УДК 531.36

©2000. **А.О. Игнатьев**

УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В работе вводятся понятия устойчивости и притяжения по части переменных для решений систем функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием. По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями [1,7,8,10-12,14] в работе доказывается ряд теорем об устойчивости по части переменных, используя метод функционалов Ляпунова-Красовского [5].

1. Введение. Согласно [4,6] дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом называется уравнение, в которое искомая функция и ее производные входят при различных значениях аргумента t (времени). Указанное уравнение называется уравнением с запаздывающим аргументом, если величина старшей производной в любой момент времени t определяется через значения младших производных в предыдущие моменты $t+\theta$, где $\theta \le 0$. Пусть $t \in R$, $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, $y = (y_1, ..., y_m) \in R^m$; $z = (x; y) = (z_1, ..., z_{n+m}) \in R^{n+m}$. Для данного $h > 0$ обозначим C-пространство непрерывных функций, переводящих отрезок $[-h, 0]$ в R^{n+m}. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n+m}) = (\psi; \lambda) \in C$, где $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)$, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$. Положим

$$||\varphi^{(s)}|| = \sup(|\varphi_k(\theta)| \text{ при } -h \le \theta \le 0,\ 1 \le k \le s,\ s \ge n),$$

$$||\psi|| = \sup(|\psi_i(\theta)| \text{ при } -h \le \theta \le 0,\ 1 \le i \le n),$$

$$||\lambda|| = \sup(|\lambda_j(\theta)| \text{ при } -h \le \theta \le 0,\ 1 \le j \le m),\quad ||\varphi|| = \max(||\psi||,\ ||\lambda||).$$

Введем обозначения

$$B_H = \{\varphi \in C:\ ||\varphi|| \le H\},\ C_H = \{\varphi \in C:\ ||\psi|| \le H;\ ||\lambda|| < \infty\},$$

$$C_H^s = \{\varphi \in C: ||\varphi^{(s)}|| \le H;\ |\varphi_i(\theta)| < \infty;\ \text{ при } -h \le \theta \le 0,\ i = s+1, ..., n+m\}.$$

Если z представляет собой непрерывную функцию аргумента u, определенную при $-h \le u \le A$, $A > 0$, и если t – фиксированное число $t \in [0; A)$, то z_t согласно [15] обозначает сужение функции z на отрезок $[t-h; t]$. Таким образом, z_t является элементом пространства C, определенным равенством $z_t(\theta) = z(t+\theta)$ при $-h \le \theta \le 0$.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Z(t, z_t), \tag{1}$$

где dz/dt обозначает правостороннюю производную от z по t, t – время, и $Z(t,\varphi) = \Big(X(t,\varphi), Y(t,\varphi)\Big) \in R^{n+m}$ – функционал, определенный на $[0,\infty) \times C_H$; $X \in R^n$, $Y \in R^m$, $Z(t, 0) \equiv 0$.

Согласно [16,18], мы обозначим через $z(t_0, \varphi)$ решение системы (1) с заданной начальной функцией $\varphi \in C_H$, где $z_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$. Кроме того, обозначим $z(t, t_0, \varphi)$ – значение решения $z(t_0, \varphi)$ в момент времени t, и $z_t(t_0, \varphi) = z(t+\theta, t_0, \varphi)$, $-h \le \theta \le 0$. Предположим, что $(n+m)$ - мерный функционал $Z(t, \varphi)$ является непрерывным на

$[0;\infty) \times C_H$, и решение системы (1) существует при любой непрерывной начальной функции. Рассмотрим непрерывный функционал $V(t,\varphi)$, определенный при $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$. Назовем производной функционала $V(t,z_t)$ в силу уравнений (1) величину [4, 16]:

$$\frac{dV(t,z_t(t_0,\varphi))}{dt} = \overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \{V\Big(t+\Delta t, z_{t+\Delta t}(t_0,\varphi)\Big) - V(t,z_t(t_0,\varphi))\}\frac{1}{\Delta t}.$$

Иными словами, под производной dV/dt понимается правое верхнее производное число функционала V на траектории системы (1). Предел, стоящий в правой части, определяется единственным образом, если V удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу.

