

УДК 531.38

©2001. А.П.Харламов

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПО ИНЕРЦИИ ТЕЛА, ЗАКРЕПЛЕННОГО В НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

Настоящая работа является продолжением работы [1], где сформулирована постановка задачи, получены ее аналитическое и полное решения. Здесь основные соотношения приведены к виду, пригодному для компьютерной обработки. Записаны уравнения для определения значений параметров, обеспечивающих периодичность движения. Построен ряд визуализаций таких движений.

1. Основные соотношения. Вектор угловой скорости тела

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1^0 + \omega_2 \mathbf{e}_2^0 + \omega_3 \mathbf{e}_3^0 = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3$$

в неподвижном $O\mathbf{e}_1^0\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ и подвижном $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ базисах имеет компоненты, определяющие соответственно две пространственные кривые – неподвижный годограф угловой скорости

$$\omega_1(\varkappa, \sigma) = c \sqrt{\frac{(\varkappa - A)(A - \sigma)}{\varkappa\sigma}}, \quad \omega_2 = c, \quad \omega_3 = 0 \quad (1)$$

отрезок прямой, лежащий в плоскости $O\mathbf{e}_1^0\mathbf{e}_2^0$, и подвижный

$$\begin{aligned} p_1(\varkappa, \sigma) &= \frac{c}{\varkappa - \sigma} \left[\sqrt{A(A - \sigma)(\sigma - A_1)(\varkappa - A_2)(\varkappa - A_3)/B_2B_3\varkappa} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{A(A - \varkappa)(\varkappa - A_1)(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)/B_2B_3\sigma} \right], \\ p_2(\varkappa, \sigma) &= \frac{c}{\varkappa - \sigma} \left[\sqrt{A(A - \sigma)(\sigma - A_2)(\varkappa - A_3)(\varkappa - A_1)/B_3B_1\varkappa} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{A(A - \varkappa)(\varkappa - A_2)(\sigma - A_3)(\sigma - A_1)/B_3B_1\sigma} \right], \\ p_3(\varkappa, \sigma) &= \frac{c}{\varkappa - \sigma} \left[\sqrt{A(A - \sigma)(\sigma - A_3)(\varkappa - A_1)(\varkappa - A_2)/B_1B_2\varkappa} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{A(A - \varkappa)(\varkappa - A_3)(\sigma - A_1)(\sigma - A_2)/B_1B_2\sigma} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$B_1 = A_2 - A_3 < 0, \quad B_2 = A_3 - A_1 > 0, \quad B_3 = A_1 - A_2 < 0. \quad (3)$$

Компоненты единичного вектора направления оси неголономности \mathbf{e}_3^0 в базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ имеют вид:

$$\nu_i(\varkappa, \sigma) = \sqrt{-(\sigma - A_i)(\varkappa - A_i)B_i/B_1B_2B_3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Матрица $E_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^0$ перехода от подвижного базиса к неподвижному такая, что $w_j = \sum_{i=1}^3 u_i E_{ij}$ ($w_i, u_i, i = 1, 2, 3$ – координаты точки в неподвижном и подвижном базисах соответственно), имеет компоненты:

$$\begin{aligned} E_{i1}(\mathfrak{x}, \sigma) &= \frac{1}{A\omega_1(\mathfrak{x}, \sigma)} \left[(A - A_i)p_i(\mathfrak{x}, \sigma) + x_3(\mathfrak{x}, \sigma)\nu_i(\mathfrak{x}, \sigma) \right], \\ E_{i2}(\mathfrak{x}, \sigma) &= \frac{1}{Ac} \left[A_i p_i(\mathfrak{x}, \sigma) - x_3(\mathfrak{x}, \sigma)\nu_i(\mathfrak{x}, \sigma) \right], \\ E_{i3}(\mathfrak{x}, \sigma) &= \nu_i(\mathfrak{x}, \sigma), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} x_3(\mathfrak{x}, \sigma) &= A_1 p_1 \nu_1 + A_2 p_2 \nu_2 + A_3 p_3 \nu_3 = \\ &= \frac{c}{\mathfrak{x} - \sigma} \left[\sqrt{A(\sigma - A)(\mathfrak{x} - A_1)(\mathfrak{x} - A_2)(\mathfrak{x} - A_3)/\mathfrak{x}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{A(\mathfrak{x} - A)(\sigma - A_1)(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)/\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Сохранение кинетической энергии выражается соотношением:

$$A_1 p_1^2 + A_2 p_2^2 + A_3 p_3^2 = Ac^2, \quad (7)$$

то есть подвижный годограф угловой скорости принадлежит эллипсоиду (7), а постоянство составляющей момента количества движения по направлению \mathbf{e}_2^0 запишется так:

$$A_1^2 p_1^2 + A_2^2 p_2^2 + A_3^2 p_3^2 - \left[A_1 p_1 \nu_1 + A_2 p_2 \nu_2 + A_3 p_3 \nu_3 \right]^2 = A^2 c^2. \quad (8)$$

Вспомогательная переменная τ введена уравнением

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2c}{\mathfrak{x} - \sigma} \sqrt{\frac{A}{\mathfrak{x}\sigma}} \quad (9)$$

так, что

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} &= \sqrt{\mathfrak{x}(A - \mathfrak{x})(\mathfrak{x} - A_1)(\mathfrak{x} - A_2)(\mathfrak{x} - A_3)}, \\ \frac{d\sigma}{d\tau} &= \sqrt{\sigma(A - \sigma)(\sigma - A_1)(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Будем искать периодические движения тела, соответствующие таким ограничениям областей изменения переменных \mathfrak{x} и σ :

$$A_1 \leq \sigma \leq A < A_2 \leq \mathfrak{x} \leq A_3, \quad A_1 \leq \sigma \leq A_2 < A \leq \mathfrak{x} \leq A_3.$$

Здесь величины главных центральных моментов инерции тела A_1, A_2, A_3 остаются свободными параметрами в пределах указанных ограничений, причем $A_2 > A_3 - A_1$. Переходя к безразмерным величинам, положим $A = 1, c = 1$.

2. Случай I: $A_1 \leq \sigma \leq 1 < A_2 \leq \mathfrak{x} \leq A_3$. Для вычислений необходимо сделать замену переменных \mathfrak{x} и σ такую, чтобы автоматически учитывалось изменение знака перед радикалами в выражениях (1), (2), (4):

$$\sigma(\lambda) = A_1 \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda, \quad \mathfrak{x}(\mu) = A_2 \cos^2 \mu + A_3 \sin^2 \mu \quad (11)$$

(в дальнейшем будем записывать просто σ и \varkappa , имея в виду (11)). Из (10) с учетом (11) получим:

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)}, \quad (12)$$

$$\frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\varkappa(\varkappa - 1)(\varkappa - A_1)}.$$

В общем случае λ и μ имеют свои периоды изменения по τ , при их несоизмеримости подвижный годограф угловой скорости незамкнут и замечает определенную область на эллипсоиде. Потребовав соизмеримость этих периодов, сформулируем из (12) условие замкнутости подвижного годографа:

$$\frac{\tau_*}{2} = \int_0^{2\pi n_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{\sigma(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)}} = \int_0^{2\pi n_2} \frac{d\mu}{\sqrt{\varkappa(\varkappa - 1)(\varkappa - A_1)}}, \quad (13)$$

где n_1, n_2 принимают любые целые значения. Задавая допустимые значения параметрам A_1, A_3, n_1, n_2 , разрешаем численно это уравнение относительно A_2 и находим соответствующую величину τ_* .

