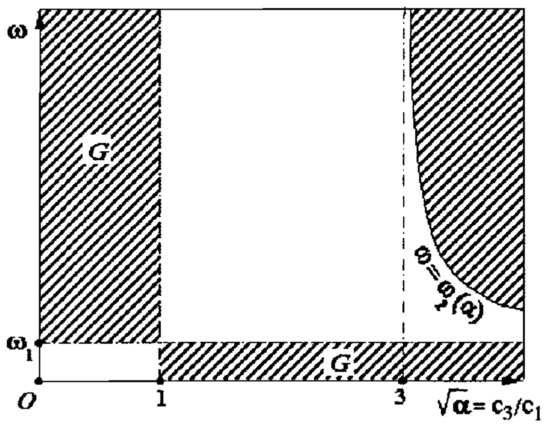

Рис. 3

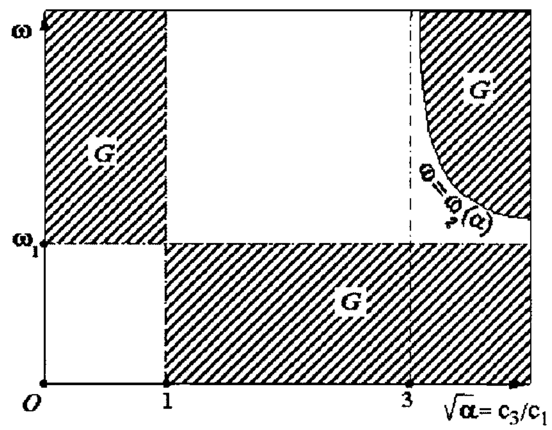

Рис. 4

Необходимо отметить, что для каждого значения тока I значение $\omega_2 = \omega_2(\alpha)$ (см. рис. 3, 4) таково, что:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \omega_2(\alpha) = \omega_1, \quad \lim_{\alpha \to 9+0} \omega_2(\alpha) = +\infty.$$

1. *Богоявленский А.А.* Динамика твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной магнитной жидкостью // Прикл. математика и механика. – 1983. – **47**, вып. 3. – С. 440–445.
2. *Румянцев В.В.* Устойчивость вращений твердого тела с эллипсоидальной полостью заполненной жидкостью // Там же. – 1957. – **21**, вып. 6. – С. 740–748.
3. *Савченко А.Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. – Киев: Наук. думка, 1977. – 160 с.

Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, Киев
Получено 30.11.99

УДК 62.534(031)

©2000. **И.А. Мухаметзянов**

О ПОСТРОЕНИИ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ

Строится семейство функций Ляпунова для более широкого класса материальных систем, включающего в себя, кроме механических, системы немеханической природы. Рассмотрены некоторые применения этих функций.

В работе [4] было построено семейство функций Ляпунова для исследования устойчивости "в малом" невозмущенного движения механических систем. В работе [5] этот подход был применен для построения механических систем, обладающих асимптотически устойчивым "в целом" программным движением. В данной работе[1] эти результаты распространяются на более широкий класс материальных систем, включающих в себя, кроме механических, также и системы немеханической природы. Кроме того, здесь построенное семейство функций Ляпунова применяется для улучшения качества переходного процесса путем оптимального управления, в частности, при стабилизации программного движения тела с одной неподвижной точкой.

1. Построение семейства функций Ляпунова для исследования устойчивости по первому приближению. Пусть возмущенное движение материальной сис-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант 9901.01.193).

темы описывается следующими векторными уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&A_1(x_1,\dot{x}_1,x_2,t)\ddot{x}_1 = B_1(x_1,\dot{x}_1,x_2,t),\\
&N_1(x_1,\dot{x}_1,x_2,t)\dot{x}_2 = K_1(x_1,\dot{x}_1,x_2,t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где A_1, N_1 — $(n\times n)$ и $(m\times m)$ - матрицы, x_1, B_1 — n–мерные, а x_2, K_1 — m–мерные векторы.

Элементы матриц A_1, N_1 и векторов B_1, K_1 предполагаются ограниченными и непрерывно дифференцируемыми в некоторой ограниченной области $G\{x,\dot{x}\}$, включающей $x_1=0$, $\dot{x}_1=0$, $x_2=0$ при $t\geq t_0$. Кроме того предполагается $\det^2|A_1|>\delta_1$, $\det^2|N_1|>\delta_2$ в области G при $t\geq t_0$,где δ_1 и δ_2 — некоторые положительные постоянные. Эти условия необходимы для обеспечения существования и единственности решений уравнений (1) в области G при $t\geq t_0$ и для других целей, достигаемых ниже.

Заметим, что здесь, в отличие от механических систем, матрицы A_1, N_1 зависят от $\dot{x}_1$ и могут не быть симметрическими и определенно–положительными.

