1. *Болграбская И.А., Савченко А.Я.* Системы связанных твердых тел, образующих полузамкнутую цепь.– 1994. – Вып.26(2). – С.33 – 40.
2. *Веласко Эррера Г.* Устойчивость равномерных вращений системы двух гироскопов Лагранжа, образующих полузамкнутую цепь// Механика твердого тела. – 1997. – Вып.29. – С.50 –54.
3. *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. – М.: Наука, 1991. – 330 с.
4. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твердых тел. - Киев: Наук. думка, 1991. – 168 с.
5. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы связанных твердых тел// Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52 – 73.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 10.11.99

УДК 531.36

©2000. **Н.Н. Чинкуляк**

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

С помощью интегралов уравнений возмущенного движения установлена устойчивость регулярной прецессии в обобщенной задаче [2] о движении твердого тела с неподвижной точкой.

Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим описанную в работе [2] систему четырех связанных тяжелых твердых тел S_0, S_1, S_2, S_3, движущуюся под действием силы тяжести. В этой системе тело S_0 с массой m_0 имеет неподвижную точку O. Тела S_i $(i = 1,2,3)$ с массами m_i имеют общие точки O_i с телом S_0. Точки O_i $(i = 1,2,3)$ находятся соответственно на первой, второй и третьей оси системы координат $O\mathbf{e}_1^{(0)}\mathbf{e}_2^{(0)}\mathbf{e}_3^{(0)}$, жестко связанной с телом S_0. Точки O_i' $(i = 1,2,3)$, принадлежащие телам S_i $(i = 1,2,3)$ соответственно, во все время движения находятся на оси, определяемой единичным вектором $\boldsymbol{\gamma}$, направленным противоположно вектору силы тяжести. Кроме того $|\mathbf{OO}_i| = |\mathbf{O}_i\mathbf{O}_i'| = l_i$. В точках O и O_i' $(i = 1,2,3)$ расположены идеальные сферические шарниры, а в точках O_i $(i = 1,2,3)$ – специальные шарниры [2], обеспечивающие симметрию движений тел S_i и S_0 относительно плоскости π_i, проходящей через точку O_i перпендикулярно вектору $\boldsymbol{\gamma}$.

Кинетическая T и потенциальная Π энергии такой системы определяются равенствами [2]

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot A\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma})\cdot B(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}), \qquad \Pi = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1^{(0)} + \omega_2\mathbf{e}_2^{(0)} + \omega_3\mathbf{e}_3^{(0)}$ – абсолютная угловая скорость тела S_0, $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1\mathbf{e}_1^{(0)} + \gamma_2\mathbf{e}_2^{(0)} + \gamma_3\mathbf{e}_3^{(0)}$ – единичный вектор вертикали; $A = \|A_{ij}\|$ – симметричная матрица, элементы которой таковы:

$$A_{11} = \sum_{i=0}^{3} A_{11}^{(i)} + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2 - 2m_2 l_2 c_2^{(2)} - 2m_3 l_3 c_3^{(3)}, \qquad (123)$$

$$A_{21} = A_{12} = A_{12}^{(0)} - A_{12}^{(1)} - A_{12}^{(2)} + A_{12}^{(3)} - m_1 l_1 c_2^{(1)} - m_2 l_2 c_1^{(2)},$$

где $\|A_{ij}^{(k)}\|$ - тензор инерции тела S_k, а $\mathbf{O}_k\mathbf{C}_k = c_1^{(k)}\mathbf{e}_1^{(k)} + c_2^{(k)}\mathbf{e}_2^{(k)} + c_3^{(k)}\mathbf{e}_3^{(k)}$ - разложение вектора центра масс тела S_k в жестко связанном с ним базисе $O_k\mathbf{e}_1^{(k)}\mathbf{e}_2^{(k)}\mathbf{e}_3^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$; $\mathbf{OO}_i = l_i\mathbf{e}_i^{(0)}$, $\mathbf{O}_i\mathbf{O}_i' = l_i\mathbf{e}_i^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$; $B = \|B_{ij}\|$ - симметричная матрица с элементами

