УДК 531.011

©2000. **Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г., Борук И.Г.**

БИФУРКАЦИИ И КАТАСТРОФЫ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Показано, что в случае одного нулевого собственного значения матрицы линеаризации системы смену характера устойчивости особой точки можно связать с бифуркациями, реализующимися в особенностях типа обобщенной сборки Уитни. Результаты изучения флаттерных бифуркаций проиллюстрированы на задаче о перевернутом двухзвенном математическом маятнике со следящей силой на упруго заделанном верхнем конце.

1. Объект исследования. Рассмотрим динамические системы с диффеоморфизмом (симметрией) [12] $g(x) \equiv -x$ (с центральной или простейшей [7] симметрией), содержащие скалярные параметры P и θ:

$$\dot{x} = f(x, P, \theta), \quad x \in R^n, \quad f : R^n \times R_+ \times R \to R^n, \quad P \in R_+, \quad \theta \in R, \tag{1}$$

причем правые части являются достаточно гладкими нечетными функциями переменных состояния и параметра θ:

$$f(-x, P, -\theta) = -f(x, P, \theta). \tag{2}$$

В таких системах при $\theta = 0$ точка $x = 0$ с необходимостью является состоянием равновесия. Условие (2) приводит к тому, что тейлоровское разложение функции $f(x)$ в окрестности значения $x = 0$ содержит лишь нечетные степени фазовых переменных. Удерживая только главные части нелинейностей, имеем в координатной форме следующие уравнения:

$$\begin{gathered} \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{klm}^{(i)} x_k x_j x_m + o(|x|^3), \\ a_{ij} = \text{const}, \quad a_{klm}^{(i)} = a_{kml}^{(i)} = a_{mkl}^{(i)} = \text{const} \quad (i = 1, ...n). \end{gathered} \tag{3}$$

2. Дивергентные бифуркации. Бифуркационные множества и катастрофы стационарных состояний. Пусть при $\theta = 0$ и увеличении параметра P одно собственное значение матрицы линеаризации $A = \|a_{ij}\|_1^n$ меняется с отрицательного на положительное, тогда как действительные части остальных собственных значений отрицательны. Выражение первого ненулевого ляпуновского [11] коэффициента g, решающего вопрос устойчивости при $P = P_{kp}$, приведено в [7].

Остановимся подробно на случае $n = 2$. Особенности приведения случая $n > 2$ к двумерному проиллюстрированы в [5,6] на задаче о плоскопараллельном движении двухзвенного автопоезда. Для системы

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2), \tag{4}$$

где

$$f_i(x_1, x_2) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{111}^{(i)} x_1^3 + 3a_{112}^{(i)} x_1^2 x_2 + 3a_{122}^{(i)} x_1 x_2^2 + a_{222}^{(i)} x_2^3 + ... \quad (i = 1, 2), \tag{5}$$

характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Пусть точка $(0, 0)$ является простой особой точкой при $P < P_{kp}$, причем $p > 0$. Для $P = P_{kp}$ (тогда $q = 0, \lambda_2 = -p$)

вопрос устойчивости решается знаком ляпуновского коэффициента g_3, который согласно [2,7] для системы (4)-(5) равен:

$$g_3 = \Delta(a_{11}^2 + a_{12}a_{21})^{-3}, \quad \Delta = a_{11}^3(a_{11}a_{222}^{(2)} - a_{21}a_{222}^{(1)}) + 3a_{11}^2 a_{12}(a_{21}a_{122}^{(1)} - a_{11}a_{122}^{(2)}) +$$
$$+3a_{11}a_{12}^2(a_{11}a_{112}^{(2)} - a_{21}a_{112}^{(1)}) + a_{12}^3(a_{21}a_{111}^{(1)} - a_{11}a_{111}^{(2)}). \tag{6}$$

Если $g_3 < 0$, то решение $x_1 = 0, x_2 = 0$ системы (4) асимптотически устойчиво, при $g_3 > 0$ оно неустойчиво, а для $g_3 = 0$ необходимо привлекать члены пятого порядка.

Номер ляпуновской величины, отвечающей за устойчивость решения, свяжем с кратностью k пересечения в особой точке двух кривых, определяющих стационарные режимы (т.е. с кратностью особой точки). Поскольку при критических значениях параметров многобразие стационарных состояний имеет k-кратную особую точку, то в соответствии с геометрической теорией особенностей [4] оно описывается структурно устойчивыми особенностями типа обобщенной сборки Уитни [1,4]. Для их описания требуется одна фазовая переменная. В подходе А.М. Ляпунова такой переменной является, по существу, критическая переменная. Если усеченную правую часть критического уравнения приравнять нулю, то полученное уравнение, в котором параметры меняются в некоторой окрестности критических значений, будет описывать поверхность соответствующей катастрофы.