2. Основные определения. Введем следующие определения.

Определение 1 [1-3]. *Тривиальное решение*

$$z(t) \equiv 0 \tag{2}$$

системы (1) называется устойчивым относительно переменной x (или x - устойчивым), если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого начального момента времени $t_0 \in R_+ = [0;+\infty)$ можно указать число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что неравенство $\|x_t(t_0,\varphi)\| < \varepsilon$ будет выполнено при всех $t \geq t_0$, если только $\|\varphi\| < \delta$. (Здесь и в дальнейшем x_t обозначает x-компоненту вектора z_t, т.е. $z_t = (x_t; y_t) = (z_{t1}, z_{t2}, ..., z_{t,(n+m)})$).

Определение 2 [2,3]. *Если в определении 1 число δ может быть выбрано не зависящим от t_0 (т. е. $\delta = \delta(\varepsilon)$), то решение (2) называется равномерно x-устойчивым.*

Аналогично обыкновенным дифференциальным уравнениям [13] рассмотрим различные виды притяжения.

Определение 3. *Решение (2) уравнений (1) называется x - притягивающим, если для любого $t_0 \geq 0$ найдется $\eta = \eta(t_0) > 0$, и для любых $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in B_\eta$ существует $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_0, \varphi) > 0$ такое, что $\|x_t(t_0,\varphi)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + \sigma$. При этом будем говорить, что множество B_η содержится в области x-притяжения в момент t_0.*

Определение 4. *Решение (2) системы (1) называется x-эквипритягивающим (или эквипритягивающим относительно переменной x), если для любого $t_0 \geq 0$ найдется $\eta = \eta(t_0) > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что $\|x_t(t_0,\varphi)\| < \varepsilon$ для всех $\varphi \in B_\eta$ и $t \geq t_0 + \sigma$.*

Определение 5. *Нулевое решение уравнений (1) называется равномерно x-притягивающим, если для некоторого $\eta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, что $\|x_t(t_0,\varphi)\| < \varepsilon$ для всех $\varphi \in B_\eta$, $t_0 \geq 0$ и $t \geq t_0 + \sigma$.*

Определение 6. *Тривиальное решение (2) системы (1) называется:*
асимптотически x-устойчивым, если оно x-устойчиво и x-притягивающее;
эквиасимптотически x-устойчивым, если оно x-устойчиво и x-эквипритягивающее;
равномерно асимптотически x-устойчивым, если оно равномерно x-устойчиво и равномерно x-притягивающее.

В дальнейшем будем рассматривать функционалы вида $V(t,\varphi)$, определенные на вектор-функции $\varphi \in C$, такие, что $V(t,0) \equiv 0$. Введем ряд определений.

Определение 7. *Будем говорить [17], что функция $a(r)$ принадлежит классу функций Хана K $(a(r) \in K)$, если $a(r)$–непрерывная строго возрастающая при $r \in [0;H]$, причем $a(0) = 0$.*

Определение 8. *Функционал $W(\varphi)$, не зависящий явно от t, называется x - определенно - положительным, если $W(\varphi) \geq 0$, причем $W(\varphi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\|\psi\| = 0$. Функционал $V(t, \varphi)$ называется x-определенно-положительным, если существует x-определенно-положительный функционал $W(\varphi)$ такой, что $V(t, \varphi) \geq$ $\geq W(\varphi)$, $\quad V(t, 0) \equiv 0$. Функционал $V(t, \varphi)$ называется x-определенно-отрицательным, если $-V(t, \varphi)$ является x-определенно-положительным.*

Аналогично обыкновенным дифференциальным уравнениям [12, 13] можно показать, что $V(t, \varphi)$ является x-определенно-положительным тогда и только тогда, когда существует $a \in K$ такая, что $V(t, \varphi) \geq a(\|\psi\|)$.