Для того, чтобы симметризовать и сделать определенно–положительными эти матрицы, можно умножать уравнения (1), соответственно, на транспонированные матрицы $A_1^{\text{т}}$ и $N_1^{\text{т}}$. При этом уравнения (1) примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&A(x_1,\dot{x}_1,x_2,t)\ddot{x}_1 = B(x_1,\dot{x}_1,x_2,t),\\
&N(x_1,\dot{x}_1,x_2,t)\dot{x}_2 = K(x_1,\dot{x}_1,x_2,t),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $A=A_1^{\text{т}}A_1$, $N=N_1^{\text{т}}N_1$ — определенно-положительные и симметрические матрицы, $B=A_1^{\text{т}}B_1$, $K=N_1^{\text{т}}R_1$ — n– и m–мерные векторы соответственно.

Введем замену

$$
\dot{x}_1 = y + f(x_1,t), \qquad f(0,t)=0, \tag{3}
$$

где $f(x_1,t)$ — произвольная n–мерная вектор–функция с ограниченными и дифференцируемыми элементами, допускающая бесконечно малый высший предел. Умножая первое уравнение (2) скалярно на вектор $y=\dot{x}_1-f(x_1,t)$, а второе – на вектор x_2, и затем складывая их, получим

$$
x_2^{\text{т}}N\dot{x}_2 + y^{\text{т}}A\ddot{x}_1 = y^{\text{т}}B + x_2^{\text{т}}K.
$$

После подстановки $\ddot{x}_1=\dot{y}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)y+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)f(x_1,t)+\dfrac{\partial f}{\partial t}$ получим

$$
x_2^{\text{т}}N\dot{x}_2 + y^{\text{т}}A\dot{y} = y^{\text{т}}B - y^{\text{т}}A\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)y - y^{\text{т}}A\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)f+\frac{\partial f}{\partial t}\right] + x_2^{\text{т}}K.
$$

Представляя второй член в левой части этого уравнения в виде

$$
y^{\text{т}}A\dot{y} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(y^{\text{т}}Ay\right) - \frac{1}{2}\left(y^{\text{т}}\frac{dA}{dt}y\right),
$$

получим

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x_2^{\text{т}}Nx_2 + y^{\text{т}}A\dot{y}\right) = y^{\text{т}}B - y^{\text{т}}A\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)y - y^{\text{т}}A\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)f+\frac{\partial f}{\partial t}\right] +
$$

$$+\frac{1}{2}\left(y^{\text{т}}\frac{dA}{dt}y\right)+x_2^{\text{т}}K+\frac{1}{2}x_2^{\text{т}}\frac{dN}{dt}x_2. \tag{4}$$

Предположим, что B, K, f разложимы в сходящиеся степенные ряды по x_1, $\dot{x}_1$, x_2. Члены первого приближения этих векторов выражаются так:

$$f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 x_1,\ B=\left(\frac{\partial B}{\partial \dot{x}_1}\right)_0 \dot{x}_1+\left(\frac{\partial B}{\partial x_1}\right)_0 x_1+\left(\frac{\partial B}{\partial x_2}\right)_0 x_2,$$

$$K=\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1}\right)_0 \dot{x}_1+\left(\frac{\partial K}{\partial x_1}\right)_0 x_1+\left(\frac{\partial K}{\partial x_2}\right)_0 x_2.$$

Тогда $y^{\text{т}}B = y^{\text{т}}\left(\frac{\partial B}{\partial \dot{x}_1}\right)_0 \dot{x}_1 + y^{\text{т}}\left(\frac{\partial B}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + x_2^{\text{т}}\left(\frac{\partial B}{\partial x_2}\right)_0^{\text{т}} y$, $\quad x_2^{\text{т}}K = \dot{x}_1^{\text{т}}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1}\right)_0^{\text{т}}\dot{x}_2+$ $+x_1^{\text{т}}\left(\frac{\partial K}{\partial x_1}\right)_0^{\text{т}} x_2 + x_2^{\text{т}}\left(\frac{\partial K}{\partial x_2}\right)_0 x_2$.