Смена характера устойчивости особой точки (и характера опасности границы области устойчивости) происходит с изменением ее кратности, что сопряжено с реализацией особенности более высокого порядка. В случае четной кратности граница опасная, так как при пересечении границы с одной из сторон области особые точки отсутствуют: они рождаются и исчезают парами; при нечетной кратности возможна как опасная, так и безопасная граница.

Применительно к системе (4)-(5) изменение характера устойчивости симметричного решения $x = 0$ связано с особенностями сборки, "бабочки" и т.д. (нечетная кратность особой точки). При этом сокращается размерность пространства параметров, в которых они реализуются: "бабочка", например, может устойчивым образом реализоваться в трехмерном пространстве параметров.

При условиях теоремы существования неявных функций уравнения $f_i(x_1, x_2) = 0$ $(i = 1, 2)$ определяют на плоскости x_1x_2 в окрестности точки $(0, 0)$ кривые

$$x_2 = F_1(x_1), \qquad x_2 = F_2(x_1), \tag{7}$$

угловые коэффициенты которых γ_1 и γ_2. Относительное положение кривых (7) при критическом значении параметра P определяют величины $F_1'''(0)$ и $F_2'''(0)$. В критическом случае $\gamma_1 = \gamma_2$, откуда $a_{22} = a_{12}a_{21}a_{11}^{-1}$. Если обозначить

$$g^* = (\gamma_1 - \gamma_2)^{(-)}(F_2'''(0) - F_1'''(0)),$$

то условием сохранения порядка следования кривых (7) в докритическом и критическом положениях есть $g^* < 0$. Здесь индексом $(-)$ обозначено значение разности $\gamma_1 - \gamma_2$ в докритическом положении. В [5,6] доказано, что $g^* g_3 > 0$. Следовательно, случай асимптотической устойчивости $(g_3 < 0)$ точки $x = 0$ однозначно связывается с сохранением порядка следования кривых (7) при докритическом и критическом значениях параметра $(g^* < 0)$, а случай неустойчивости $(g^* > 0)$ - с нарушением этого порядка $(g^* > 0)$.

При $k = 3$ смена устойчивости симметричного решения $x_1 = 0, x_2 = 0$ связана с реализацией в многообразии стационарных состояний трехкратной особой точки (особенность сборки). Аналитическое представление уравнения равновесной поверхности (катастрофы сборки) и ее бифуркационного множества в окрестности симметричного решения при $P = P_{kp}$, $\theta = 0$ можно получить путем сведения системы двух уравнений, определяющих стационарные состояния системы (4), к уравнению третьей степени от одной переменной (например, x_2) и последующим приравниванием его дискриминанта к нулю. Получим

$$\gamma x_2^3 + \beta x_2 + \alpha = 0, \tag{8}$$

где $\beta = \beta(P, \theta), \alpha = \alpha(P, \theta)$, причем $\alpha(P, 0) = 0$ и $\alpha(P, \theta) \neq 0$, если $\theta \neq 0$.
Равновесная поверхность представлена на рис. 1, *а*, а ее критическое множество и бифуркационное множество (полукубическая парабола) – на рис. 1, *б*. Критическое множество (штриховая кривая) является множеством кратных точек равновесной поверхности. Бифуркационное множество (сплошная кривая) представляет собой проекцию критического множества на плоскость $\alpha\beta$. Точкам полукубической параболы отвечают двукратные стационарные состояния динамической системы, острию – трехкратные (ему соответствует симметричное решение системы (4) при $P = P_{kp}$ и $\theta = 0$).

