ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2001. Вып. 31

УДК 531.383

©2001. **Л.Д. Акуленко, Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко**

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО МОМЕНТА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ УГЛА НУТАЦИИ

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, t – время) и угла нутации θ, а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Тело предполагается быстро закрученным, а восстанавливающий и возмущающий моменты предполагаются малыми с определенной иерархией малости компонентов. Получена усредненная система уравнений движения в первом приближении для существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном случае. Исследована задача управления экваториальной составляющей вектора угловой скорости тела.

Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и угла нутации θ, а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Уравнения движения имеют вид [1]

$$\begin{gathered}
A\dot{p} + (C - A)qr = k(\tau, \theta)\sin\theta\cos\varphi + M_1, \\
A\dot{q} + (A - C)pr = -k(\tau, \theta)\sin\theta\sin\varphi + M_2, \\
C\dot{r} = M_3, \qquad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \qquad \tau = \varepsilon t \quad (i = 1, 2, 3), \\
\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\ \mathrm{cosec}\ \theta, \quad \dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \\
\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\ \mathrm{ctg}\ \theta.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела, проходящие через точку O. Величины M_i – проекции вектора возмущающего момента на те же оси. Они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и являются периодическими функциями углов Эйлера ψ, φ, θ с периодами 2π. Здесь A – экваториальный, C – осевой моменты инерции тела относительно точки $O, A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $k(\tau, \theta)$, медленно изменяющийся во времени и зависящий от угла нутации. При отсутствии возмущений ($M_i = 0$) и $k(\tau, \theta) = \mathrm{const}$ уравнения (1) отвечают случаю волчка Лагранжа.

Система (1) исследуется при условии выполнения следующих предположений:

$$(p^2 + q^2) \ll r^2, \qquad Cr^2 \gg k, \qquad |M_{1,2}| \ll k, \qquad M_3 \sim k, \tag{2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость осевого вращения достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Неравенства (2) позволяют ввести следующие соотношения:

$$p = \varepsilon P,\ q = \varepsilon Q,\ k(\tau, \theta) = \varepsilon K(\tau, \theta),\ \tau = \varepsilon t, \tag{3}$$

$$M_{1,2} = \varepsilon^2 M^*_{1,2}(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau),$$

$$M_3 = \varepsilon M^*_3(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau).$$

Новые переменные P, Q а также переменные r, ψ, θ, φ, функции K, M^*_i $(i = 1, 2, 3)$ и параметры A, C предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \to 0$.

В работах [1,2] рассматривались быстрые вращения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием постоянного восстанавливающего момента $k = \mathrm{const}$ [1] и момента $k = k(\theta)$, зависящего от угла нутации [2]. Мы же исследуем более общий случай зависимости восстанавливающего момента одновременно от угла нутации и медленного времени $k = k(\tau, \theta)$. Возмущающий момент предполагается медленно изменяющимся во времени и является функцией вида $M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau)$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1) при малом ε, если выполнены условия (2), (3). Это исследование будет проводиться методом усреднения [3, 4] на интервале времени порядка ε^{-1}. Метод усреднения широко применялся в задачах динамики твердого тела. Упрощающие предположения (2) или (3) дают возможность получить в общем случае довольно простую схему усреднения и исследовать примеры.

Сделаем в системе (1) замену переменных (3). Сократив обе части первых двух уравнений (1) на ε, получим

$$A\dot{P} + (C - A)Qr = K(\tau, \theta)\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M^*_1, \tag{4}$$

$$A\dot{Q} + (A - C)Pr = -K(\tau, \theta)\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M^*_2,$$

$$C\dot{r} = \varepsilon M^*_3, \qquad \dot{\psi} = \varepsilon(P\sin\varphi + Q\cos\varphi)\ \mathrm{cosec}\ \theta,$$

$$\dot{\varphi} = r - \varepsilon(P\sin\varphi + Q\cos\varphi)\mathrm{ctg}\theta, \qquad \dot{\theta} = \varepsilon(P\cos\varphi - Q\sin\varphi).$$

Система (4) является двухчастотной и существенно нелинейной.