$$B_{11} = -4m_1l_1c_1^{(1)}, \qquad B_{21} = B_{12} = 2m_1l_1c_2^{(1)} + 2m_2l_2c_1^{(2)}, \qquad (123)$$

$$a_1 = g[m_0c_1^{(0)} + m_1(c_1^{(1)} + l_1) - m_2c_1^{(2)} - m_3c_1^{(3)}].$$

Уравнения движения. Изучим движение описанной выше системы в случае, когда инерционные характеристики тел S_0, S_1, S_2, S_3 связаны соотношениями

$$A_{11} = A_{22}, \qquad B_{11} = B_{22} = B_{33}, \qquad A_{ij} = B_{ij} = 0 \ \ (i \neq j), \qquad a_1 = a_2 = a_3 = 0, \qquad (1)$$

и на систему действуют гироскопические силы, главный момент которых относительно неподвижной точки определяется равенством

$$\mathbf{L}_O = B_{11}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}). \qquad (2)$$

В этом случаем выражения для кинетической и потенциальной энергий примут вид

$$2T = A_1^*(\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_3^*\omega_3^2 + b(\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3)^2, \qquad \Pi \equiv 0. \qquad (3)$$

Здесь

$$A_1^* = A_{11} - B_{11} = \sum_{i=0}^{3} A_{11}^{(i)} + m_2l_2^2 + m_3l_3^2, \qquad A_3^* = A_{33} - B_{11} = \sum_{i=0}^{3} A_{33}^{(i)} + m_1l_1^2 + m_2l_2^2,$$

$$b = B_{11} = -4m_1l_1c_1^{(1)}, \qquad (4)$$

где $A_{jj}^{(i)}$ - момент инерции тела S_i относительно оси $O_i\mathbf{e}_j^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, 3;\ j = 1, 3)$.

Выберем в качестве обобщенных координат углы Эйлера θ, ψ, φ, характеризующие положение подвижной системы координат $O\mathbf{e}_1^{(0)}\mathbf{e}_2^{(0)}\mathbf{e}_3^{(0)}$ относительно неподвижной системы $OXYZ$ (ось OZ последней системы направлена вдоль вектора $\boldsymbol{\gamma}$). При этом имеем

$$\omega_1 = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi, \qquad \omega_2 = -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\sin\theta\cos\varphi, \qquad \omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta, \qquad (5)$$

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \qquad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \gamma_3 = \cos\theta.$$

С учетом (5) выражение для кинетической энергии

$$2T = A_1^*\dot\theta^2 + (A_1^*\sin^2\theta + A_3^*\cos^2\theta + b)\dot\psi^2 + (A_3^* + b\cos^2\theta)\dot\varphi^2 + 2(A_3^* + b)\cos\theta\dot\psi\dot\varphi. \qquad (6)$$

Далее будем предполагать выполнение неравенства

$$A_1^*[A_1^*A_3^* + b(A_1^*\cos^2\theta + A_3^*\sin^2\theta)]\sin^2\theta \neq 0$$

(невырожденность квадратичной формы относительно обобщенных скоростей, стоящей в правой части равенства (6)).

Обобщенные силы Q_ψ, Q_φ, Q_θ выражаются через главные моменты L_{O1}, L_{O2}, L_{O3} внешних сил относительно подвижных осей системы координат, определяемой базисом $O\mathbf{e}_1^{(0)}\mathbf{e}_2^{(0)}\mathbf{e}_3^{(0)}$ (см. [3], с. 505 - 507), следующим образом:

$$Q_\psi = L_{O1}\sin\theta\sin\varphi + L_{O2}\sin\theta\cos\varphi + L_{O3}\cos\theta,\ Q_\varphi = L_{O3},\ Q_\theta = L_{O1}\cos\varphi - L_{O2}\sin\varphi. \quad (7)$$

В рассматриваемом случае в силу (2), (3)

$$L_{O1} = b(\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3)(\gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2),\quad L_{O2} = b(\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3)(\gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3),$$

$$L_{O3} = b(\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3)(\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1),$$

где b определяется равенством (4).