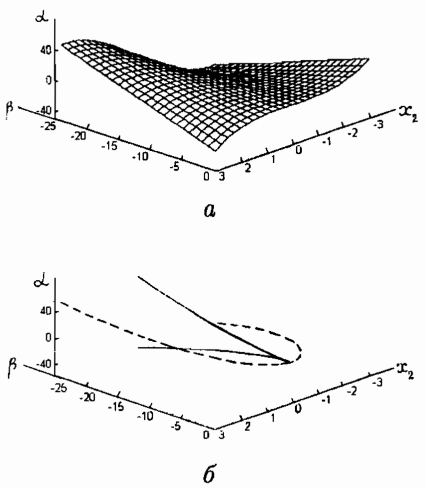


Рис. 1

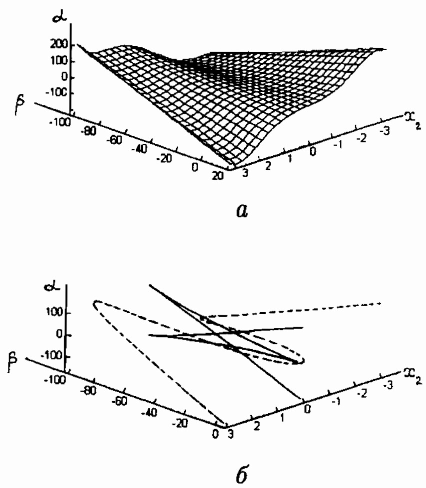


Рис. 2

Смена устойчивости симметричного решения может произойти только при изменении знака γ (величина γ отличается от g_3 постоянным множителем). Действительно, разрешим уравнение $f_1(x_1, x_2) = 0$ относительно x_1 и подставим найденное решение в уравнение $f_2(x_1, x_2) = 0$, удерживая лишь члены до третьего порядка. Получим

$$\gamma = \frac{1}{a_{12}^4}[a_{12}^3(a_{12}a_{111}^{(2)} - a_{22}a_{111}^{(1)}) + 3a_{11}a_{12}^2(a_{22}a_{112}^{(1)} - a_{12}a_{112}^{(2)}) + 3a_{11}^2 a_{12}(a_{12}a_{122}^{(2)} - a_{22}a_{122}^{(1)}) +$$

$$+ a_{11}^3(a_{22}a_{222}^{(1)} - a_{12}a_{222}^{(2)})], \qquad \beta = a_{21} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}}.$$

Если в выражение γ подставить $a_{22} = a_{12}a_{21}/a_{11}$, справедливое в критическом случае, получим с точностью до постоянного множителя выражение для g_3:

$$\gamma_{kp} = -\frac{\Delta}{a_{11}a_{12}^3} = -\frac{g_3}{a_{11}}\left(a_{21} + \frac{a_{11}^2}{a_{12}}\right)^3.$$

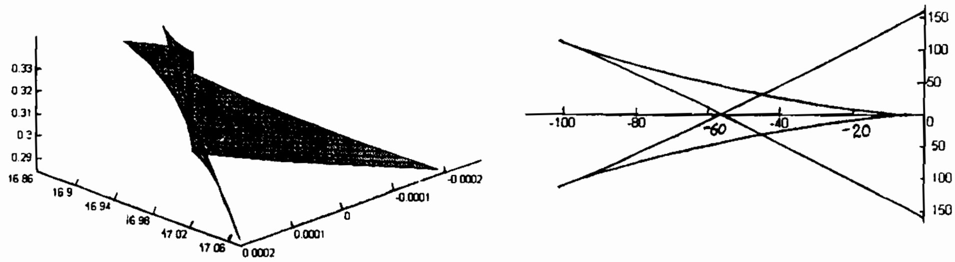
Анализ случая, когда γ меняет знак, требует учета членов пятого порядка. Вместо (8) получим

$$x_2^5 + \gamma x_2^3 + \beta x_2 + \alpha = 0.$$

В параметрической форме поверхность катастроф и ее критическое множество определяются соответственно системами

$$x_2 = x_2, \quad \beta = \beta, \quad \alpha = -(x_2^5 + \gamma x_2^3 + \beta x_2);$$
$$x_2 = x_2, \quad \beta = -5x_2^4 - 3\gamma x_2^2, \quad \alpha = 4x_2^5 + 2\gamma x_2^3.$$

Рис.2 иллюстрирует изменения, происходящие на поверхности равновесных состояний при прохождении параметра γ через нуль: со сборкой в начале координат сливаются (или рождаются в ней) еще две. Бифуркационное множество (сплошная кривая на рис. 2, *б* разбивает плоскость параметров на области с 5,3 и 1 стационарными режимами. Значения параметров, при которых сборка переходит в двойственную ей, должны совпадать с теми, при которых имеет место пятиточечное касание кривых (7) в нуле, т.е. $F_1'''(0) = F_2'''(0)$ (смена устойчивости трехкратной особой точки через реализацию особенности "бабочка"). На рис. 3, *а* изображено ее бифуркационное множество, а на рис. 3, *б* – его сечение плоскостью $\alpha\beta$ при $\gamma < \gamma_{kp}$. Представленная ситуация предшествует реализации пятикратной особой точки ($\gamma = \gamma_{kp}$). При $\gamma > \gamma_{kp}$ это сечение становится полукубической параболой, ветви которой получаются зеркальным отражением относительно оси α, т.е. поверхность сборки в окрестности симметричного решения выворачивается в двойственную ей.