3. Основные теоремы об устойчивости по части переменных.

Теорема 1 [1-3]. *Если функционально-дифференциальные уравнения (1) таковы, что возможно указать непрерывный функционал $V(t, z_t)$ x-определенно-положительный в области $R_+ \times C_H$, производная которого неположительна, то решение (2) устойчиво относительно переменной x.*

Теорема 2. *Если функционально-дифференциальные уравнения (1) таковы, что в области $R_+ \times B_H$ существует непрерывный функционал $V(t, z_t)$, удовлетворяющий условиям*

$$a(\|x_t\|) \leq V(t, z_t) \leq b(\|z_t\|), \quad a, b \in K; \tag{3}$$

$$\frac{dV}{dt} \leq 0, \tag{4}$$

то решение (2) равномерно x-устойчиво.

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < H)$. В качестве δ выберем $\delta = b^{-1}(a(\varepsilon))$, где b^{-1} - функция, обратная функции b. Если $\|\varphi\| < \delta$, то в силу свойств (3), (4) имеем

$$a(\|x_t\|) \leq V(t, z_t) \leq V(t_0, \varphi) \leq b(\|\varphi\|) < b(b^{-1}(a(\varepsilon))) = a(\varepsilon),$$

откуда получаем $\|x_t\| < \varepsilon$ при $t > t_0$, что и требовалось доказать.

Замечание. *Если в неравенстве (3) функция b зависит не от $\|z_t\|$, а от $\|x_t\|$, то доказательство теоремы 2 можно найти в работе* [2].

Рассмотрим в фазовом пространстве R^{n+m} множество

$$Q = \{z \in R^{n+m} : x = 0\}. \tag{5}$$

По аналогии с работами [11,12] введем следующие определения.

Определение 10. *Множество Q называется устойчивым, если для любых $\varepsilon >$ > 0, $t_0 \in R_+$ можно указать $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\varphi \in C_\delta$ следует $\|x_t\| < \varepsilon$ для всех $t > t_0$.*

Определение 11. *Множество (5) называется равномерно устойчивым, если в определении 10 для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее только от ε.*

Определение 12. *Решение (2) системы (1) называется слабо x-притягивающим, если для любого $t_0 \geq 0$ можно указать $\Delta(t_0) > 0$ такое, что каждое решение $z(t_0, \varphi)$ с $\|\varphi\| < \Delta$ определено при всех $t \geq t_0$ и если при этом существует последовательность $\{t_i\}$ положительных моментов времени, стремящаяся к $+\infty$ при $i \to \infty$ такая, что справедливо соотношение*

$$\lim_{t \to \infty} \|x_{t_i}\| = 0.$$

Определение 13. *Решение (2) уравнений (1) назовем слабо асимптотически устойчивым, если оно x-устойчиво и слабо x-притягивающее.*

Теорема 3. *Если функционально-дифференциальные уравнения таковы, что в области $R_+ \times B_H$ существует непрерывный x – определенно-положительный функционал $V(t, z_t)$, производная которого на решениях системы (1) x – определенно-отрицательная, то решение (2) слабо асимптотически x - устойчиво.*

Доказательство. Из условия теоремы имеем

$$V(t, z_t) \geq a(\|x_t\|); \quad \frac{dV}{dt} \leq -c(\|x_t\|), \qquad a, c \in K. \tag{6}$$

Пользуясь результатами теоремы 1, заключаем, что тривиальное решение x-устойчиво. Поэтому для любого $t_0 \in R_+$ существует $\delta(t_0) > 0$ такое, что из $\|\varphi\| < \delta$ следует $\|x_t\| < H$ при $t > t_0$. Для того, чтобы завершить доказательство теоремы, нужно показать, что для любых $t_0 \in R_+$, $\varepsilon \in (0; H)$ можно указать $\sigma(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при любой начальной функции $\varphi \in B_\delta$ существует момент $\tau \in (t_0; t_0 + \sigma)$, для которого