Внося эти выражения для L_{O1}, L_{O2}, L_{O3} с учетом (5) в (7), получим

$$Q_\psi = 0,\quad Q_\varphi = -b(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\dot\theta\sin\theta,\quad Q_\theta = b(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\dot\varphi\sin\theta. \quad (8)$$

Уравнения движения исследуемой механической системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi} = 0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = Q_\varphi,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta, \quad (9)$$

где T, Q_φ, Q_θ заданы формулами (6) и (8).

Интегралы уравнений движения. Поскольку изучаемая система – склерономная система при гироскопических силах, то для нее имеет место интеграл энергии

$$H = A_1^*\dot\theta^2 + (A_1^*\sin^2\theta + A_3^*\cos^2\theta + b)\dot\psi^2 + (A_3^* + b\cos^2\theta)\dot\varphi^2 + 2(A_3^* + b)\cos\theta\dot\psi\dot\varphi = \mathrm{const}.$$

Кроме того, уравнения движения (9) допускают интеграл, соответствующий циклической координате ψ (интеграл площадей)

$$K = 2\frac{\partial T}{\partial\dot\psi} = 2(A_1^*\sin^2\theta + A_3^*\cos^2\theta + b)\dot\psi + 2(A_3^* + b)\cos\theta\dot\varphi = \mathrm{const}$$

и интеграл

$$L = A_1^{*2}\dot\theta^2 + [(A_1^* + b)^2\sin^2\theta + (A_3^* + b)^2\cos^2\theta]\dot\psi^2 + [A_3^{*2} + (2A_3^* + b)b\cos^2\theta]\dot\varphi^2 +$$
$$+2[(A_3^* + b)^2 + (A_1^* - A_3^*)b\sin^2\theta]\cos\theta\dot\psi\dot\varphi = \mathrm{const}.$$

Третий интеграл – интеграл постоянства модуля обобщенного кинетического момента [2].

Уравнения движения (9) допускают частное решение

$$\theta = \theta_0,\quad \dot\theta = 0,\quad \dot\psi = \tilde\omega,\quad \dot\varphi = \omega, \quad (10)$$

в котором постоянные θ_0, $\tilde\omega$, ω связаны соотношением

$$(A_1^* - A_3^*)\tilde\omega\cos\theta_0 - A_3^*\omega = 0. \quad (11)$$

Решение (10) характеризует такое движение системы, при котором тело S_0 с неподвижной точкой совершает регулярную прецессию относительно вертикали.

Исследуем устойчивость этого движения относительно независимой координаты θ (угол нутации) и всех обобщенных скоростей.

Устойчивость регулярной прецессии. Для установления достаточных условий устойчивости регулярной прецессии воспользуемся методом Четаева построения функции Ляпунова в виде связки интегралов уравнений возмущенного движения, применяя способ, изложенный в работе Г.К. Пожарицкого [1].

В возмущенном движении полагаем

$$\theta = \theta_0 + x, \quad \dot{\theta} = \dot{x}, \quad \dot{\varphi} = \omega + y, \quad \dot{\psi} = \tilde{\omega} + z,$$

где θ_0, $\tilde{\omega}$, ω – постоянные, связанные условием (11).

Запишем интегралы уравнений возмущенного движения, отвечающие интегралам H, K, L уравнений движения (9). Имеем

$$\delta H = A_1^*\dot{x}^2 + [A_3^* + b\cos^2(x+\theta_0)](\omega+y)^2 + [A_1^*\sin^2(x+\theta_0) + A_3^*\cos^2(x+\theta_0) + b](\tilde{\omega}+z)^2 +$$

