УДК 531.36

©2000. **А.А. Игнатьев**

ЭКВИАСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается система дифференциальных уравнений, правые части которой почти периодические функции времени t. Доказано обобщение теоремы Румянцева-Озиранера на этот случай. Приведен механический пример приложения доказанной теоремы.

Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = X(x,t);\ x = (x_1, ..., x_n)^T,\ X = (X_1, ..., X_n)^T. \qquad (1)$$

Классический критерий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) по части переменных, полученный ранее [6,8], предполагает, что существует y-определенно положительная функция Ляпунова $V(x,t)$, а её производная dV/dt в силу уравнений (1) является y-определенно отрицательной функцией.

В прикладных механических задачах часто удается построить y-определенно положительную функцию $V(x,t)$, производная которой в силу уравнений (1) dV/dt лишь неположительна. Для такого случая была доказана [7,12] теорема об асимптотической устойчивости тривиального решения автономной системы уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = X(x). \qquad (2)$$

Было показано [5], что для общего случая неавтономных систем аналогичная теорема не верна. Ниже рассматривается более общий случай по сравнению с автономной системой: правые части системы (2) предполагаются почти периодическими функциями времени t. Доказывается, что решение $x = 0$ эквиасимптотически y-устойчиво (т.е $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно относительно начальных возмущений x_0).

По аналогии с введенными ранее обозначениями [9] обозначим через $x_1, ..., x_m$ $(m > 0, n = m + p, p \geq 0)$ переменные, по отношению к которым исследуется устойчивость решения $x = 0$ системы (1). Для удобства обозначим эти переменные через $y_i = x_i$ $(i = 1, ..., m)$, а остальные переменные – через $z_j = x_{m+j}$ $(j = 1, ..., p)$, т.е. представим векторы x и X в виде

$$x = (y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_p)^T \equiv (y, z)^T,\ X = (Y_1, ..., Y_m, Z_1, ..., Z_p)^T \equiv (Y, Z)^T.$$

Обозначим далее

$$\|y\| = (\sum_{i=1}^{m} y_i^2)^{1/2},\ \|z\| = (\sum_{j=1}^{p} z_j^2)^{1/2},\ \|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} = (\|y\|^2 + \|z\|^2)^{1/2}.$$

Введем определения.

Определение 1[1]. *Непрерывную функцию $f(t)$ со значениями в R^n называют почти периодической функцией, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $L = L(\varepsilon)$,такое, что в любом промежутке $[\alpha, \alpha + L(\varepsilon)]$, $\alpha \in (-\infty; +\infty)$ найдется, по крайней мере, одно число τ, при котором*

$$\|f(t) - f(t+\tau)\| < \varepsilon, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Определение 2[2]. *Непрерывную функцию $f(x,t)$ ($x \in R^s$, $-\infty < t < +\infty$) со значениями в R^n называют равномерно почти периодической, если каждому $\varepsilon > 0$ и каждому $r > 0$ соответствует такое $L = L(\varepsilon, r)$, что в любом промежутке $[\alpha, \alpha + L(\varepsilon, r)]$, $\alpha \in (-\infty; +\infty)$ найдется, по крайней мере, одно число τ, при котором*

$$\|f(x,t) - f(x, t+\tau)\| < \varepsilon, \quad -\infty < t < +\infty, \ \|x\| < r.$$

Определение 3[10]. *Движение $x = 0$ называется эквиасимптотически y - устойчивым, если для каждого $t_0 \geq 0$ существует такое $\delta(t_0) > 0$, что $\|y(t; t_0, x_0)\| \to 0$ равномерно по x_0, $\|x_0\| < \delta(t_0)$ при $t \to \infty$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon, t_0) > 0$, при котором из $\|x_0\| < \delta$ следует $\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + T$.*

Рассмотрим уравнения возмущенного движения (1). Функции $X(x,t)$ предполагаются определенными, непрерывными и удовлетворяющими условию Липшица по x в области

$$t \in R, \ \|y\| < H, \quad \|z\| < +\infty, \ H = \text{const}. \tag{3}$$

Предположим также, что решения системы (1) z-продолжимы. Это значит [9], что любое решение $x(t)$ определено при всех $t \geq 0$, для которых $\|y(t)\| \leq H$.