Сохраняя в правой части (4) члены не выше второго порядка малости, и заменяя в правой части вектор y на $[\dot{x}_1 - H(t)x_1]$, где $H(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x_2^{\text{т}}Nx_2+y^{\text{т}}Ay\right)=-\dot{x}_1^{\text{т}}\Gamma\dot{x}_1-\dot{x}_1^{\text{т}}(\Gamma_1+\Gamma H+\Gamma^{\text{т}}H)x_1-x_1^{\text{т}}H^{\text{т}}(\Gamma H-\Gamma_1)x_1+$$

$$+x_2^{\text{т}}\left[\left(\frac{\partial K}{\partial x_2}\right)_0+\frac{1}{2}\frac{dN}{dt}_0\right]x_2+\dot{x}_1^{\text{т}}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1}\right)_0^{\text{т}}x_2-x_1^{\text{т}}H^{\text{т}}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1}\right)_0^{\text{т}}x_2+$$

$$+x_2^{\text{т}}\left(\frac{\partial B}{\partial x_2}\right)_0^{\text{т}}\dot{x}_1-x_2^{\text{т}}\left(\frac{\partial B}{\partial x_2}\right)_0^{\text{т}}Hx_1,$$

где $\Gamma = AH-\left(\frac{\partial B}{\partial \dot{x}_1}\right)_0-\frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dt}\right)_0$, $\quad\Gamma_1=A(H^2+\dot{H})-\left(\frac{\partial B}{\partial \dot{x}_1}\right)_0 H-\left(\frac{\partial B}{\partial x_1}\right)_0$.

Из матриц первого и второго членов справа выделим симметрические и кососимметрические части

$$\Gamma=D+G,\qquad \Gamma_1+\Gamma H+\Gamma^{\text{т}}H=C+E,$$

где D, C — симметрические, а G, E — кососимметрические части матриц. Перенеся в левую часть член $-\dot{x}_1^{\text{т}}Cx_1$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(y^{\text{т}}Ay+x_2^{\text{т}}Nx_2+x_1^{\text{т}}Cx_1\right)=-\dot{x}_1^{\text{т}}D\dot{x}_1-\dot{x}_1^{\text{т}}Ex_1-x_1^{\text{т}}\left[H^{\text{т}}(\Gamma H-\Gamma_1)-\frac{\partial\dot{C}}{\partial 2}\right]x_1+$$

$$+x_2^{\text{т}}\left[\left(\frac{\partial K}{\partial x_2}\right)_0+\frac{1}{2}\left(\frac{dN}{dt}\right)_0\right]x_2+\dot{x}_1^{\text{т}}\left[\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1}\right)_0^{\text{т}}+\left(\frac{\partial B}{\partial x_2}\right)_0\right]x_2- \tag{5}$$

$$-\dot{x}_1^{\text{т}}H^{\text{т}}\left[\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1}\right)_0^{\text{т}}+\left(\frac{\partial B}{\partial x_2}\right)_0\right]x_2.$$

При получении (5) учитывались следующие соотношения:

$$\dot{x}_1^{\mathrm{T}} G \dot{x}_1 \equiv 0, \qquad \dot{x}_1^{\mathrm{T}} C x_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\dot{x}_1^{\mathrm{T}} C x_1\Big) - \frac{1}{2} x_1^{\mathrm{T}} \dot{C} x_1.$$

Матрица H имеет n^2 произвольных элементов. Следовательно, функцию $V = \frac{1}{2}(y^{\mathrm{T}} A y + x_2^{\mathrm{T}} N x_2 + x_1^{\mathrm{T}} C x_1)$, зависящую от них, можно рассматривать в качестве искомого семейства функций Ляпунова, так как правая часть (5), являющаяся полной производной по t от функции V, есть квадратичная форма по x_1, $\dot{x}_1$, x_2 с матрицей, диагональные элементы которой тождественно не равняются нулю, чего нельзя добиться при $H \equiv 0$.

Таким образом, имеется возможность получения целого семейства критериев асимптотической устойчивости невозмущенного движения по первому приближению, пользуясь лишь обобщенными критериями Сильвестра [3].

2. Построение систем асимптотически устойчивого "в большом" программного движения. Введем в правую часть системы (2) векторы управления Q_1 и Q_2. Получим

$$\begin{aligned} A(x_1, \dot{x}_1, x_2, t)\ddot{x}_1 &= B(x_1, \dot{x}_1, x_2, t) + Q_1, \\ N(x_1, \dot{x}_1, x_2, t)\dot{x}_2 &= K(x_1, \dot{x}_1, x_2, t) + Q_2. \end{aligned} \tag{6}$$

При замене $\dot{x}_1$ на y по формуле (3) скалярное умножение первого уравнения (6) на y, а второго – на x_2 приведет к следующему аналогу уравнения (4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x_2^{\mathrm{T}} N x_2 + y^{\mathrm{T}} A y) = y^{\mathrm{T}} \Bigg\{ Q_1 + B - A\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) y - A\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) f + \frac{\partial f}{\partial t}\right] + \\ + \frac{1}{2}\frac{dA}{dt} y \Bigg\} + x_2^{\mathrm{T}}\Big(K + \frac{1}{2}\frac{dN}{dt} x_2 + Q_2\Big). \end{aligned} \tag{7}$$