Рассмотрим сначала систему первого приближения и положим $\varepsilon = 0$ в (4). Из последних четырех уравнений находим

$$r = r_0, \qquad \psi = \psi_0, \qquad \theta = \theta_0, \qquad \varphi = r_0 t + \varphi_0, \qquad K_0 = K(\tau_0, \theta_0). \tag{5}$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0, \tau_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$. Подставим равенства (5) в первые два уравнения (4) при $\varepsilon = 0$ и проинтегрируем полученную систему линейных уравнений для P, Q. Получим

$$P = a\cos\gamma + b\sin\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi,$$

$$Q = a\sin\gamma - b\cos\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi, \tag{6}$$

$$a = P_0 - K_0 C^{-1} r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0, \qquad b = -Q_0 + K_0 C^{-1} r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0,$$

$$\dot{\gamma} = n, \quad \gamma(0) = 0, \quad n = (C - A)A^{-1}r \neq 0, \quad \left|\frac{n}{r}\right| \leq 1, \quad \alpha = \varphi + \gamma.$$

Здесь a, b – оскулирующие переменные типа Ван дер Поля, введенные вместо (3), а переменная γ имеет смысл фазы колебаний.

При $\varepsilon \neq 0$ рассмотрим соотношения (6) как формулы замены переменных (содержащие переменную γ), определяющие переход от переменных P, Q к переменным a, b и обратно. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (4) от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau$ к новым переменным $a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau$. Отметим, что фазы φ, α, γ связаны конечным соотношением, которое оказывается более удобным для дальнейших исследований стандартной системы с двумя вращающимися фазами α, γ. После преобразований получим систему вида:

$$\begin{gathered}
\dot{a} = \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \cos\gamma + M_2^0 \sin\gamma) + \varepsilon K(\tau,\theta) C^{-2} r^{-2} M_3^0 \sin\theta \sin\alpha - \\
- \varepsilon K(\tau,\theta) C^{-1} r^{-1} \cos\theta (b - K(\tau,\theta) C^{-1} r^{-1} \sin\theta\cos\alpha) - \\
- \varepsilon C^{-1} r^{-1} \sin\theta \sin\alpha \left[\frac{\partial K}{\partial \theta}(a\cos\alpha + b\sin\alpha) + \frac{\partial K}{\partial \tau} \right],
\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
\dot{b} = \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \sin\gamma - M_2^0 \cos\gamma) - \varepsilon K(\tau,\theta) C^{-2} r^{-2} M_3^0 \sin\theta \cos\alpha + \\
+ \varepsilon K(\tau,\theta) C^{-1} r^{-1} \cos\theta (a + K(\tau,\theta) C^{-1} r^{-1} \sin\theta\sin\alpha) + \\
+ \varepsilon C^{-1} r^{-1} \sin\theta \cos\alpha \left[\frac{\partial K}{\partial \theta}(a\cos\alpha + b\sin\alpha) + \frac{\partial K}{\partial \tau} \right], \\
\dot{r} = \varepsilon C^{-1} M_3^0, \qquad \dot{\theta} = \varepsilon(a\cos\alpha + b\sin\alpha), \\
\dot{\psi} = \varepsilon(a\sin\alpha - b\cos\alpha)\ \mathrm{cosec}\ \theta + \varepsilon K(\tau,\theta) C^{-1} r^{-1}, \\
\dot{\alpha} = C A^{-1} r - \varepsilon(a\sin\alpha - b\cos\alpha)\ \mathrm{ctg}\ \theta - \varepsilon K(\tau,\theta) C^{-1} r^{-1}\cos\theta, \quad \dot{\gamma} = (C-A)A^{-1} r, \\
M_i^0(a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau) = M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau) \quad (i = 1, 2, 3).
\end{gathered}$$

Отметим, что при $K = \mathrm{const}$ и M_i, не зависящих от τ, система (7) совпадает с соответствующей системой, исследованной в [1].

Исследуем возможность применения метода усреднения к системе (7). Данная система содержит медленные переменные $a, b, r, \psi, \theta, \tau$ и быстрые переменные – фазы α и γ. Зависимость восстанавливающего момента от медленной переменной τ и угла нутации θ приводит к появлению в первых двух уравнениях системы (7) слагаемых, содержащих производные $\dfrac{\partial K}{\partial \tau}$ и $\dfrac{\partial K}{\partial \theta}$. Если возмущающие моменты зависят от времени t, то применение метода усреднения весьма затруднено, поскольку система является существенно нелинейной. Рассмотрим более простой случай зависимости возмущающих моментов от медленного времени $\tau = \varepsilon t$.

Моменты M_i^* периодичны по φ с периодом 2π, поэтому согласно (6) функции M_i^0 является 2π – периодическими функциями α и γ. В этом случае система (7) содержит две вращающиеся фазы α, γ, и соответствующие им частоты $\omega_\alpha = CA^{-1}r$ и $\omega_\gamma = (C - A)A^{-1}r$ переменны и зависят от медленной переменной. При усреднении системы (7) следует различать два случая: нерезонансный, когда частоты ω_γ и ω_α несоизмеримы (C/A – иррациональное число) и резонансный, когда эти частоты соизмеримы ($C/A = i/j$, $i/j \leq 2$, i, j – натуральные взаимно простые числа). Поскольку отношение частот постоянно: $\dfrac{\omega_\gamma}{\omega_\alpha} = 1 - AC^{-1}$, то в результате введения переменной γ усреднение нелинейной системы (7) эквивалентно усреднению квазилинейной системы с постоянными частотами.