Теорема. *Пусть уравнения возмущенного движения (1) таковы, что*

1) каждое решение системы (1), начинающееся в некоторой окрестности точки $x = 0$, ограничено;

2) можно построить почти периодическую по t, y – определенно-положительную, непрерывно дифференцируемую функцию $V(x,t)$, удовлетворяющую неравенству $dV/dt \leq 0$ в области (3), причем $dV/dt = 0$ при $x \in M$, $dV/dt < 0$ при $x \notin M$;

3) множество $A = \{x : y = 0\}$ – инвариантно;

4) множество $M \setminus A$ не содержит целых полутраекторий системы (1) $x(x_0, t_0, t)$, $(t_0 < t < +\infty)$.

Тогда решение $x = 0$ эквиасимптотически y-устойчиво.

Перед тем как доказывать теорему, сформулируем ряд вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Функции $X(x,t)$ и $V(x,t)$ равномерно почти периодичны.*

Лемма доказана ранее [2].

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует неограниченно возрастающая последовательность ε-почти-периодов $\{\tau_i\}$ общих для функций $X(x,t)$ и $V(x,t)$:*

$$\|X(x,t) - X(x, t+\tau_i)\| < \varepsilon, \ |V(x,t) - V(x, t+\tau_i)| < \varepsilon.$$

Доказательство леммы следует из теоремы Кронекера [4].

Лемма 3. *Пусть $x(x_0, t_0, t)$ $(t_0 < t < +\infty)$ – полутраектория системы (1), удовлетворяющая начальному условию $x(x_0, t_0, t_0) = x_0$ и лежащая в области (3), а $\{\varepsilon_k\}$ – последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю; $\{\tau_k\}$ – некоторая последовательность ε_k-почти-периодов вектор-функции $X(x,t)$ (где каждому ε_k соответствует ε_k- почти-период τ_k), причем $\{\tau_k\}$ монотонно возрастает, и $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \|x(x_k, t_0, t^*) - x(x_0, t_0, t^* + \tau_k)\| = 0, \ x_k = x(x_0, t_0, t_0 + \tau_k), \tag{4}$$

где t^* – некоторый момент времени, больший чем t_0.

Доказательство леммы приведено в [11].

Доказательство теоремы. Воспользуемся методом, изложенным в [3,11]. Отметим, что y-устойчивость нулевого решения следует из теоремы В.В. Румянцева [8]. Можно показать, что $\|y(x_0,t_0,t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Предположим обратное. Функция $V(x(x_0,t_0,t),t)$ монотонно не возрастает, так как $dV/dt \le 0$. Поэтому существует предел $\lim_{t\to\infty} V(x(x_0,t_0,t),t) = V_0$ и $V(x(x_0,t_0,t),t) \ge$ $\ge V_0$ при любом $t > t_0$. Из сделанного предположения следует, что $V_0 \ne 0$. Возьмем теперь $\{\varepsilon_i\}$ – последовательность положительных чисел, монотонно стремящуюся к нулю. Для любого ε_i существует последовательность почти-периодов $\tau_{i1}, \tau_{i2}, ..., \tau_{in}...$, стремящаяся к бесконечности для функций $V(x,t)$ и $X(x,t)$. Можно записать, что

$$|V(x,t) - V(x,t+\tau_{in})| < \varepsilon_i, \qquad \|X(x,t) - X(x,t+\tau_{in})\| < \varepsilon_i,$$

$$\|x\| \le \varepsilon,\ -\infty < t < +\infty.$$

Будем считать, что $\tau_{in} < \tau_{i+1,n}$ и обозначим $\tau_{kk} = \tau_k$. Рассмотрим последовательность точек $x_k = x(x_0,t_0,t_0+\tau_k)$ $(k=1,2,...)$. По условию 1 теоремы эта последовательность ограничена. Из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для простоты считаем, что последовательность $\{x_k\}$ сама сходится. Пусть x^* – предельная точка последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Из предположения следует, что $x^* \ne 0$. Используя то, что функция $V(x,t)$ непрерывна и почти периодична, можно записать

$$V(x^*,t_0) = \lim_{k\to\infty} V(x_k, t_0+\tau_k) = \lim_{k\to\infty} V(x(x_0,t_0,t_0+\tau_k), t_0+\tau_k) = V_0.$$