Если векторы Q_1, Q_2 выбрать в виде

$$\begin{aligned} Q_1 = -Dy - F_1 x_1 - B + A\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) y + A\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) f + \frac{\partial f}{\partial t}\right] - \frac{1}{2}\frac{dA}{dt} y, \\ Q_2 = -K - \frac{1}{2}\frac{dN}{dt} x_2 - F_2 x_2, \end{aligned} \tag{8}$$

то получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(x_2^{\mathrm{T}} N x_2 + y^{\mathrm{T}} A y + x_1^{\mathrm{T}} F_1 x_1\Big) = -y^{\mathrm{T}} D y + \left(f^{\mathrm{T}} F_1 + x_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial \dot{F}_1}{\partial 2}\right) x_1 - x_2^{\mathrm{T}} F_2 x_2, \tag{9}$$

где D, F_1, F_2 — симметрические определенно–положительные матрицы.

Функция $\Big(x_2^{\mathrm{T}} N x_2 + y^{\mathrm{T}} A y + x_1^{\mathrm{T}} F_1 x_1\Big)$ построена определенно-положительной при всех x_1, $\dot{x}_1$, x_2, t, допускающей бесконечно малый высший и бесконечно большой низший пределы. Следовательно, в случае определенной отрицательности функции $\Big(f^{\mathrm{T}} F_1 + x_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial \dot{F}_1}{\partial 2}\Big) x_1$ правая часть (9) будет определенно–отрицательной по x_1, $\dot{x}_1$, x_2 и при этом программное состояние $x_1 = \dot{x}_1 = 0$, $x_2 = 0$ системы (6) будет стабилизировано "в большом". Если приведенный подход применить для стабилизации программного состояния "в целом", то необходимо иметь в виду некоторые дополнительные условия. Выясним эти условия. Для этого обратим внимание на правые части уравнений (8), которые имеют члены $\frac{1}{2}\frac{dA}{dt} y$ и $\frac{1}{2}\frac{dN}{dt} x_2$, содержащие старшие производные $\ddot{x}_1$ и $\dot{x}_2$.

Заметим, что в уравнениях первого приближения эти производные отсутствуют, так как члены с ними имеют более высокий порядок малости. Следовательно, при наличии этих членов, вообще говоря, речь может идти только об устойчивости в ограниченной области начальных возмущений. Если же матрицы A_1, N_1 явно не зависят от $\dot{x}_1$, а матрица N_1 еще и от x_2, то правые части (8) не содержат старших производных. При этом векторы Q_1 и Q_2 обеспечивают условия асимптотической устойчивости невозмущенного состояния системы "в целом".

Для того чтобы, несмотря на явное содержание в A_1 и N_1 векторов $\dot{x}_1$ и x_2, построить Q_1 и Q_2 так, чтобы невозмущенное состояние системы было асимптотически устойчивым "в целом", можно предложить следующую схему.

Умножим уравнения (1), соответственно, на неособенные матрицы AA_1^{-1} и NN_1^{-1}, где $A(x_1, x_2, t)$, $N(x_1, t)$ — произвольные ограниченные и имеющие ограниченные производные по всем переменным при всех x_1, x_2, $t \geq t_0$ определенно–положительные симметрические матрицы, удовлетворяющие обобщенным критериям Сильвестра [3]. Тогда уравнения (1) при введении в правую часть "обобщенных сил" управления Q_1 и Q_2 принимают следующий вид:

$$A(x_1, x_2, t)\ddot{x}_1 = AA_1^{-1}B_1 + AA_1^{-1}Q_1,$$

$$N(x_1, t)\dot{x}_2 = NN_1^{-1}K_1 + NN_1^{-1}Q_2.$$

Умножая скалярно первое уравнение на y, а второе на x_2, получим аналог уравнения (7), из которого следует, что при значениях

$$\begin{gathered} Q_1 = -B_1 + A_1A^{-1}\left[-Dy - F_1x_1 + A\frac{\partial f}{\partial x_1} + A\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}f + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\frac{dA(x_1, x_2, t)}{dt}y\right], \\ Q_2 = -K_1 + N_1N^{-1}\left[-F_2x_2 - \frac{1}{2}\frac{dN(x_1, t)}{dt}x_2\right], \end{gathered} \tag{10}$$

получим уравнение вида (9).

При таком построении управлений условия существования и единственности решений системы (1) не нарушаются во всем фазовом пространстве при всех $t \geq t_0$.

3. Повышение качества переходного процесса механической системы оптимальным управлением. Рассмотрим механическую систему

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(q, \dot{q}, t),$$

где $T = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}A(q,t)\dot{q} + \dot{q}^{\mathrm{T}}a(q,t) + \frac{1}{2}a_0(q,t)$.