$$\|x_\tau(t_0, \varphi)\| < \varepsilon. \tag{7}$$

Обозначим $\zeta(t_0) = \sup\limits_{\varphi \in B_\delta} V(t_0, \varphi)$; $\sigma(\varepsilon, t_0) = \dfrac{\zeta(t_0)}{c(\varepsilon)}$. Предположим противное: такого τ, чтобы выполнялось неравенство (7), не существует, т.е. при $t \in (t_0; t_0 + \sigma)$ имеют место неравенства $\varepsilon \leq \|x_t(t_0, \varphi)\| < H$. Тогда из условий (6) получаем

$$0 < a(\varepsilon) \leq V(t_0 + \sigma, \ x_{t_0+\sigma}(t_0, \varphi)) \leq V(t_0, \varphi) - c(\varepsilon)\sigma \leq 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Докажем теперь несколько теорем об асимптотической устойчивости.

Теорема 4. *Пусть функционально-дифференциальные уравнения (1) таковы, что в области $R_+ \times C_H^s$ существует непрерывный функционал $V(t, z_t)$, удовлетворяющий условиям:*

$$a(\|x_t\|) \leq V(t, z_t) \leq b(||z_t^{(s)}||), \quad a, b \in K;$$
$$\frac{dV}{dt} \leq -c(||z_t^{(s)}||), \quad c \in K, \tag{8}$$

где $||z_t^{(s)}|| = \sup(|z_i(t + \theta, t_0, \varphi)|$ при $-h \leq \theta \leq 0, \ 1 \leq i \leq s, \ s \geq n)$. Тогда решение (2) равномерно асимптотически устойчиво относительно x.

Доказательство. Согласно теореме 2 нулевое решение системы (1) равномерно устойчиво. Поэтому для любого положительного q $(q < H)$ можно указать такое $\eta = \eta(q) > 0$, что для любых $t_0 \in R_+$, $\varphi \in B_\eta$ выполняется неравенство $\|x_t\| < q$ при $t > t_0$. Рассмотрим траекторию $z(t_0, \varphi)$ при таких t_0, φ. Так как $\varphi \in B_\eta$, то $\max\limits_{1 \leq i \leq s} |\varphi_i| \leq \eta$, откуда

$$V(t_0, \varphi) \leq b \ (\max_{1 \leq i \leq s} |\varphi_i|) \leq b(\eta). \tag{9}$$

Пусть ε – произвольное сколь угодно малое положительное число. Обозначим $T = T(\varepsilon) = b(\eta)/c\Big(b^{-1}(a(\varepsilon))\Big)$. Покажем, что существует $\sigma \in [0; T]$ такое, что $V(t_0 + \sigma,$

$z_{t_0+\sigma}) < a(\varepsilon)$. Предположим противное: при любом $\sigma \in [0;T]$ справедливо неравенство $V(t_0+\sigma, z_{t_0+\sigma}) \geq a(\varepsilon)$, откуда при $t_0 \leq t \leq t_0+T$ имеем

$$||z_t^{(s)}|| \geq b^{-1}\Big(V(t,z_t)\Big) \geq b^{-1}(a(\varepsilon)). \tag{10}$$

Из неравенств (8), (10) получаем

$$\frac{dV(t,z_t)}{dt} \leq -c\Big(b^{-1}(a(\varepsilon))\Big),$$

откуда

$$0 < a(||x_t||) \leq V(t,z_t) \leq V(t_0,\varphi) - c\Big(b^{-1}(a(\varepsilon))\Big)(t-t_0).$$

При $t - t_0 = T$ имеем $V(t_0,\varphi) - b(\eta) > 0$, что противоречит соотношениям (9). Полученное противоречие доказывает существование $\sigma \in [0;T]$, такого, что выполняется соотношение $V(t_0+\sigma, z_{t_0+\sigma}) < a(\varepsilon)$. Так как V вдоль траектории $z(t_0,\varphi)$ не возрастает, то $V(t,z_t) < a(\varepsilon)$ при $t \geq t_0+\sigma$. Отсюда получаем $||x_t(t_0,\varphi)|| < \varepsilon$ при $t \geq t_0+\sigma$, что и доказывает теорему.