а *б*

Рис. 3

В общем случае анализ максимально возможного порядка касания кривых (7) ($F_1^{(m)}(0) = F_2^{(m)}(0)$) указывает на число существенных параметров и порядок нелинейных членов разложения, влияющих на особенности поверхности равновесных состояний.

Флаттерные бифуркации. Аналитическое нахождение предельных циклов. Пусть собственные значения матрицы A при изменении параметра P меняются следующим образом: $\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm i\omega; \lambda_3 < 0, ..., \lambda_s < 0; \lambda_{s+1} = \chi_1 + i\omega_1, \lambda_{s+2} = = \chi_1 - i\omega_1, ..., \lambda_{n-1} = \chi_q + i\omega_q, \lambda_n = \chi_q - i\omega_q$, причем $q = (n-s)/2$, $\chi_1 < 0, ..., \chi_q < 0$, $P \lessgtr P_{kp} \Longrightarrow \varepsilon \lessgtr 0$. Линейным преобразованием $x_j = \sum\limits_{s=1}^{n} \alpha_{js}\xi_s$ сведем систему (3) к виду

$$\dot{\xi}_1 = \varepsilon\xi_1 - \omega\xi_2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_{klm}^{(1)}\xi_k\xi_l\xi_m + o(|\xi|^3),$$

$$\dot{\xi}_2 = \omega\xi_1 + \varepsilon\xi_2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_{klm}^{(2)}\xi_k\xi_l\xi_m + o(|\xi|^3),$$

$$\dot{\xi}_\nu = \lambda_\nu \xi_\nu + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_{klm}^{(\nu)}\xi_k\xi_l\xi_m + o(|\xi|^3) \quad (\nu = 3, ..., s),$$

$$\dot{\xi}_{s+1} = \chi_1\xi_{s+1} - \omega_1\xi_{s+2} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_{klm}^{(s+1)}\xi_k\xi_l\xi_m + o(|\xi|^3),$$

$$\dot{\xi}_{s+2} = \omega_1\xi_{s+1} + \chi_1\xi_{s+2} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_{klm}^{(s+2)}\xi_k\xi_l\xi_m + o(|\xi|^3),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{\xi}_{n-1} = \chi_q\xi_{n-1} - \omega_q\xi_n + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_{klm}^{(n-1)}\xi_k\xi_l\xi_m + o(|\xi|^3),$$

$$\dot{\xi}_n = \omega_q\xi_{n-1} + \chi_q\xi_n + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_{klm}^{(n)}\xi_k\xi_l\xi_m + o(|\xi|^3),$$

$$(A_{klm}^{(\sigma)} = A_{kml}^{(\sigma)} = A_{mkl}^{(\sigma)} = \mathrm{const}; \quad \sigma = 1, ..., n).$$

Первый ненулевой ляпуновский коэффициент, решающий вопрос устойчивости нулевого решения системы (3) при $P = P_{kp}$ (тогда $\varepsilon = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$), равен $\alpha_3(P_{kp})$ [2], где

$$\alpha_3(P) = \frac{3\pi}{4\omega}(A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)} + A_{122}^{(2)} + A_{222}^{(2)})$$

есть продолжение первого ненулевого ляпуновского коэффициента по параметру P [8].

При прохождении снизу вверх сплошного участка ($\alpha_3 < 0$) кривой $P = P_{kp}(c)$ на рис.4 происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла Γ, тогда как при прохождении ее штрихового участка ($\alpha_3 > 0$) происходит бифуркация аннигиляции неустойчивого предельного цикла Γ'. Способы приближенного аналитического описания кривых Γ и Γ' указаны в [8-10]. В первом приближении периодическое решение системы (9) имеет вид (для $\varepsilon > 0$)

$$\xi_1 = \xi_1' + \xi_1'', \;\; \xi_2 = \xi_2' + \xi_2'', \;\; \xi_\rho = \xi_\rho'' \;\; (\rho = 3, ..., n), \;\; \xi_1' = \sqrt{\varepsilon}M_0\cos\Omega t,$$

$$\xi_2' = \sqrt{\varepsilon}M_0\sin\Omega t, \;\; \xi_k'' = \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\zeta_k^{(1)}(\Omega t) \;\; (k = 1, ..., n), \quad M_0^2 = -\frac{2\pi}{\omega\alpha_3(P)}, \tag{9}$$

$$\Omega = \omega\Big(1 - \frac{\varepsilon}{2\pi}QM_0^2\Big) + ..., \quad Q(P) = \frac{3\pi}{4\omega}(A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(1)} - A_{111}^{(2)} - A_{122}^{(2)}).$$