В работе [5] показано, что при выборе $f = H(t)x$ и вектора обобщенных сил Q в виде

$$Q = -Dy - Fx + \frac{1}{2}A'y - \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_2'}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial A(q_0 + x, t)}{\partial t}y - GHx + \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_0}{\partial x} + \frac{dAHx}{dt}$$

система обладает программным движением $q_0(t)$, стабилизированным "в целом".

Здесь

$T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}A\dot{q}$, A' — $(n \times n)$-матрица с элементами:

$a'_{ij} = x^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x}$, a_{ij} — элемент матрицы A,

$y = \dot{x} - H(t)x$, $H(t)$ — произвольная ограниченная $(n \times n)$-матрица с ограниченной и непрерывной производной по t,

$b(x, t) = A(q_0 + x, t)\dot{q}_0 + a(q_0 + x, t)$, $b_0 = \dot{q}_0^{\mathrm{T}} A \dot{q}_0 + 2\dot{q}_0^{\mathrm{T}} a + a_0$,

G — кососимметрическая матрица с элементами

$g_{\nu i} = -\frac{\partial b_\nu}{\partial x_i} + \frac{\partial b_i}{\partial x_\nu}$, b_ν, b_i — элементы вектора b,

$T_2' = 12y^{\mathrm{T}} A y$, D и F — определенно–положительные симметрические матрицы.

При этом для отклонений $x = q - q_0(t)$ от программного движения имеет место функция Ляпунова

$$V = T_2' + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} F x$$

с производной по времени

$$\dot{V} = -y^{\mathrm{T}} D y + x^{\mathrm{T}} (H^{\mathrm{T}} F + \dot{F}2) x,$$

где $(H^{\mathrm{T}} F + \dot{F}2)$ — определенно–отрицательная матрица.

Следовательно, имеет место следующий показатель качества переходного процесса:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \left[y^{\mathrm{T}} D y - x^{\mathrm{T}} (H^{\mathrm{T}} F + \dot{F}2) x \right] dt = V_0,$$

где V_0 — значение V при $t = t_0$.

Для повышения качества переходного процесса добавим к вектору Q дополнительную составляющую $M(x, \dot{x}, t)u$, где M — $(n \times r)$-матрица, u — r–мерный вектор управления. Следуя [6], ищем подинтегральное выражение функционала качества оптимального управления в виде

$$W^0 = F_1(x, \dot{x}, t) + u^{\mathrm{T}} R(x, \dot{x}, t) u,$$

где R — $(r \times r)$ определенно–положительная ограниченная симметрическая матрица.

Построим функцию [2]:

$$B^0 = \dot{V} + u^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} y + F_1 + u^{\mathrm{T}} R u.$$

Из условия $\frac{\partial b^0}{\partial u} = 0$ получим $u^0 = -\frac{1}{2} R^{-1} M^{\mathrm{T}} y$, а из условия $B^0 = 0$

$$F_1 = -\dot{V} + 14 y^{\mathrm{T}} M R^{-1} M^{\mathrm{T}} y.$$

При этом имеем $W^0 = -\dot{V} + \frac{1}{2} y^{\mathrm{T}} M R^{-1} M^{\mathrm{T}} y$ и следующий критерий качества переходного процесса:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \left[y^{\mathrm{T}} D y - x^{\mathrm{T}} (H^{\mathrm{T}} F + \frac{\dot{F}}{2}) x + \frac{1}{2} y^{\mathrm{T}} M R^{-1} M^{\mathrm{T}} y \right] dt = V_0,$$

где V_0 — значение $V = T_2' + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} F x$ при $t = t_0$.

Таким образом, добавление к Q оптимального управления u^0 улучшило качество переходного процесса, так как величина функционала качества при $u = 0$

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \left[y^{\mathrm{T}} D y - x^{\mathrm{T}} (H^{\mathrm{T}} F + \frac{\dot{F}}{2}) x \right] dt$$

уменьшилась на $\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\infty} y^{\text{т}} M R^{-1} M^{\text{т}} y dt$.

В заключение заметим, что если задачу решать в рамках уравнений первого приближения, то члены $\left(\frac{1}{2}A'y - \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_2'}{\partial x}\right)$ второго порядка малости в выражении Q можно приравнять нулю. Если при этом от матриц H, D, F потребовать, чтобы $H = H^{\text{т}}$ и матрицы $\left(D - \frac{1}{2}\frac{\partial A(q_0,t)}{\partial t} + AH\right)$, $\left(F - AH^2 - \frac{dAH}{dt}\right)$ были определенно–положительными, то при условии определенной положительности матрицы

$$-\left(H^{\text{т}}F' + \frac{\dot{F}'}{2}\right), \qquad \text{где} \qquad F' = F - \frac{dAH}{dt} - AH^2$$

вектор Q можно построить в виде

$$Q = -Dy - Fx + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_0}{\partial x} - GHx.$$

4. Стабилизация программного движения тела с одной неподвижной точкой. Уравнение движения запишем в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q - \frac{\partial \Pi}{\partial q},$$

где $q^{\text{т}}\{\alpha, \beta, \varphi\}$, Π — потенциальная энергия тела.

