуясь тем, что $\hat{\Phi}_\Delta, \exp \nu_{2\xi} = O(1)$, $\dot{\nu}_{2\xi} = O(\varepsilon^2)$, $1/|\omega_{2\xi} + \omega_{2\widetilde{\xi}}| = O(\varepsilon^{-1})$, $|\sin \frac{1}{2}(\varphi_{2\xi}(\tau,\varepsilon) - \varphi_{2\widetilde{\xi}}(\tau,\varepsilon))| \le \frac{1}{2} L_{\omega_2} \int\limits_{t_0}^{\tau} ||\xi(\tau_1,\varepsilon) - \widetilde{\xi}(\tau_1,\varepsilon)||\, d\tau_1$. Чтобы оценить возникающий при этом двойной интеграл, воспользуемся формулой для последовательных первообразных ( [8], формула (IV.9.41) ). Так как $t_1 - t_0 = \varepsilon^{-3}T$, то с помощью этой формулы получим

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau} ||\xi(\tau_1,\varepsilon)-\widetilde{\xi}(\tau_1,\varepsilon)||\,d\tau_1 \le \int\limits_{t_0}^{t}(t-\tau)\,||\xi(\tau,\varepsilon)-\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau \le \varepsilon^{-3}T\int\limits_{t_0}^{t}||\xi(\tau,\varepsilon)-\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau.$$

В результате будем иметь для $|h_{51}|$ оценку

$$|h_{51}(t,\varepsilon)| \le \varepsilon^3 L_{h_{51}}\int\limits_{t_0}^{t}||\xi(\tau,\varepsilon)-\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau. \tag{49}$$

Выражение $h_{52}$ преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям, полагая $dv = d(\exp i\varphi_{2\widetilde{\xi}})$, а затем пользуемся неравенством $|\exp\nu_{2\xi}(\tau,\varepsilon) - \exp\nu_{2\widetilde{\xi}}(\tau,\varepsilon)| \le L_e||\nu_{2\xi}(\tau,\varepsilon) - \nu_{2\widetilde{\xi}}(\tau,\varepsilon)||$. Поскольку $\nu_{2\xi},\nu_{2\widetilde{\xi}}(\tau,\varepsilon) \le O_+(\varepsilon)$ при $\tau\in[t_0;t_1]$ в соответствии с условием $n_2(\xi,\varepsilon)\le O_+(\varepsilon^4)$, то $L_e = O_+(1)$. В результате получаем для $|h_{52}|$ оценку

$$|h_{52}(t,\varepsilon)| \le \varepsilon^5 L_{h_{52}}\int\limits_{t_0}^{t}||\xi(\tau,\varepsilon)-\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau. \tag{50}$$

Из (46),(48),(49),(50) следует неравенство

$$|\theta(t,\varepsilon)-\widetilde{\theta}(t,\varepsilon)+i\varepsilon^2[\psi(t,\varepsilon)-\widetilde{\psi}(t,\varepsilon)]| \le \varepsilon^3\hat{L}\int\limits_{t_0}^{t}||\xi(\tau,\varepsilon)-\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau+\varepsilon^5\hat{C},\quad t\in[t_0;t_1], \tag{51}$$

где $\hat{L},\hat{C} > 0$ — постоянные порядка 1. Оно получено путем анализа пятого и шестого уравнений системы (24) и соответствующих уравнений системы (42). Правые части всех остальных уравнений системы (24) совпадают с правыми частями соответствующих уравнений (42) и удовлетворяют в $\Xi_\varepsilon$ условиям Липшица по $\xi$ с постоянными порядка $\varepsilon^3$, и переменные $\alpha,\beta$ в эти уравнения не входят. Поэтому из неравенства (51) следует аналогичное неравенство для нормы разности решений уравнений (24),(42):

$$||\xi(t,\varepsilon)-\widetilde{\xi}(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon^3 L\int\limits_{t_0}^{t}||\xi(\tau,\varepsilon)-\widetilde{\xi}(\tau,\varepsilon)||\,d\tau+\varepsilon^5 C,\quad t\in[t_0;t_1],$$

где $L, C > 0$ — постоянные порядка 1. Применив к нему лемму Гронуолла, заключаем, что на промежутке $[t_0;\widetilde{t}_1]$, где $\widetilde{\xi}(t,\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon$, имеет место оценка $||\xi(t,\varepsilon)-\widetilde{\xi}(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon^5 C\exp\varepsilon^3 L(t-t_0) = O(\varepsilon^5)$, $t\in[t_0;t_1]$, совпадающая с (44). Так же, как и в п. 2, устанавливаем, что оценка (44) справедлива на всем отрезке $[t_0;t_1]$.

В соответствии с процедурой введения малого параметра, этой оценке соответствуют числовые оценки погрешностей исходных переменных, которые для координат центра масс устанавливают погрешность порядка 0,1 м.

Как показывают проведенные расчеты, численное интегрирование усредненной системы (15) требует примерно в 20 раз меньше времени, чем численное интегрирование линеаризованной системы (24), (25), а для частично усредненной системы (42) выигрыш во времени составляет 3–5 раз. Такое уменьшение времени счета может оказаться существенным при решении задач баллистики, требующих расчета большого числа траекторий. Усредненная и частично усредненная системы представляют интерес и в теоретическом плане, так как позволяют лучше понять влияние различных компонент углового движения оси симметрии на поступательное движение снаряда.


1. *Murphy C.H.* Symmetric Missile Dynamic Instabilities // J. of Guidance and Control. – 1981. – **4**, No. 5. – P. 464–471.
(Русский перевод: *Мэрфи Ч.Х.* Динамическая неустойчивость осесимметричного снаряда // Ракетная техника и космонавтика. – 1982. – **20**, N 5. – С. 132–141.)
2. *Коносевич Б.И.* К теории полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 51–62.
3. *Коносевич Б.И.* Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 109–119.
4. *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
6. *Пугачев В.С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
7. *Коносевич Б.И.* Оценка погрешности уточненного асимптотического решения линеаризованных уравнений движения оси симметрии снаряда // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2001. – Т. 6. – С. 61–66.
8. *Шварц Л.* Анализ. Т.1. – М.: Мир, 1972. – 824 с.


*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 30.05.01