В нерезонансном случае ($\dfrac{C}{A} \neq \dfrac{i}{j}$) усредненную систему первого приближения получим путем независимого усреднения правых частей системы (7) по обеим быстрым переменным α, γ. При этом, сделав замену $\tau = \varepsilon t$ и разделив обе части уравнений на ε, имеем

$$a' = A^{-1}\mu_1 - \frac{1}{2}C^{-1}r^{-1}b\sin\theta\frac{\partial K}{\partial\theta} - bK(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}\cos\theta + K(\tau,\theta)C^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^s,$$

$$b' = A^{-1}\mu_2 + \frac{1}{2}C^{-1}r^{-1}a\sin\theta\frac{\partial K}{\partial\theta} + aK(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}\cos\theta - K(\tau,\theta)C^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^c,$$

$$r' = C^{-1}\mu_3,\ \psi' = K(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1},\ \theta' = 0,$$

$$\mu_1 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma)\ d\alpha d\gamma,$$

$$\mu_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma)\ d\alpha d\gamma, \tag{8}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0\ d\alpha d\gamma, \qquad \mu_3^s = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0\sin\alpha\ d\alpha d\gamma,$$

$$\mu_3^c = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0\cos\alpha\ d\alpha d\gamma, \qquad f' = \frac{df}{d\tau}.$$

В качестве примера рассмотрим задачу о приведении волчка в состояние регулярной прецессии, в частности, в "спящее состояние". Малые управляющие моменты принимаются в виде

$$M_1 = -\varepsilon^2 h(\tau)\frac{p^*}{(p^{*2}+q^{*2})^{1/2}}, \quad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau)\frac{q^*}{(p^{*2}+q^{*2})^{1/2}}, \quad M_3 = \varepsilon u(\tau), \tag{9}$$

$$p^* = p - k(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi, \quad q^* = q - k(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi.$$

Здесь $h(\tau)$ и $u(\tau)$ – заданные интегрируемые функции на промежутке $[0,1)$; $h(\tau) > 0$, $\tau \sim 1$. Эти законы управления отвечают оптимальному по быстродействию гашению экваториальной составляющей вектора угловой скорости вращения [5].

С учетом соотношений (3) и (6) для p и q возмущающие моменты согласно (9) имеют вид

$$M_1 = -\varepsilon^2 h(\tau)\frac{a\cos\gamma + b\sin\gamma}{(a^2+b^2)^{1/2}}, \qquad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau)\frac{a\sin\gamma - b\cos\gamma}{(a^2+b^2)^{1/2}}, \qquad M_3 = \varepsilon u(\tau). \tag{10}$$

После подстановки в (8) возмущающих моментов (10) получим после интегрирования решение вида

$$\theta = \theta_0, \quad r(\tau) = r_0 + C^{-1}\int_0^{\tau} u(\tau^*)\ d\tau^*,$$

$$\psi(\tau) = \psi_0 + C^{-1}\int_0^{\tau} K(\tau^*,\theta)r^{-1}(\tau^*)\ d\tau^*,$$

$$a(\tau) = F_4(\tau)\left[P_0\cos\chi + Q_0\sin\chi - K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\chi+\varphi_0)\right], \tag{11}$$
$$b(\tau) = F_4(\tau)\left[P_0\sin\chi - Q_0\cos\chi + K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\chi+\varphi_0)\right],$$
$$F_4(\tau) = \left[1 - A^{-1}(a_0^2+b_0^2)^{-(1/2)}\int_0^\tau h(\tau^*)\,d\tau^*\right],$$
$$\chi = C^{-1}\int_0^\tau [K(\tau^*,\theta)\cos\theta_0 + \frac{1}{2}\sin\theta_0\frac{\partial K}{\partial\theta}]r^{-1}(\tau^*)\,d\tau^*.$$

Подставляя в соотношения (3) выражения P, Q, a, b, r из (6), (11), определим искомые величины

$$p = F_4(\tau)[p_0\cos(\gamma-\chi) - q_0\sin(\gamma-\chi) + k_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\chi-\varphi_0)] +$$
$$+k(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi,$$
$$q = F_4(\tau)[p_0\sin(\gamma-\chi) + q_0\cos(\gamma-\chi) - k_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\gamma-\chi-\varphi_0)] + \tag{12}$$
$$+k(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\cos\varphi,$$
$$\gamma = A^{-1}(C-A)\left[r_0t + C^{-1}\int_0^t\left(\int_0^\tau u(\tau_1)\,d\tau_1\right)\,dt\right], \qquad \tau = \varepsilon t.$$