Сформулируем два важных частных случая теоремы 4.

Следствие 1 [2]. *Если функционально-дифференциальные уравнения (1) таковы, что в области $R_+ \times C_H$ существует непрерывный функционал $V(t,z_t)$, удовлетворяющий условиям*

$$a(||x_t||) \leq V(t,z_t) \leq b(||x_t||), \quad \frac{dV}{dt} \leq -c(||x_t||); \quad a,b,c \in K,$$

то решение (2) равномерно асимптотически x-устойчиво.

Следствие 2. *Если система (1) такова, что в области $R_+ \times B_H$ существует непрерывный функционал $V(t,z_t)$, удовлетворяющий условиям*

$$a(||x_t||) \leq V(t,z_t) \leq b(||z_t||), \quad \frac{dV}{dt} \leq -c(||z_t||); \quad a,b,c \in K,$$

то тривиальное решение (2) равномерно асимптотически устойчиво относительно x.

Рассмотрим теперь случай, когда правые части уравнений (1) являются периодическими по t с периодом ω (или не зависят явно от времени). В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть уравнения (1) таковы, что:*
1) каждое решение $z(t_0,\varphi)$ ограничено при $t_0 \in R_+$, $\varphi \in B_q$, где q $(q < H)$ - некоторое положительное число;
2) существует непрерывный в области $R_+ \times B_H$ функционал $V(t,z_t)$, периодический по t с периодом ω такой, что $V(t,z_t) \geq a(||x_t||)$, $a \in K$;
3) $\dfrac{dV}{dt} \leq 0$, $\dfrac{dV}{dt} \not\equiv 0$ на любом решении $z(t_0,\varphi)$ кроме тривиального.

Тогда решение (2) системы (1) равномерно асимптотически устойчиво относительно x.

Доказательство. Согласно теореме 1 нулевое решение уравнений (1) устойчиво относительно x. Это означает, что для любых $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < q)$, $t_0 \in R_+$ можно указать такое $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, что $\|x_t\| < \varepsilon$ при $t > t_0$, если только $\|\varphi\| < \delta$. Рассмотрим произвольную траекторию $z(t_0, \varphi)$, удовлетворяющую начальным условиям $t_0 \in R_+,\ \varphi \in B_\delta$. Покажем, что для нее выполнено предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \|x_t(t_0, \varphi)\| = 0. \qquad (11)$$

Для этого рассмотрим $V(t, z_t(t_0, \varphi))$. В силу неположительности производной $\dfrac{dV}{dt}$ функция $v(t) = V(t, z_t)$ не возрастает, поэтому у нее имеется неотрицательный предел

$$\lim_{t\to\infty} V(t, z_t(t_0, \varphi)) = V_0,$$

причем $V(t, z_t) \geq V_0$ при любом значении t. Если $V_0 = 0$, то из второго условия теоремы следует соотношение (11). Предположим противное: пусть $V_0 > 0$. Рассмотрим последовательность $\{t_k\}$, где $t_k = t_0 + k\omega,\quad k = 1, 2, 3, \ldots$ в случае, если V - периодичен по t с периодом $\omega > 0$ (если V не зависит явно от времени, то $\omega > 0$ - произвольное число). Этой последовательности соответствует равномерно-ограниченная последовательность равностепенно непрерывных функций $\{z_{t_k}\}$, из которой можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой предельной функции φ^*. Не нарушая общности, будем считать, что сама последовательность $\{z_{t_k}\}$ сходится к функции φ^*, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \|z_{t_k} - \varphi^*\| = 0. \qquad (12)$$

По предположению, $\lim\limits_{k\to\infty} V(t_k, z_{t_k}) = V_0 > 0$, откуда, используя свойства непрерывности и периодичности по t функционала V, а также соотношение (12), получаем $V(t_0, \varphi^*) = V_0 > 0$.