Период $T|_{\tau=\tau_*}$ такой, что $0 \leq t \leq T$, найдем, решая численно задачу Коши для системы (9), (12):

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{\varkappa - \sigma}{2} \sqrt{\varkappa\sigma}, \\ \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)}, \quad \frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\varkappa(\varkappa - 1)(\varkappa - A_1)}, \\ t|_{\tau=0} &= 0, \quad \lambda|_{\tau=0} = 0, \quad \mu|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Разделив T на равные промежутки $t_i, i = 1, \dots, N$, определим $\lambda_i|_{t=t_i}, \mu_i|_{t=t_i}$, численно интегрируя систему, полученную из (12) с учетом (9):

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{d\lambda d\tau}{d\tau dt} = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \sqrt{(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)/\varkappa}, \quad \lambda_0|_{t=0} = 0, \\ \frac{d\mu}{dt} &= \frac{d\mu d\tau}{d\tau dt} = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \sqrt{(\varkappa - 1)(\varkappa - A_1)/\sigma}, \quad \mu_0|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом получены наборы значений переменных λ и μ , соответствующие периодическому движению тела для найденных из (13) значений параметров A_1, A_2, A_3, n_1, n_2 .

Перепишем выражения (1), (2), (4) с учетом (11), (3):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{(\varkappa - 1)(1 - A_1)}{\varkappa\sigma}} \cos \lambda, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = 0, \\ p_1 &= \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[k_1 B_1 (A_1 - 1) \sqrt{-\frac{1}{B_2 B_3 \varkappa}} \sin \lambda \cos \lambda \sin \mu \cos \mu + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{(1 - \varkappa)(\varkappa - A_1)(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)}{B_2 B_3 \sigma}} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$p_2 = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[k_2 \sqrt{\frac{(1 - A_1)(\sigma - A_2)(\varkappa - A_1)}{B_3 \varkappa}} \cos \lambda \cos \mu + \right. \\ \left. + k_3 \sqrt{\frac{(1 - A_1)(\varkappa - 1)(\sigma - A_3)}{B_3 \sigma}} \sin \lambda \sin \mu \right], \quad (17)$$

$$p_3 = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[k_4 \sqrt{\frac{(A_1 - 1)(\sigma - A_3)(\varkappa - A_1)}{B_2 \varkappa}} \cos \lambda \sin \mu + \right. \\ \left. + k_5 \sqrt{\frac{(A_1 - 1)(\varkappa - 1)(\sigma - A_2)}{B_2 \sigma}} \sin \lambda \cos \mu \right],$$

$$\nu_1 = k_6 \sqrt{\frac{(A_1 - 1)(\varkappa - A_1)}{B_2 B_3}} \sin \lambda, \quad \nu_2 = k_7 \sqrt{\frac{\sigma - A_2}{B_3}} \sin \mu, \quad \nu_3 = k_8 \sqrt{\frac{A_3 - \sigma}{B_2}} \cos \mu. \quad (18)$$

Коэффициенты k_i в выражениях (17), (18) могут принимать значения либо +1, либо -1. Их определим из условий (7), (8), из требования существования общей точки $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ и общей касательной, проходящей через эту точку, у подвижного и неподвижного годографов угловой скорости в каждый момент времени. Этими значениями (с точностью до начальных условий), например, являются

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 1, \quad k_5 = -1, \quad k_6 = 1, \quad k_7 = -1, \quad k_8 = 1. \quad (19)$$

Компоненты матрицы перехода определены соотношениями (5). Элементы E_{i1} содержат неопределенность типа 0/0, когда $\omega_1(\varkappa, \sigma) = 0$. Устраним эту особенность, подставляя в (5) выражения (6), (16)-(18) с учетом (3). (19):

$$E_{11} = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[-B_1 \sqrt{\frac{(A_1 - 1)(\varkappa - A)\sigma}{B_2 B_3}} \sin \lambda \sin \mu \cos \mu + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{(A_1 - 1)(\varkappa - A_1)(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)\varkappa}{B_2 B_3}} \cos \lambda \right],$$