В данном случае кинетическая энергия имеет вид [1]:

$$T = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\beta}\cos\alpha\sin\varphi + \dot{\alpha}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\dot{\beta}\cos\alpha\cos\varphi - \dot{\alpha}\sin\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha\right)^2,$$

где I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции тела в неподвижной точке O.

Программу задаем в виде $\alpha = \alpha_0(t)$, $\beta = \beta_0(t)$, $\varphi = \varphi_0(t)$. Заменяя α, β, φ на $(\alpha_0 + x_1)$, $(\beta_0 + x_2)$, $(\varphi_0 + x_3)$, получим

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

где $T_2 = \frac{1}{2}\dot{x}^{\text{т}}A(q_0 + x, t)\dot{x}$, $T_1 = \dot{x}^{\text{т}}b(x,t)$, $T_0 = \frac{1}{2}b_0(x,t)$.

Элементы a_{ij} матрицы A, элементы b_i вектора b и функция T_0 выражаются в виде [6]:

$$a_{11} = I_1\cos^2(\varphi_0+x_3) + I_2\sin^2(\varphi_0+x_3), \qquad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)\cos(\alpha_0+x_1)\sin 2(\varphi_0+x_3),$$

$$a_{22} = \cos^2(\alpha_0 + x_1)[I_1\sin^2(\varphi_0 + x_3) + I_2\cos^2(\varphi_0 + x_3)],\ a_{13} = a_{31} = 0,\ a_{23} = I_3\sin(\alpha_0 + x_1),$$

$$a_{33} = I_3,\ b_1 = [I_1\cos^2(\varphi_0+x_3) + I_2\sin^2(\varphi_0+x_3)]\dot{\alpha}_0 + \frac{1}{2}(I_1 - I_2)\cos(\alpha_0+x_1)\sin 2(\varphi_0+x_3)\dot{\beta}_0,$$

$$b_2 = 12(I_1 - I_2)\cos(\alpha_0 + x_1)\sin 2(\varphi_0 + x_3)\dot{\alpha}_0 + \cos^2(\alpha_0 + x_1)[I_1\sin^2(\varphi_0 + x_3) +$$
$$+ I_2\cos^2(\varphi_0 + x_3)]\dot{\beta}_0 + I_3\sin(\alpha_0 + x_1)\dot{\varphi}_0, \quad b_3 = I_3\sin(\alpha_0 + x_1)\dot{\beta}_0 + I_3\dot{\varphi}_0,$$

$$T_0(t,x) = \frac{1}{2}\left\{[I_1\cos^2(\varphi_0 + x_3) + I_2\sin^2(\varphi_0 + x_3)]\dot{\alpha}_0^2 + \right.$$

$$+(I_1 - I_2)\cos(\alpha_0+x_1)\sin 2(\varphi_0+x_3)\dot{\alpha}_0\dot{\beta}_0 + \cos^2(\alpha_0+x_1)[I_1\sin^2(\varphi_0+x_3) + I_2\cos^2(\varphi_0+x_3)]\dot{\beta}_0 +$$

$$+I_3\sin(\alpha_0+x_1)\dot\beta_0\dot\varphi_0+I_3\dot\varphi_0^2\Big\}.$$

Дифференцируя эти выражения, получим

$$\frac{\partial b_1}{\partial t}=[I_1\cos^2(\varphi_0+x_3)+I_2\sin^2(\varphi_0+x_3)]\ddot\alpha_0+(I_2-I_1)\sin 2(\varphi_0+x_3)\dot\alpha_0\dot\varphi_0+$$

$$+\frac{1}{2}(I_1-I_2)\cos(\alpha_0+x_1)\sin 2(\varphi_0+x_3)\ddot\beta_0+\frac{1}{2}(I_2-I_1)\sin(\alpha_0+x_1)\sin 2(\varphi_0+x_3)\dot\alpha_0\dot\beta_0+$$

$$+(I_1-I_2)\cos(\alpha_0+x_1)\cos 2(\varphi_0+x_3)\dot\beta_0\dot\varphi_0,$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial t}=\frac{1}{2}(I_1-I_2)\cos(\alpha_0+x_1)\sin 2(\varphi_0+x_3)\ddot\alpha_0+\frac{1}{2}(I_2-I_1)\sin(\alpha_0+x_1)\sin 2(\varphi_0+x_3)\dot\alpha_0^2+$$