Рассмотрим траекторию $z(t_0, \varphi^*)$. Так как по условиям теоремы функционал $V(t, z_t(t_0, \varphi^*))$ не возрастает и не остается тождественно постоянным при $t > t_0$, то существуют значения $t_k = t_0 + k\omega$, где

$$V(t_k, z_{t_k}(t_0, \varphi^*)) < V(t_0, \varphi^*) = V_0.$$

С другой стороны, φ^* является предельной функцией для последовательности $\{z_{t_k}(t_0, \varphi)\}$, поэтому существует достаточно большое натуральное число m такое, что $V(t_k, z_{t_k}(t_0, z_{t_m})) < V_0$. Учитывая, что $V(t_k, z_{t_k}(t_0, z_{t_m})) = V(t_k + t_m, z_{t_k + t_m}(t_0, \varphi))$, получаем $V(t_k + t_m, z_{t_k+t_m}(t_0, \varphi)) < V_0$, что невозможно по определению числа V_0 . Полученное противоречие показывает, что предположение $V_0 > 0$ было неверным. Отсюда следует, что $V_0 = 0$.

Таким образом, показано, что, если $\varphi \in B_\delta$, то функция $v(t) = V(t, z_t(t_0, \varphi))$ монотонно не возрастает и стремится к нулю. Это означает, что для любых $\gamma > 0,\ t_0 \in R_+$ и $\varphi_0 \in B_\delta$ существует $\sigma = \sigma(\gamma, t_0, \varphi_0) > 0$, при котором

$$V(t_0 + \sigma,\ z_{t_0+\sigma}(t_0, \varphi_0)) < \frac{1}{2}\gamma.$$

Так как V непрерывно зависит от своих аргументов и решение $z_t(t_0, \varphi)$ зависит непрерывно от начальных условий, то существует окрестность $Q(\varphi_0)$, в которой справедливо неравенство

$$V(t_0 + \sigma,\ z_{t_0+\sigma}(t_0, \varphi)) < \gamma \quad \text{при} \ \ \varphi \in Q(\varphi_0).$$

Так как V монотонно не убывает вдоль решений, из последнего неравенства имеем

$$V(t, z_t(t_0, \varphi)) < \gamma \quad \text{при} \;\; t \geq t_0 + \sigma(\gamma, t_0, \varphi_0), \quad \varphi \in Q(\varphi_0).$$

Компактное множество $\overline{B_\delta}$ начальных функций оказывается покрытым системой окрестностей $\{Q(\varphi_0)\}$, из которой по теореме Гейне-Бореля [9] можно выделить конечное подпокрытие $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ с соответствующими числами $\sigma_1, ..., \sigma_N$. Обозначим $\sigma(\gamma, t_0) = \max\limits_{1 \leq i \leq N} \sigma_i$. Тогда $V(t, z_t(t_0, \varphi)) < \gamma$ для всех $t \geq t_0 + \sigma(\gamma, t_0)$, $\varphi \in B_\delta$. Так как V – x-определенно-положительный функционал, то отсюда следует, что $\|x_t(t_0, \varphi)\|$ стремится к нулю равномерно по $\varphi \in B_\delta$. Но так как правые части уравнений (1) являются периодическими по t, то отсюда следует, что $\|x_t(t_0, \varphi)\|$ будет стремиться к нулю, также равномерно по $t_0 \in R_+$. Теорема доказана.