$$E_{21} = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[\sqrt{\frac{(\sigma - A_2)(\varkappa - A_1)\sigma}{(\varkappa - 1)B_3}} (1 - A_2 + B_1 \sin^2 \mu) \cos \mu + \right. \\ \left. + (1 - A_1) \sqrt{\frac{(\sigma - A_3)\varkappa}{B_3}} \sin \lambda \cos \lambda \sin \mu \right],$$

$$E_{31} = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[\sqrt{\frac{(A_3 - \sigma)(\varkappa - A_1)\sigma}{(\varkappa - 1)B_2}} (1 - A_3 - B_1 \cos^2 \mu) \sin \mu + \right. \\ \left. + (A_1 - 1) \sqrt{\frac{(A_2 - \sigma)\varkappa}{B_2}} \sin \lambda \cos \lambda \cos \mu \right].$$

3. Случай II: $A_1 \leq \sigma \leq A_2 < 1 \leq \varkappa \leq A_3$. Все проводимые здесь преобразования аналогичны проделанным для предыдущего случая. Замена переменных:

$$\sigma(\lambda) = A_1 \cos^2 \lambda + A_2 \sin^2 \lambda, \quad \varkappa(\mu) = \cos^2 \mu + A_3 \sin^2 \mu. \quad (20)$$

Подставляя выражения (20) в (10), получим

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(\sigma - 1)(\sigma - A_3)},$$

$$\frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\varkappa(\varkappa - A_1)(\varkappa - A_2)},$$

и требование замкнутости подвижного годографа угловой скорости примет вид

$$\frac{\tau_*}{2} = \int_0^{2\pi n_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{\sigma(\sigma - 1)(\sigma - A_3)}} = \int_0^{2\pi n_2} \frac{d\mu}{\sqrt{\varkappa(\varkappa - A_1)(\varkappa - A_2)}},$$

откуда находим численно τ_* так же, как в уравнении (13).

Период T найдем, решая численно задачу Коши для системы

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\varkappa - \sigma}{2} \sqrt{\varkappa\sigma},$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(\sigma - 1)(\sigma - A_3)}, \quad \frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\varkappa(\varkappa - A_1)(\varkappa - A_2)}$$

с такими же начальными условиями, как в (14).

Соответствующие периодическому движению тела наборы значений $\lambda_i|_{t=t_i}$, $\mu_i|_{t=t_i}$, переменных λ и μ получим, интегрируя пошагово систему

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \sqrt{(\sigma - 1)(\sigma - A_3)/\varkappa},$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mu}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \sqrt{(\varkappa - A_1)(\varkappa - A_2)/\sigma}$$

с начальными условиями, как и в (15).

Основные соотношения (1), (2), (4) с учетом (20), (3) запишутся в виде:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(1 - \sigma)(A_3 - 1)}{\varkappa\sigma}} \sin \mu, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = 0,$$

$$p_1 = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[k_1 \sqrt{\frac{(A_3 - 1)(1 - \sigma)(\varkappa - A_2)}{B_3 \varkappa}} \sin \lambda \cos \mu + \right.$$

$$\left. + k_2 \sqrt{\frac{(1 - A_3)(\varkappa - A_1)(\sigma - A_3)}{B_2 \sigma}} \cos \lambda \sin \mu \right],$$

$$p_2 = \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[k_3 \sqrt{\frac{(1 - A_3)(1 - \sigma)(\varkappa - A_1)}{B_1 \varkappa}} \cos \lambda \cos \mu + \right.$$