$$+[(I_1-I_2)\cos(\alpha_0+x_1)\cos 2(\varphi_0+x_3)+I_3\cos(\alpha_0+x_1)]\dot\alpha_0\dot\varphi_0+\cos^2(\alpha_0+x_1)[I_1\sin^2(\varphi_0+x_3)+$$

$$+I_2\cos^2(\varphi_0+x_3)]\ddot\beta_0+(I_1-I_2)\sin 2(\varphi_0+x_3)\cos^2(\alpha_0+x_1)\dot\beta_0\dot\varphi_0-$$

$$-[I_1\sin^2(\varphi_0+x_3)+I_2\cos^2(\varphi_0+x_3)]\sin 2(\alpha_0+x_1)\dot\alpha_0\dot\beta_0+I_3\sin(\alpha_0+x_1)\ddot\varphi_0,$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial t}=I_3\sin(\alpha_0+x_1)\ddot\beta_0+I_3\cos(\alpha_0+x_1)\dot\alpha_0\dot\varphi_0+I_3\ddot\varphi_0,$$

$$\frac{\partial T_0(t,x)}{\partial x_1}=\frac{1}{2}(I_2-I_1)\sin(\alpha_0+x_1)\sin 2(\varphi_0+x_3)\dot{alpha}_0\dot\beta_0-\frac{1}{2}[I_1\sin^2(\varphi_0+x_3)+$$

$$+I_2\cos^2(\varphi_0+x_3)]\sin 2(\alpha_0+x_1)\dot\beta_0^2+I_3\cos(\alpha_0+x_1)\dot\beta_0\dot\varphi_0,\ \ \frac{\partial T_0(t,x)}{\partial x_2}=0,$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_3}=\frac{1}{2}(I_2-I_1)\sin 2(\varphi_0+x_3)\dot\alpha_0^2+(I_1-I_2)\cos(\alpha_0+x_1)\cos 2(\varphi_0+x_3)\dot\alpha_0\dot\beta_0+$$

$$+\frac{1}{2}(I_2-I_1)\sin 2(\varphi_0+x_3)\cos^2(\alpha_0+x_1)\dot\beta_0^2.$$

Используя выражение вектора Q, приведенное в конце рассуждений п.3, получим

$$Q=-Dy-Fx+\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial T_0}{\partial x}+\frac{\partial \Pi}{\partial x}-GHx,$$

где $y=\dot x-H(t)x$, $H(t)$ — произвольная (3×3)–симметрическая матрица с ограниченными и непрерывными элементами. Симметрическая часть D' матрицы D, а также матрица F являются симметрическими положительно–определенными такими, что матрицы

$$\left[D'-\frac{1}{2}\frac{\partial A(q_0,t)}{\partial t}+AH\right],\qquad \text{и}\qquad (F-AH^2)$$

тоже являются определенно–положительными, а G – кососимметрическая матрица с элементами

$$g_{\nu i}=-\frac{\partial b_\nu}{\partial x_i}+\frac{\partial b_i}{\partial x_\nu}\quad (i\neq\nu=1,2,3).$$

При таком построении вектора Q будет иметь место заданное программное движение, стабилизированное в рамках уравнений первого приближения. Подставляя в выражение Q значения $\frac{\partial b}{\partial x}$ и $\frac{\partial T_0}{\partial x}$, вычисленные выше, получим три элемента искомого вектора Q.

При этом получим функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}[y^{\text{т}} A(q_0 + x, t) + x^{\text{т}} F x]$$

с производной по времени $\dot{V} = -y^{\text{т}} D y + x^{\text{т}}(H^{\text{т}} F + \dot{F}2)x$, где определенная отрицательность матрицы $(H^{\text{т}} F + \dot{F}2)$ достигается выбором матриц H и F.

Показателем качества переходного процесса при этом является

$$\int_{t_0}^{\infty} [y^{\text{т}} D y - x^{\text{т}}(H^{\text{т}} F + \dot{F}2)] dt = V_0, \qquad \text{где} \quad V_0 = V(t_0).$$

Если для улучшения качества переходного процесса добавить составляющую u^0 оптимального управления, то получим следующий улучшенный показатель:

$$\int_{t_0}^{\infty} [y^{\text{т}} D y - x^{\text{т}}(H^{\text{т}} F + \dot{F}2)x + \frac{1}{2} y^2] dt = V_0$$

при значении $u^0 = -\frac{1}{2} y$.