Приложение к задаче о двухзвенном маятнике со следящей силой на упруго заделанном верхнем конце. Пусть массы материальных точек $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ равны m_1 и m_2 соответственно, а звенья OA_1 и A_1A_2 невесомые; $c-$ жесткость горизонтальной пружины; c_1 и c_2- жесткости спиральных пружин; μ_1- коэффициент вязкости в нижнем шарнире, учитывающий действие внешнего трения; μ_2- коэффициент вязкости в промежуточном шарнире A_1, отражающий влияние внутреннего трения в системе; $OA_1 = l_1$, $A_1A_2 = l_2$. Дифференциальные уравнения движения маятника (рис.5) имеют вид :

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) -$$

$$-(m_1 + m_2)gl_1\sin\varphi_1 + cl_1(l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2)\cos\varphi_1 + Pl_1\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + c_1\varphi_1 +$$

$$+\mu_1\dot\varphi_1 + c_2(\varphi_1 - \varphi_2) + \mu_2(\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) = 0, \tag{10}$$

$$m_2 l_2^2 \ddot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 g l_2 \sin\varphi_2 +$$

$$+ c l_2 (l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2)\cos\varphi_2 - c_2(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu_2(\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) = 0.$$

Линеаризуя уравнения (10) в окрестности решения $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$, $\dot\varphi_1 = 0, \dot\varphi_2 = 0$ и составляя характеристическое уравнение, находим, что границами области асимптотической устойчивости $D(4,0)$, колебательной неустойчивости $D(2,2)$ и дивергентной неустойчивости $D(3,1)$ есть гиперболы $P = P_{kp}(c)$ и $P = P_0(c)$ (рис.4), где

$$P_{kp}(c) \equiv \frac{ac^2 + dc + q}{A_1 l_1 l_2 (h - bc)}, \qquad P_0(c) \equiv \frac{A_{41}c + A_{40}}{l_1 l_2[(l_1 + l_2)c - m_2 g]}.$$

Приведенное на рис.4 ($n = 4$) расположение участков гипербол отвечает следующим числовым значениям параметров маятника: $m_1 = 10$кг, $m_2 = 5$кг, $l_1 = l_2 = 0,5$м, $c_1 = c_2 = 400$Нм, $\mu_1 = \mu_2 = 10$Нмс. При их изменении ориентация гипербол (а вместе с ней и конфигурация областей устойчивости и неустойчивости) может существенно измениться [3].

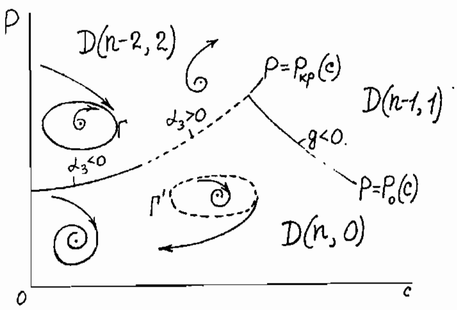


Рис. 4

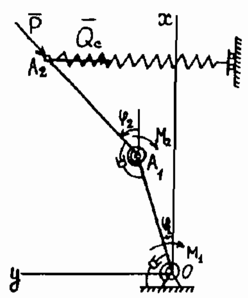
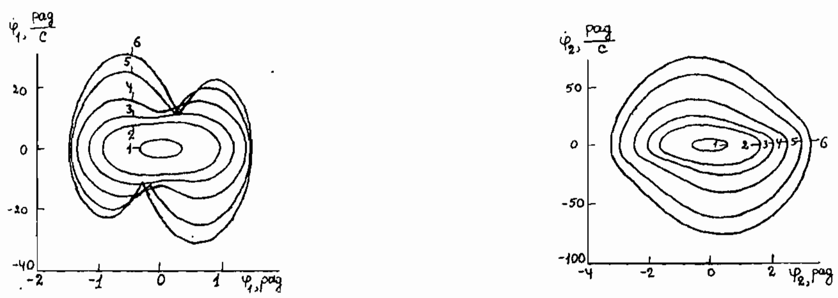