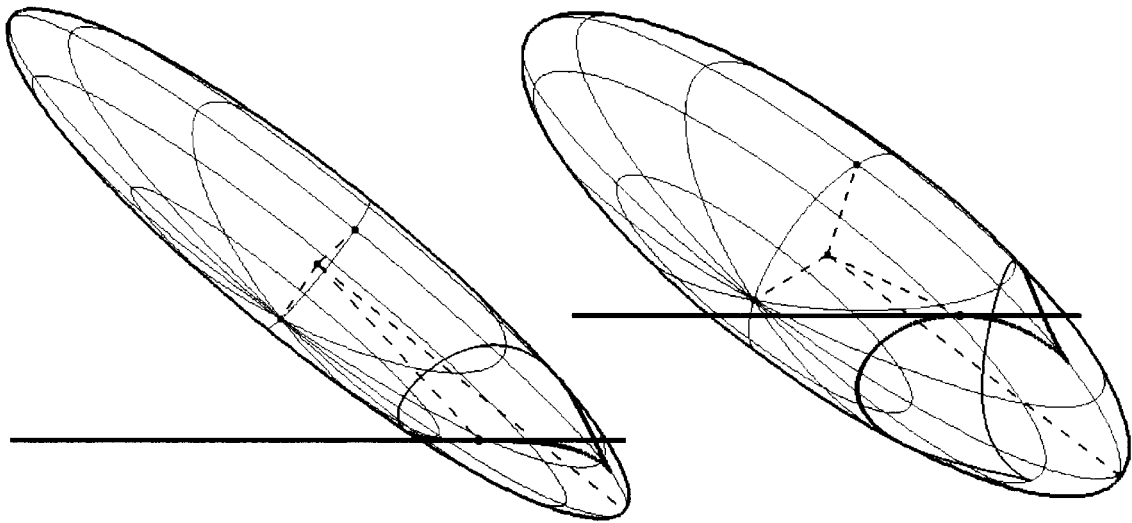
$$\begin{aligned}
 & +k_4 \sqrt{\frac{(A_3 - 1)(\varkappa - A_2)(\sigma - A_3)}{B_1 \sigma}} \sin \lambda \sin \mu \Big], \\
 p_3 = & \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[\sqrt{\frac{(1 - \sigma)(\sigma - A_3)(\varkappa - A_1)(\varkappa - A_2)}{B_1 B_2 \varkappa}} + \right. \\
 & \left. +k_5 B_3 (1 - A_3) \sqrt{-\frac{1}{B_1 B_2 \sigma}} \sin \lambda \cos \lambda \sin \mu \cos \mu \right], \\
 \nu_1 = & k_6 \sqrt{\frac{\varkappa - A_1}{B_2}} \sin \lambda, \quad \nu_2 = k_7 \sqrt{\frac{A_2 - \varkappa}{B_1}} \cos \lambda, \quad \nu_3 = k_8 \sqrt{\frac{(A_3 - 1)(\sigma - A_3)}{B_1 B_2}} \cos \mu.
 \end{aligned}$$

Применяя рассуждения, что и в случае I, получим такие же как и в (19) значения для коэффициентов k_i .

Устраняя аналогично случаю I особенность в компонентах E_{i1} матрицы перехода (5), находим