Заметим, что выражение потенциальной энергии зависит от характера силового поля и расположения центра масс тела. В случае однородного поля тяжести с переменной интенсивностью $g = g(t) \geq g_0 > 0$ и расположения центра тяжести тела на оси OZ имеет место

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = [-mg(t) z_0 \sin(\alpha_0 + x_1) \cos(\beta_0 + x_2) - mg(t) z_0 \cos(\alpha_0 + x_1) \sin(\beta_0 + x_2)],$$

где z_0 — координата центра тяжести.

Если центр тяжести лежит ниже неподвижной точки и ставится задача стабилизации вертикального вращения тела $\alpha_0 = \dot{\alpha}_0 = 0$, $\beta_0 = \dot{\beta}_0 = 0$, $\varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = \text{const}$, $z_0 < 0$, то потенциальная энергия выражается в виде

$$\Pi(x, t) = mg(t) z_0 (\cos x_1 \cos x_2 - 1)$$

и будет определенно–положительной по x_1 и x_2. При этом имеет место

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = [-mg(t) z_0 \sin x_1 \cos x_2 - mg(t) z_0 \cos x_1 \sin x_2 0].$$

В этом случае в качестве функции Ляпунова можно выбрать

$$V = \frac{1}{2}[y^{\text{т}} A(x, t) y + x^{\text{т}} F' x] + \Pi(x, t)$$

с производной по времени

$$\dot{V} = -y^{\text{т}} D y + x^{\text{т}}[H^{\text{т}} F' + \dot{F}'2]x + x^{\text{т}} H^{\text{т}} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + m\dot{g}(t) z_0 (\cos x_1 \cos x_2 - 1),$$

где $F' = F - dAHdt - AH^2$. При этом значение Q берется без $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ в виде

$$Q = -Dy - Fx + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial T_0}{\partial x} - GHx.$$

Если предположить, что $F = \text{const}$ и $H = \text{const}$, то требование к матрице F, заключающееся в положительной определенности матриц F' и $-(H^{\tau}F' + \dot{F}'2)$, заменяется на требование определенной положительности функций $(\frac{1}{2}x^{\tau}F'x + \Pi)$ и $-x^{\tau}H^{\tau}(F'x + \frac{\partial\Pi}{\partial x})-$ $-m\dot{g}(t)z_0(\cos x_1 \cos x_2 - 1)$, где $F' = F - AH^2$.

Заметим, что требование к матрице D о положительной определенности матрицы $(D' + AH)$ остается без изменения. Следует также отметить, что при $\dot{g}(t) \leq 0$ условия на выбор матрицы F являются более слабыми, чем прежде.

В частном случае, когда $D > 0$, $H = 0$, $F = 0$, имеет место [1]:

$$\frac{d}{dt}[\dot{x}^{\tau}A\dot{x} + \Pi(x,t)] = -\dot{x}^{\tau}D\dot{x} + m\dot{g}(t)z_0(\cos x_1 \cos x_2 - 1).$$

Следовательно, при наличии диссипации по $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ вертикальное положение оси $0Z$ при $z_0 < 0$ является асимптотически устойчивым.

1. *Безгласный С.П.* О стабилизации программных движений неавтономных управляемых механических систем – Канд. дисс., МГУ. – 1998. – С. 90–97.
2. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений./В кн.: Малкин И.Г. Теория устойчивости движения, Дополнение 4.– М.: Наука, 1966. – С. 475–515.
3. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. *Мухаметзянов И.А.* Построение одного семейства функций Ляпунова//Вестник РУДН, сер. Прикл. математика и информатика. – 1995. – **1**. – С. 9–12.
5. *Мухаметзянов И.А.* Построение систем асимптотически устойчивого в целом программного движения//Вестник РУДН, сер. Прикл. математика и информатика. – 1998. – 1. – С. 16–21.
6. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // Прикл. математика и механика. – 1970. – **34**, вып. 3. –С. 440–456.

Рос. университет дружбы народов, Москва

Получено 22.07.98

УДК 62-50

©2000. **А.Л. Зуев**

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА СО ЗНАКООТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ЗАДАЧАХ ЧАСТИЧНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Рассматривается задача стабилизации управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений по части переменных. Доказано, что если существует определенно - положительная по части переменных функция Ляпунова, для которой нижняя граница ее производных в силу системы является отрицательно-постоянной, то при некоторых дополнительных предположениях система является стабилизируемой по части переменных. При этом предлагается схема построения стабилизирующей обратной связи, с помощью которой решена задача одноосной стабилизации твердого тела под действием двух реактивных управляющих моментов.

1. Введение. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ - вектор управления; предполагается, что $\boldsymbol{f}_0(0) = \boldsymbol{0}$. Запишем вектор состояния системы (1) покомпонентно:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}),\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n_1},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n_2},\ (n_1 + n_2 = n). \tag{2}$$