

$$V^{(1)} = \varepsilon^2 AK^2 D_{33} \cos \Theta_0 t - \varepsilon K_0 D_{22} \int_0^t \left(\int_0^{\varepsilon t} M_3^0(\tau) d\tau \right) dt - \varepsilon AD_{11} C^0 \sin(\alpha^{(1)} + \beta), \quad (22)$$

$$\sin \chi = \cos \beta = \frac{b^{(1)}}{C^0}, \quad C^0 = \sqrt{(a^0)^2 + (b^0)^2}.$$

Таким образом, в выражении (22) для Θ_ε^ν ограниченное осциллирующее слагаемое содержит ненулевые начальные данные a^0, b^0 . Слагаемое $V^{(1)}$ уточняет для данной задачи выражение для угловой скорости прецессии, известное из приближенной теории гироскопов.

1. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1996. – N 2. – С. 3–12.
2. Бухгольц Н.Н. Основы курса теоретической механики. – М.: Наука, 1969. – Ч.2. – 332 с.
3. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
4. Кузмак Г.Е. К вопросу о пространственном движении осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени // ДАН СССР. – 1960. – 132, N 23. – С. 549–552.
5. Лещенко Д.Д., Саллам С.Н. Возмущенные вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Прикл. математика и механика. – 1990. – 54, N 2. – С. 224–232.
6. Лещенко Д.Д., Шамаев А.С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – N 6. – С. 8–17.
7. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
8. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – N 4. – С. 33–44.

Одесская гос. академия строительства и архитектуры,

Одесская гос. академия холода

Получено 22.11.99

УДК 531.383

©2000. Д.А. Сухоручкин

О СТРУННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ОБОБЩЕННОГО МАЯТНИКА ФУКО

Объектом исследования является однородная натянутая струна¹ закрепленная обоими концами в некотором основании, способном вращаться относительно инерциального пространства. Такая струна может служить чувствительным элементом в электромеханической модели струнного гироскопа — датчика поворота основания вокруг оси, проходящей через концы струны. Уравнения движения идеальной системы допускают решение, в одном из предельных случаев определяющее плоскую стоячую волну. Тогда источником инерциальной информации может служить ориентация плоскости стоячей волны, неизменная относительно инерциального пространства [2]. Указанное свойство сохранения ориентации плоскости колебаний позволяет отнести рассматриваемую систему к классу обобщенных маятников Фуко [1]. В целях управления колебаниями и съема информации представляется возможным использовать электрический ток, пропустив его по струне и поместив систему в магнитное поле. Приводятся уравнения, связывающие форму колеблющейся струны с силой тока и вектором магнитной индукции.

Рассмотрим струну длиной l , натянутую с силой T_0 и жестко закрепленную обоими концами в некотором основании. Свяжем с основанием координатные оси x, y, z , чтобы ось z проходила через точки закрепления (рис. 1).

¹Под струной понимается тонкая нить, которая не сопротивляется изгибу и кручению, не связанным с изменением ее длины.

Будем полагать, что при движении струны каждый ее элемент не смещается вдоль оси z . Тогда каждый элемент струны можно характеризовать соответствующим значением независимой переменной z , а отклонение этого элемента от положения равновесия – величинами $x(z)$ и $y(z)$. Таким образом, движение струны относительно основания полностью определено, если известны зависимости

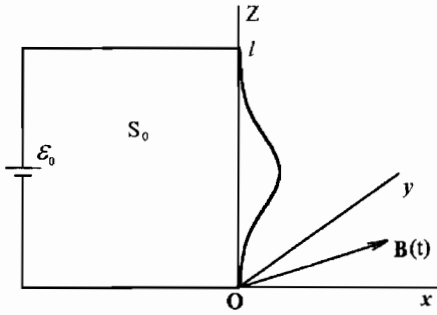


Рис. 1

$$x = x(z, t), \quad y = y(z, t) \quad (0 \leq z \leq l). \quad (1)$$

Предположим, что основание вращается вокруг оси z с произвольной угловой скоростью $\Omega(t)$. Пусть также на струну вдоль направлений, перпендикулярных к оси z , действуют внешние силы с линейной плотностью

$$\mathbf{p}(z, t) = p_1(z, t) \mathbf{i} + p_2(z, t) \mathbf{j}.$$

Выведем уравнения колебаний струны относительно основания.

Выделим в момент времени t участок струны от z до $z + \Delta z$ и воспользуемся выражением для относительного ускорения

$$\mathbf{r}_{tt} = \mathbf{w} - \dot{\Omega} \times \mathbf{r} - 2\Omega \times \mathbf{r}_t - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}). \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_t = x_t \mathbf{i} + y_t \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_{tt} = x_{tt} \mathbf{i} + y_{tt} \mathbf{j}, \quad (3)$$

$$x_t = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad x_{tt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad y_t = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad y_{tt} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\Omega = \Omega \mathbf{k}, \quad \dot{\Omega} = \dot{\Omega} \mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{F}(z, t) / (\rho(z) \Delta z). \quad (4)$$

В последней формуле $\rho(z)$ — непрерывная линейная плотность струны, \mathbf{F} — сумма сил, действующих на выделенный участок. Она складывается из сил натяжения и внешних сил. Считая колебания малыми, будем полагать справедливыми соотношения $x_z^2, y_z^2 \ll \ll 1$. При этих допущениях

$$|\mathbf{T}(z, t)| \stackrel{z,t}{\equiv} T_0, \quad \mathbf{T}(z, t) = -T_0 (x_z(z, t) \mathbf{i} + y_z(z, t) \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{T}(z + \Delta z, t) = T_0 (x_z(z + \Delta z, t) \mathbf{i} + y_z(z + \Delta z, t) \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{T}(z + \Delta z, t) + \mathbf{T}(z, t) = T_0 [x_{zz}(z, t) \mathbf{i} + y_{zz}(z, t) \mathbf{j}] \Delta z.$$