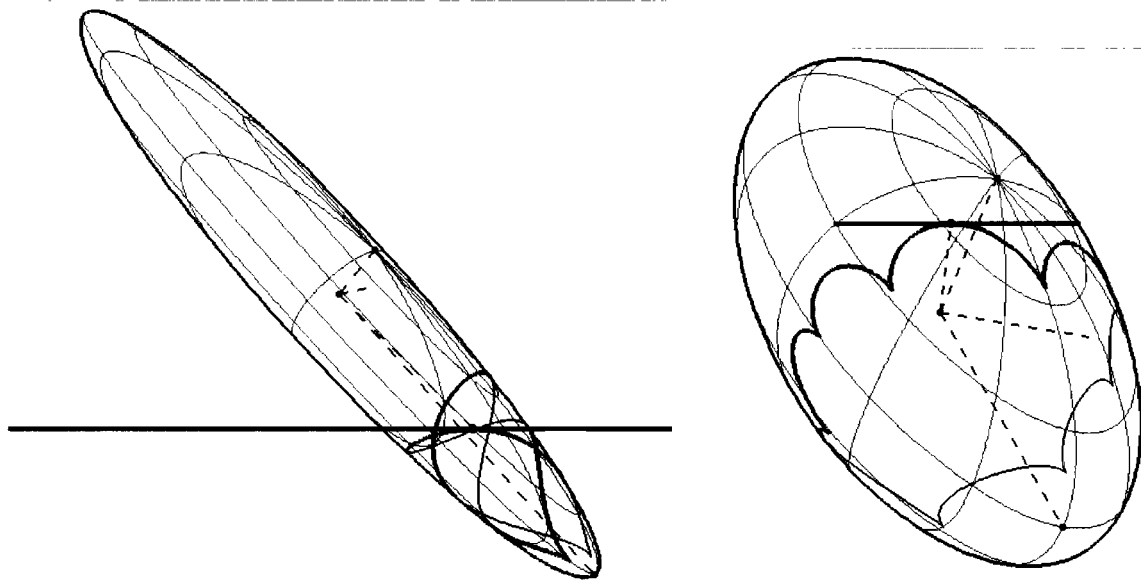
$$\begin{aligned}
 E_{11} = & \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[(A_3 - 1) \sqrt{\frac{(\varkappa - A_2)\sigma}{B_2}} \sin \lambda \sin \mu \cos \mu + \right. \\
 & \left. + (1 - A_1 + B_3 \sin^2 \lambda) \sqrt{\frac{(\varkappa - A_1)(A_3 - \sigma)\varkappa}{(1 - \sigma)B_2}} \cos \lambda \right], \\
 E_{21} = & \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[(1 - A_3) \sqrt{\frac{(A_1 - \varkappa)\sigma}{B_1}} \cos \lambda \sin \mu \cos \mu + \right. \\
 & \left. + (1 - A_2 - B_3 \cos^2 \lambda) \sqrt{\frac{(\sigma - A_3)(\varkappa - A_2)\varkappa}{(1 - \sigma)B_1}} \sin \lambda \right], \\
 E_{31} = & \frac{1}{\varkappa - \sigma} \left[-\sqrt{\frac{(A_3 - 1)(\sigma - A_3)(\varkappa - A_1)(\varkappa - A_2)\sigma}{B_1 B_2}} \sin \mu + \right. \\
 & \left. + B_3 \sqrt{\frac{(A_3 - 1)(\sigma - 1)\varkappa}{B_1 B_2}} \sin \lambda \cos \lambda \cos \mu \right].
 \end{aligned}$$

4. Построение компьютерной визуализации движения тела. Алгоритм визуализации движения аналогичен приведенному в работе [2]. По найденным наборам значений переменных $\lambda_i, \mu_i, \quad i = 0, \dots, N$ вычисляем координаты точек неподвижного и подвижного годографов. Посредством матрицы перехода $E(\lambda_i, \mu_i)$, определенной в момент времени t_i , пересчитывая координаты подвижного годографа в неподвижный базис $Oe_1^0 e_2^0 e_3^0$, получим i -й кадр процесса движения. Выбирая подходящий ракурс, проектируем кадры на картинную плоскость. Для достижения большей наглядности будем изображать и само движущееся тело, представляя его трехосным эллипсоидом, подобным главному центральному эллипсоиду инерции, как описано в работе [3]. Процесс движения представляется посредством последовательной смены кадров на экране.