$$+2(A_3^*+b)\cos(x+\theta_0)(\omega+y)(\tilde{\omega}+z) = \mathrm{const};$$

$$\delta K = 2(A_3^*+b)\cos(x+\theta_0)(\omega+y) + 2[A_1^*\sin^2(x+\theta_0) + A_3^*\cos^2(x+\theta_0) + b](\tilde{\omega}+z) = \mathrm{const};$$

$$\delta L = A_1^{*2}\dot{x}^2 + [A_3^{*2} + (2A_3^*+b)b\cos^2(x+\theta_0)](\omega+y)^2 + [(A_1^*+b)^2\sin^2(x+\theta_0) +$$

$$+(A_3^*+b)^2\cos^2(x+\theta_0)](\tilde{\omega}+z)^2 + 2[(A_3^*+b)^2 +$$

$$+(A_1^*-A_3^*)b\sin^2(x+\theta_0)]\cos(x+\theta_0)(\omega+y)(\tilde{\omega}+z) = \mathrm{const}.$$

Используя разложения тригонометрических функций $\sin(x+\theta_0)$ и $\cos(x+\theta_0)$ в ряды по степеням x и учитывая (11), представим интегралы уравнений возмущенного движения в виде

$$\delta H = 2[A_1^*\tilde{\omega} - P_1]\omega\sin\theta_0 x + 2P_1\cos\theta_0 y + 2P_1 z + A_1^*\dot{x}^2 + [(2b\omega^2 - (A_1^*-A_3^*)\tilde{\omega}^2)\sin^2\theta_0 -$$

$$-b(\omega + \tilde{\omega}\cos\theta_0)\omega]x^2 + (A_3^* + b\cos^2\theta_0)y^2 + (A_1^*\sin^2\theta_0 + A_3^*\cos^2\theta_0 + b)z^2 - [(A_3^*+b)\tilde{\omega} +$$

$$+2b\omega\cos\theta_0]\sin\theta_0 xy + 2[(A_3^*-b)\omega\sin\theta_0 xz + (A_3^*+b)\cos\theta_0 yz] + \ldots = \mathrm{const};$$

$$\delta K = 2(A_3^*-b)\omega\sin\theta_0 x + 2(A_3^*+b)\cos\theta_0 y + 2(A_1^*\sin^2\theta_0 + A_3^*\cos^2\theta_0 + b)z - [2(A_1^*-A_3^*)\tilde{\omega} -$$

$$-(3A_3^*-b)\omega\cos\theta_0]x^2 - 2(A_3^*+b)\sin\theta_0 xy + 4(A_1^*-A_3^*)\sin\theta_0\cos\theta_0 xz + \ldots = \mathrm{const};$$

$$\delta L = 2(A_3^*-b)P_1\omega\sin\theta_0 x + 2(A_3^*+b)P_1\cos\theta_0 y + 2(A_1^*\sin^2\theta_0 + A_3^*\cos^2\theta_0 + b)P_1 z + A_1^{*2}\dot{x}^2 +$$

$$+[((A_1^*-A_3^*)^2\tilde{\omega}^2 - (2A_3^*-b)b\omega^2)\sin^2\theta_0 - 2(A_1^*-A_3^*)P_1\tilde{\omega} + (3A_3^*-b)P_1\omega\cos\theta_0]x^2 +$$

$$+[A_3^{*2} + (2A_3^*+b)b\cos^2\theta_0]y^2 + [(A_1^*+b)^2\sin^2\theta_0 + (A_3^*+b)^2\cos^2\theta_0]z^2 - 2[(A_3^*+b)(A_3^*-A_1^*-b)\tilde{\omega} +$$

$$+(A_3^*+2b)P_1]\sin\theta_0 xy + 2[(A_3^*+b)(A_3^*-A_1^*-b)\omega + P\omega + 2(A_1^*-A_3^*)P_1\cos\theta_0]\sin\theta_0 xz +$$

$$+2[(A_3^*+b)^2 + (A_1^*-A_3^*)b\sin^2\theta_0]\cos\theta_0 yz + \ldots = \mathrm{const},$$

где

$$P = A_1^*A_3^* + b(A_1^*\cos^2\theta_0 + A_3^*\sin^2\theta_0), \quad P_1 = (A_1^*+b)\tilde{\omega} + b\omega\cos\theta_0. \tag{12}$$

Здесь и далее многоточием обозначаются члены порядка малости выше второго относительно возмущений $\dot{x}$, x, y, z.