Рассмотрим полутраекторию $x(x^*,t_0,t)$ $(t_0 < t < \infty)$. Покажем, что на ней должны существовать точки, где $dV(x(x^*,t_0,t),t)/dt < 0$. Предположим обратное, т.е. что $dV(x(x^*,t_0,t),t)/dt = 0$ при $t > t_0$. Значит $x(x^*,t_0,t) \in M$. Если $x(x^*,t_0,t) \in A$, то получаем требуемое условие теоремы, если $x(x^*,t_0,t) \notin A$, то $x(x^*,t_0,t) \in M \setminus A$, и значит, по условию 4) теоремы на этой траектории должны существовать точки, где $dV(x(x^*,t_0,t),t)/dt < 0$, т.е. можно указать $t^* > t_0$, такое, что $V(x(x^*,t_0,t^*),t^*) = V_1 <$ $< V_0$.

Вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных имеем

$$x(x^*,t_0,t^*) = \lim_{k\to\infty} x(x_k,t_0,t^*).$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} V(x(x_k,t_0,t^*),t^*) = V_1. \tag{5}$$

Так как $X(x,t)$ – функция почти периодическая и выполнено условие (4), получаем, что

$$\|x(x_k,t_0,t^*) - x(x_0,t_0,t^*+\tau_k)\| \le \gamma_k,\ \lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0. \tag{6}$$

Из того, что $V(x,t)$ – равномерно почти периодическая функция, вытекает, что

$$|V(x,t^*) - V(x,t^*+\tau_k)| < \varepsilon_k. \tag{7}$$

Из соотношений (5) и (6) следует, что

$$|V(x(x_0,t_0,t^*+\tau_k),t^*) - V_1| < \eta_k, \qquad \lim_{k\to\infty} \eta_k = 0. \tag{8}$$

Используя неравенство (7), имеем

$$|V(x(x_0,t_0,t^*+\tau_k),t^*)-V(x(x_0,t_0,t^*+\tau_k),t^*+\tau_k)|<\varepsilon_k. \tag{9}$$

Складывая неравенства (8) и (9), получаем

$$|V(x(x_0,t_0,t^*+\tau_k),t^*+\tau_k)-V_1|<\eta_k+\varepsilon_k;\ \eta_k+\varepsilon_k\to 0 \text{ при } k\to\infty. \tag{10}$$

Но

$$\lim_{k\to\infty} V(x(x_0,t_0,t^*+\tau_k),t^*+\tau_k)=V_0. \tag{11}$$

Соотношения (10) и (11) противоречат друг другу, так как $V_1<V_0$. Следовательно, предположение о том, что $V_0\neq 0$, неверно, т.е. $V_0=0$. Так как функция $V(x,t)$ y-определенно положительна, то

$$a(\|y\|)\le V(x,t), \tag{12}$$

где a – некоторая функция Хана [10]. Итак, $V(x,t)\to 0$ при $t\to\infty$. Используя оценку (12), получаем, что $a(\|y(x_0,t_0,t)\|)\to 0$ при $t\to\infty$. Следовательно, $\|y(x_0,t_0,t)\|\to 0$.

По условию теоремы $V(x,t)\ge a(\|y(x_0,t_0,t)\|)$. Выше было показано, что $\lim_{t\to\infty}V(x(x_0,t_0,t),t)=0$. Вывод предельного соотношения $\|y(x_0,t_0,t)\|\to 0$ при $t\to\infty$ равномерно относительно x_0, принадлежащего δ-окрестности начала координат следует из [9], где число $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$ определяется из условия y-устойчивости: $\|x_0\|\le\delta\to\|y(t)\|<\varepsilon$ для любого $t>t_0$. Это и доказывает эквиасимптотическую y-устойчивость нулевого решения системы (1).

Пример. Приведем механический пример приложения изложенной выше теоремы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую движение симметричного твердого тела, закрепленного в центре масс при наличии сил сопротивления среды:

$$A\dot p+(C-A)qr=-p^{2k-1}, A\dot q+(A-C)pr=-q^{2n-1}, C\dot r=M(t,r),$$

$$\dot\gamma_1=r\gamma_2-q\gamma_3, \dot\gamma_2=p\gamma_3-r\gamma_1, \dot\gamma_3=q\gamma_1-p\gamma_2,$$

где $M(t,r)$ – почти периодическая функция времени t; k,n – натуральные числа.