Получено решение системы (8), (9) и найдены выражения проекций вектора угловой скорости в случае момента (10). Угол нутации θ постоянен. Величина $|r(\tau)|$ возрастает, если параметр r_0 и интеграл от функции $u(\tau)$ имеют одинаковые знаки, и убывает в противном случае. Переменные a, b являются произведением сомножителя, принимающего положительные, отрицательные значения и нуль в зависимости от подынтегральной функции $h(\tau)$, и осциллирующего сомножителя. Приращение угла прецессии $\psi - \psi_0$ зависит от интеграла, являющегося частным от деления восстанавливающего момента на осевую скорость вращения и принимает положительное значение в случае, если $K(\tau,\theta)$ и $r^{-1}(\tau)$ имеют одинаковые знаки.

Составляющие p, q вектора угловой скорости, согласно (12), содержат ограниченные осциллирующие слагаемые, частота колебаний которых определяется переменной $\gamma - \chi$, а также слагаемое, обусловленное восстанавливающим моментом $k(\tau,\theta)$.

Функция $h(\tau)$ может иметь смысл ограничения на управляющее воздействие. Например, гашение экваториальной составляющей посредством ограниченного момента сил, где $M_{1,2}$ – управление для p, q, а M_3 – управление для r.

Рассмотрим случай, когда восстанавливающий момент имеет вид

$$k(\tau,\theta) = \varepsilon K(\tau,\theta) = \varepsilon(K(\theta) + \xi\sin\nu\tau) = k(\theta) + \varepsilon\xi\sin\nu\tau, \quad \xi \gtrless 0,$$
$$K(\theta) = A(\mu + 2\eta\cos\theta). \tag{13}$$

Здесь μ, η – постоянные коэффициенты, на знаки которых никаких ограничений не накладывается. Такие задачи возникают при неуправляемом пространственном движении тела в атмосфере [6].

Выражение для угла прецессии ψ, аргумента χ и проекций p, q вектора угловой скорости примут вид

$$\psi - \psi_0 = C^{-1}K(\theta_0)\int_0^\tau r^{-1}(\tau^*)\,d\tau^* + \eta_1,$$

$$\chi = C^{-1}[K(\theta_0)\cos\theta_0 - A\eta\sin^2\theta_0]\int_0^\tau r^{-1}(\tau^*)\ d\tau^* + \eta_1\cos\theta_0\ , \tag{14}$$

$$p = F_4(\tau)[p_0\cos(\gamma-\chi) - q_0\sin(\gamma-\chi) + k(\theta_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\chi-\varphi_0)] +$$
$$+ k(\theta_0)C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi + \eta_2\ ,$$
$$\eta_1 = \xi C^{-1}\int_0^\tau \sin\nu\tau^* r^{-1}(\tau^*)\ d\tau^*\ ,$$
$$\eta_2 = \varepsilon\xi\sin\nu\tau C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi.$$

Аналогично получается формула для q.

В выражениях для p, q и ψ из (14), как и в [2], присутствуют слагаемые, содержащие $k(\theta_0)$. Отличие состоит в том, что имеются еще дополнительные слагаемые η_1 и η_2 соответственно. Поскольку функция $r(\tau)$ ограничена, то дополнительные слагаемые также являются ограниченными и $|\sin\nu\tau| < |\nu\tau|$.

Выводы:

1. Исследован новый класс вращательных движений динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки с учетом нестационарного возмущающего момента, а также восстанавливающего момента, медленно изменяющегося во времени и зависящего от угла нутации.

2. Разработана процедура усреднения для получающейся существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном случае.

3. Решена конкретная задача динамики и управления вращением твердого тела, близким к регулярной прецессии в случае Лагранжа, имеющая самостоятельное значение для приложений.

1. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – N 5. – С. 3-10.
2. *Лещенко Д.Д., Саллам С.Н.* Возмущенные вращения твердого тела относительно неподвижной точки // Там же. – 1990. – N 5. – С. 16-23.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
4. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. - 507 с.
5. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1987. – 365с.
6. *Асланов В.С., Серов В.М.* Вращательное движение осесимметричного твердого тела с бигармонической характеристикой восстанавливающего момента //Изв. АН. Механика твердого тела. – 1995. – N 3. – С. 19-25.

Ин-т проблем механики Российской Академии наук, Москва
Одесская гос. академия строительства и архитектуры
leshchenko_d@mail.ru

Получено 14.02.01