Рис. 5

Если $0 \le c \le 211$Н/м, то $\alpha_3(P_{kp}) < 0$, т.е. в области $D(2,2)$ существует устойчивый предельный цикл Г, родившийся из устойчивого фокуса. Если же 212Н/м$< c < 776,4$Н/м, то неустойчивый предельный цикл Г, существующий в области $D(4,0)$ с увеличением P стягивается на кривой $P = P_{kp}(c)$ в точку. Для приближенного аналитического описания кривых Г и Г$'$ необходимо воспользоваться соотношениями (9), справедливыми при небольших значениях разности $|P - P_{kp}(c)|$.



а *б*

Рис. 6

На значительном удалении от границы $P = P_{kp}(c)$ конфигурация предельного цикла Г может сильно отличаться от эллиптической. Об этом свидетельствуют кривые на рис.6, построенные для $c = 10$Н/м; кривые 1-6 отвечают значениям $P = 1270$, 1670, 2070, 3000, 5000 и 7000 Н соответственно.

При пересечении снизу вверх кривой $P = P_0(c)$ (рис.4) в характеристическом уравнении появляется положительный корень. Поскольку первый ненулевой ляпуновский коэффициент g, вычисленный при $P = P_0(c)$ на основании [7], отрицателен, то кривая $P = P_0(c)$ является безопасной границей области устойчивости [2]. Согласно [5,6] в области $D(3,1)$ имеются две устойчивые особые точки, притягивающие возмущенные траектории, т.е. происходит бифуркация типа вилки [7]:

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi_1(t) = \varphi_1^*, \qquad \lim_{t\to+\infty}\varphi_2(t) = \varphi_2^*.$$

Зависимости $\varphi_1^*(P)$ и $\varphi_2^*(P)$ для $c = 900$Н/м приведены в таблице.

P, H	φ_1^*, рад	φ_1^*, рад	P, H	φ_1^*, рад	φ_1^*, рад
2541	0,9138	0,3380	2557	1,1163	0,4666
2543	0,9526	0,3598	2560	1,1359	0,4813
2545	0,9911	0,3826	2562	1,1476	0,4903
2550	1,0568	0,4246	2565	1,1635	0,5030
2553	1,0853	0,4442			

При дальнейшем возрастании $P > 2565$Н по φ_1 и φ_2 происходят одночастотные колебания с небольшими амплитудами вокруг определенных значений. Амплитуды тем больше, чем больше P. При $P \geq 2590$Н устанавливаются многочастотные периодические режимы. При $P \geq 2700$Н опять устанавливаются (быстрее, чем раньше) одночастотные периодические режимы.

1. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
2. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука, 1984. – 176 с.
3. *Борук И.Г., Лобас Л.Г.* Динамическое поведение стержня, стиснутого продольною силой //Сб. науч. тр. Киевского ин-та железнодорожного транспорта. – 1998. – **1**, N2. – С. 105-111.
4. *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. –М.: Мир, 1988.–262с.
5. *Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г.* Вещественные бифуркации двухзвенных систем с качением //Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, вып.3. – С. 418–425.
6. *Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г.* Вещественные бифуркации динамических систем с простейшей симметрией при изменении управляющих параметров // Проблемы управления и информатики. – 1995. – N 6. – С. 47-62.
7. *Лобас Л.Г.* Нелинейная устойчивость и бифуркации типа вилки в динамических системах с простейшей симметрией // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, вып.2. – С. 327–332.
8. *Лобас Л.Г.* Инвариантные многообразия и поведение динамических систем с симметрией вблизи границы области устойчивости // Прикл. механика. – 1996. – **32**,N 5. – С. 81-88.
9. *Лобас Л.Г.* О существовании периодических движений динамических систем с простейшей симметрией // Там же. – 1997. – **33**,N 1. – С. 87- 96.
10. *Лобас Л.Г.* О бифуркации рождения цикла из фокуса в динамических системах с простейшей симметрией // Там же. – 1997. – **33**,N 2. – С. 80 - 88.
11. *Ляпунов А.М.* Собр. соч.: В 3 т. – М.-Л: Изд-во АН СССР, 1956. – Т.2. – 473 с.
12. *М.Холоднюк, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек* Методы анализа нелинейных динамических моделей – М.: Мир, 1991. – 367с.

Киевский ин-т железнодорожного транспорта, Киев Получено 18.10.99