4. Пример. Рассмотрим следующую систему функционально-дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt} = -f(t, x_t, y_t)y(t) - 2x^3(t) + 4x^2(t)x(t-h) + x(t)x^2(t-h)(\sin^2 t - 7) + 4x^3(t-h),\\ \frac{dy(t)}{dt} = f(t, x_t, y_t)x(t),\end{gathered} \tag{13}$$

где $f(t, x_t, y_t)$ - произвольный непрерывный функционал, такой, что $f(t + 2\pi, \psi, \lambda) \equiv \equiv f(t, \psi, \lambda)$. Рассмотрим вспомогательный функционал

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \int\limits_{t-h}^{t} x^4(s)ds.$$

Его производная в силу уравнений (13) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -[x(t) - x(t-h)]^4 - (1 - \sin^2 t)x^2(t)x^2(t-h) \leq 0,$$

причем dV/dt - обращается тождественно в нуль лишь при $x(t) \equiv 0$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 5, следовательно нулевое решение равномерно асимптотически x-устойчиво.

1. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных.–М.: Наука, 1991.–288 с.
2. *Ильясов К.* Об устойчивости по части переменных систем с последействием // Матем. физика.– Киев: Наук. думка, 1982. – N 31. – С. 32–36.
3. *Калистратова Т.А.* Об устойчивости по части переменных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 1986. – N 5. – С. 32–37.
4. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
5. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения.– М.:Физматгиз, 1959.– 211 с.
6. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
7. *Озиранер А.С.* К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных // Вестн. МГУ. – Сер. математики, механики. – 1971.– N 1.– С.92–100.
8. *Озиранер А.С., Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Прикл. математика и механика.– 1972.– **36**, вып.2.– С. 364–384.

9. *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966. – 320 с.
10. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ.– Сер. мат., механ., физ., астрон., хим.– 1957.– N 4.– С.9–16.
11. *Румянцев В.В.* Некоторые задачи об устойчивости движения по отношению к части переменных // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.– М.: Наука, 1972.– С.429–436.
12. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных.– М.: Наука, 1987.– 256 с.
13. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
14. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем.– Киев: Наук. думка, 1989.– 208 с.
15. *Шиманов С.Н.* Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием // Прикл. математика и механика – 1960. – **24**, вып. 3. – С.447–457.
16. *Burton T.A.* Uniform Asimptotic Stability in Functional Differential Equations // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1978. – **68**, N 2. – P. 195–199.
17. *Hahn W.* Stability of motion. – New York-Berlin-Heidelberg: Springer, 1967.– 446 p.
18. *Ignatyev A.O.* On the asymptotic stability in functional differential equations // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1999. – **127**, – N 6. – P. 1753–1760.

Ин-т прикл. математики и механики НАНУ, Донецк
Получено 22.07.98

УДК 531.36

©2000. **В.А. Гончаренко, В.И. Гончаренко**

О СТАБИЛИЗАЦИИ ОДНОЙ НЕУСТОЙЧИВОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СИЛАМИ

Построено однопараметрическое множество систем, потенциальная энергия которых имеет строгий максимум, и обладающих той особенностью, что с ростом величины параметра система не становится ни более "жесткой", ни более "мягкой", а гироскопические силы с особой матрицей коэффициентов неограниченно растут, не нарушая при этом временной устойчивости всей системы.

1. Введение. Суждения об устойчивости линейной механической системы по виду действующих на нее сил берут начало от Томсона (Кельвина) и Тета. Возможность таких суждений для системы общего вида $ADGFE$ развита в работах И.И.Метелицына [5]. Такое направление исследований получило название влияние "структуры сил" на поведение системы.

2. Постановка задачи. Рассматривается линейная механическая система, стесненная стационарными геометрическими связями. Ее состояние относительно положения равновесия определяется обобщенными координатами $x_1, \ldots, x_n$. Возмущенное движение такой системы описывается следующими уравнениями

$$A * \ddot{x} + D * \dot{x} - G * \dot{x} + F * x - E * x = 0. \qquad (1)$$

Здесь положительно определенная матрица A характеризует инерционные свойства системы. Матрицы D и F – симметрические, отвечающие диссипативно-ускоряющим и потенциальным силам. Матрицы G и E – кососимметрические, определяющие гироскопические и позиционные непотенциальные силы, $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – вектор-столбец обобщенных координат, $(\dot{}) \equiv \frac{d}{dt}$ – производная по времени. Все матрицы действительные и имеют порядок n.