Составим связку интегралов $V = \delta L + \lambda_1 \delta H + \lambda_2 \delta K$, не содержащую линейных членов относительно возмущений. Она имеет вид

$$V = \delta L - P_1 \delta K = W(\dot{x},\ x,\ y,\ z) + ...,$$

где P_1 определяется соотношением (12), а $W(\dot{x},\ x,\ y,\ z)$ - квадратичная форма

$$W(\dot{x},\ x,\ y,\ z) = A_1^{*2}\dot{x}^2 + [(A_1^* - A_3^*)^2\tilde{\omega}^2 - (2A_3^* - b)b\omega^2]\sin^2\theta_0 x^2 + [A_3^{*2} + (2A_3^* + b)b\cos^2\theta_0]y^2 +$$

$$+[(A_1^* + b)^2\sin^2\theta_0 + (A_3^* + b)^2\cos^2\theta_0]z^2 + 2[(A_3^*(A_1^* - A_3^*)\tilde{\omega} - b^2\omega\cos\theta_0]\sin\theta_0 xy + 2[A_3^{*2} - b^2 -$$

$$-(A_1^* - A_3^*)b\sin^2\theta_0]\omega\sin\theta_0 xz + 2[(A_3^* + b)^2 + (A_1^* - A_3^*)b\sin^2\theta_0]\cos\theta_0 yz. \qquad (13)$$

Исследуем знакоопределенность квадратичной формы (13) при условии равенства нулю независимых линейных форм интегралов уравнений возмущенного движения:

$$\delta H^{(1)} = [A_1^*\tilde{\omega} - P_1]\omega\sin\theta_0 x + P_1\cos\theta_0 y + P_1 z = 0,$$

$$\delta K^{(1)} = (A_3^* - b)\omega\sin\theta_0 x + (A_3^* + b)\cos\theta_0 y + (A_1^*\sin^2\theta_0 + A_3^*\cos^2\theta_0 + b)z = 0. \qquad (14)$$

Получаемые при этом условия, следуя [1], и будут достаточными условиями устойчивости решения (10), поскольку они обеспечивают существование функции Ляпунова в виде связки интегралов, знакоопределенность которой определяется членами второго порядка малости относительно всех входящих в нее переменных.

Соотношения (14) с учетом (11) позволяют выразить y и z через x:

$$y = \frac{(A_1^* - A_3^*)b\omega\sin^2\theta_0\cos\theta_0 + P\tilde{\omega}}{P\sin\theta_0}x, \quad z = \frac{A_1^*(A_3^* + b) - 2P}{P\sin\theta_0}\tilde{\omega}\cos\theta_0 x, \qquad (15)$$

где P определяется равенством (12).

Подставляя y и z из (15) в квадратичную форму (13), получим

$$W^*(\dot{x},\ x) = A_1^{*2}(\dot{x}^2 + \tilde{\omega}^2 x^2).$$

Квадратичная форма W^* является определенно-положительной при всех допустимых значениях параметров, следовательно, регулярная прецессия в рассматриваемой обобщенной задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки так же, как и в классическом случае ($b = 0$), устойчива относительно величин $\theta,\ \dot{\theta},\ \dot{\psi},\ \dot{\varphi}$.

1. *Пожарицкий Г.К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения // Прикл. математика и механика. - 1958. - **22**, N 2. - С. 145 - 154.
2. *Савченко А.Я., Савченко А.А.* Обобщенные уравнения Эйлера-Пуассона // Сб., посвященный 75-летию В.Н.Кошлякова. - Киев: Изд-во Ин-та математики НАН Украины, 1996.
3. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. - М.: Гостехиздат, 1946. - 655 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 21.11.99