Третье уравнение определяет r как функцию времени $r(t,r_0,t_0)$. Будем рассматривать движения, соответствующие классу ограниченных на $t\in[t_0,+\infty)$ функций $r(t,r_0,t_0)$. Заметим также, что функции $\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t)$ ограничены, т.к. они являются направляющими косинусами.

Уравнения движения допускают решение

$$p=0;\ q=0;\ r=r(t,r_0,t_0);\ \gamma_1=0;\ \gamma_2=0;\ \gamma_3=1,$$

описывающее неравномерное вращение тела вокруг вертикальной оси симметрии. Составим уравнения возмущенного движения, полагая

$$\gamma_4=\gamma_3-1;\ r_1=r-r(t,r_0,t_0)=r-r^0.$$

Получим

$$A\dot p+(C-A)q(r_1+r^0)=-p^{2k-1}, A\dot q+(A-C)p(r_1+r^0)=-q^{2n-1}, C\dot r_1=M_1(t,r_1),$$

$$\dot\gamma_1=(r_1+r^0)\gamma_2-q(1+\gamma_4), \dot\gamma_2=p(1+\gamma_4)-(r_1+r^0)\gamma_1, \dot\gamma_4=q\gamma_1-p\gamma_2.$$

Возьмем в качестве функции Ляпунова функцию $V = \frac{1}{2}A(p^2 + q^2)$.

$$\dot{V} = A(p\dot{p} + q\dot{q}) = -p^{2k} - q^{2n} \leq 0.$$

Обозначим $x = (p, q, r_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_4)$. Видим, что $\dot{V} = 0$ на множестве $M_1 = \{x : p = q = 0\}$. Нетрудно проверить, что множество $M_2 = \{x : p = q = 0\}$ инвариантно, а множество $M_1 \setminus M_2$ – пустое, и следовательно оно не содержит целых полутраекторий нашей системы. Используя все вышесказанное и применяя доказанную теорему заключаем, что тривиальное решение нашей системы эквиасимптотически устойчиво по отношению к переменным p, q.

1. *Зубов В.И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах.– Л.: Судпромгиз, 1962. – 631 с.
2. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
3. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
4. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. – М.: Гостехтеориздат, 1953. – 386 с.
5. *Матросов В.М.* Об устойчивости движения // там же.–1962.–**26**, вып. 5.– С. 885–895.
6. *Озиранер А.С., Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Прикл. математика и механика.–1972.–**36**, вып. 2.–С. 364–384.
7. *Озиранер А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных// Прикл. математика и механика.–1973.–**37**, вып. 4.– С. 659 – 665.
8. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных// Вестн. МГУ. Сер. мат., механ., физ., астроном., хим.–1957.–N 4.– С. 9–16.
9. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 253 с.
10. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
11. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 204 с.
12. *Rumyantsev V.V.* On the stability with respect to a part of the variables// Symp. math. Meccanica non-lineare e stabilita, 23–26 febbrario, 1970, L. – N.Y.: Acad. Press, 1971. –**6**. –P. 243–265.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 15.10.99

УДК 531.38

©2000. **В.И. Коваль**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ОДНОЙ СВЯЗКИ ДВУХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ С ЖИДКОСТЬЮ

Для одного случая последовательного расположения двух гироскопов Лагранжа с жидкостью в задаче об устойчивости равномерных вращений вокруг вертикали проанализирован весь набор достаточных условий устойчивости их движения. Показано влияние массы тела-носителя с жидкостью и положения точки его подвеса к первому гироскопу на значения угловой скорости последнего, соответствующие его устойчивым вращениям. Выделены все формы эллипсоидальной полости, в которой жидкость совершает устойчивое вихревое движение. Для второго гироскопа построены области значений его угловой скорости, обеспечивающие ему устойчивые равномерные вращения вокруг вертикали вместе с другими составными элементами рассматриваемой механической системы.

Исходные соотношения. Задача устойчивости равномерных вращений вокруг вертикали в однородном поле сил несвободной связки гироскопов Лагранжа, когда пер-