a) $n_1 = 1, n_2 = 3, T = 13.379,$
 $A_1 = 0.2, A_2 = 4.47, A_3 = 4.6.$

б) $n_1 = 1, n_2 = 2, T = 9.207,$
 $A_1 = 0.2, A_2 = 2.091, A_3 = 2.2.$

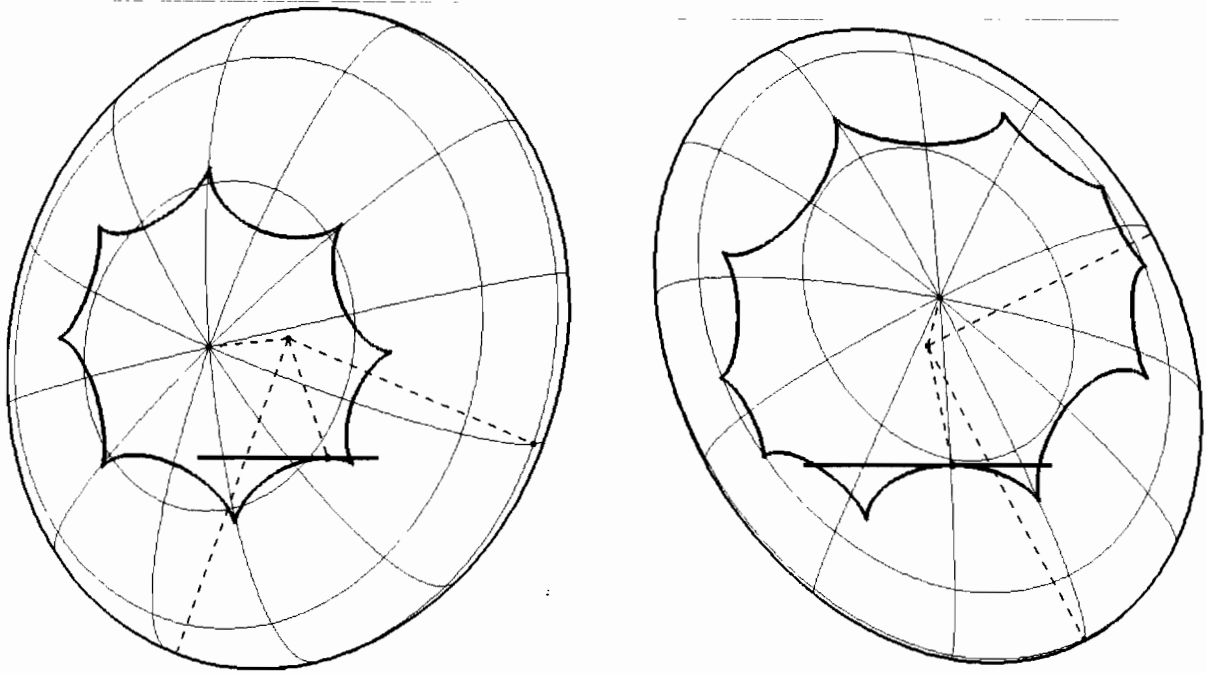


в) $n_1 = 1, n_2 = 4, T = 17.677,$
 $A_1 = 0.2, A_2 = 7.832, A_3 = 8.$

г) $n_1 = 4, n_2 = 5, T = 26.419,$
 $A_1 = 0.2, A_2 = 1.045, A_3 = 1.2.$

Рис. 1. Положение подвижного годографа на неподвижном. Случай I.

На рисунках представлены варианты периодических движений (по одному кадру), указаны соответствующие значения параметров A_1, A_2, A_3, n_1, n_2 и период T . К случаю I относятся варианты а - г рис.1. Здесь пояс, заключающий подвижный годограф, охватывает большую полуось эллипсоида, лежащую на e_1 .



а) $n_1 = 3, n_2 = 4, T = 19.629,$
 $A_1 = 0.5, A_2 = 0.71, A_3 = 1.196.$

б) $n_1 = 3, n_2 = 5, T = 26.742,$
 $A_1 = 0.5, A_2 = 0.89, A_3 = 1.382.$

Рис. 2. Положение подвижного годографа на неподвижном. Случай II.

Варианты а - б рис.2 относятся к случаю II, где подвижный годограф охватывает меньшую полуось, направленную по e_3 .

1. Харламов А.П. Движение по инерции тела, имеющего неподвижную точку и подчиненного неголономной связи // Механика твердого тела.- 1995.- Вып.27.- С.21-31.
2. Харламов М.П. О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Там же.- 1981.- Вып.13.- С.10-14.
3. Харламов А.П. Об изображении движущегося твердого тела при построении компьютерной визуализации полных решений задач динамики // Там же.- 1999.- Вып.28.- С.85-88.