Таким образом,

$$\mathbf{F}(z, t) = [(T_0 x_{zz} + p_1) \mathbf{i} + (T_0 y_{zz} + p_2) \mathbf{j}] \Delta z. \quad (5)$$

Подставив в формулу (2) векторы из (3), (4) и (5), получим дифференциальные уравнения движения струны относительно вращающегося основания:

$$\rho(x_{tt} - \dot{\Omega} y - 2\Omega y_t - \Omega^2 x) = T_0 x_{zz} + p_1,$$

$$\rho(y_{tt} + \dot{\Omega}x + 2\Omega x_t - \Omega^2 y) = T_0 y_{zz} + p_2. \quad (6)$$

Полагая $\rho(z) \equiv \text{const}$ и введя обозначение $a = \sqrt{T_0/\rho}$, перейдем к безразмерным величинам

$$\tilde{z} = \frac{\pi z}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{\pi a t}{l}, \quad \omega(\tilde{t}) = \frac{l}{a\pi} \Omega \left(\frac{l\tilde{t}}{a\pi} \right). \quad (7)$$

Кроме того, преобразуем выражения для компонент линейной плотности внешних сил:

$$f_1(\tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{l^2}{\pi^2 T_0} p_1 \left(\frac{l\tilde{z}}{\pi}, \frac{l\tilde{t}}{\pi a} \right), \quad f_2(\tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{l^2}{\pi^2 T_0} p_2 \left(\frac{l\tilde{z}}{\pi}, \frac{l\tilde{t}}{\pi a} \right). \quad (8)$$

Подставляем в уравнения (6) величины, введенные формулами (7) и (8), и опускаем знак “ \sim ”:

$$\begin{aligned} x_{tt} - \dot{\omega}y - 2\omega y_t - \omega^2 x &= x_{zz} + f_1, \\ y_{tt} + \dot{\omega}x + 2\omega x_t - \omega^2 y &= y_{zz} + f_2. \end{aligned} \quad (9)$$

К полученным уравнениям следует добавить начальные и граничные условия:

$$x(z, 0) = \xi_1(z), \quad x_t(z, 0) = \dot{\xi}_2(z), \quad y(z, 0) = \eta_1(z), \quad y_t(z, 0) = \eta_2(z), \quad (10)$$

$$x(0, t) = x(\pi, t) = y(0, t) = y(\pi, t) = 0. \quad (11)$$

Пусть струна является свободной ($f_1 = f_2 = 0$), а функции (10) имеют специфический вид

$$\begin{aligned} \xi_1(z) &= r_n \sin nz \cos \varphi_n, & \xi_2(z) &= \omega(0) r_n \sin nz \sin \varphi_n, \\ \eta_1(z) &= r_n \sin nz \sin \varphi_n, & \eta_2(z) &= -\omega(0) r_n \sin nz \cos \varphi_n, \end{aligned}$$

где r_n, φ_n — произвольные постоянные, n — целое число. Тогда решение уравнений (9) определяет плоскую стоячую волну, неподвижную относительно инерциального пространства и прецессирующую в осях x, y, z , связанных с основанием:

$$\begin{aligned} x(z, t) &= r_n \cos nt \sin nz \cos(\varphi_n - \int_0^t \omega(\tau) d\tau), \\ y(z, t) &= r_n \cos nt \sin nz \sin(\varphi_n - \int_0^t \omega(\tau) d\tau). \end{aligned}$$

При этом n — число пучностей стоячей волны, r_n — амплитуда колебаний в пучностях, φ_n — угол между плоскостью волны и осью x при $t = 0$.

Таким образом, наблюдая в системе, связанной с основанием, за изменением $\varphi(t)$ ориентации плоскости стоячей волны, мы можем получать информацию об угле поворота основания:

$$\int_0^t \omega(\tau) d\tau = -\varphi(t). \quad (12)$$

Инерциальный эффект (12) является неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям, что приводит к необходимости вводить обратные связи и оказывать

управляющие воздействия на струну. Ниже представлены первые шаги по реализации идеи, принадлежащей В.Ф.Журавлеву: использовать электрический ток в струне и магнитное поле для частичного формирования канала управления колебаниями и съема инерциальной информации.

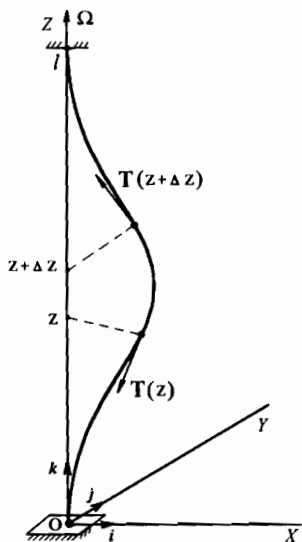


Рис. 2

Включим струну в электрическую цепь с источником тока, имеющим электродвижущую силу \mathcal{E}_0 (рис. 2). Для простоты будем считать, что неизменяемая часть контура является плоской и располагается в плоскости xOz в области $x < 0$. Отказ от этого предположения приведет к некоторому усложнению формул, которое не имеет принципиального значения. Площадь неизменяемой части контура обозначим S_0 .

Поместим контур в однородное магнитное поле, вектор индукции которого ортогонален оси z :

$$\mathbf{B}(t) = B_1(t)\mathbf{i} + B_2(t)\mathbf{j}.$$

Выведем уравнения, связывающие вектор $\mathbf{B}(t)$, силу тока в струне $I(t)$ и функции (1) в случае не вращающегося основания.

При сделанных предположениях уравнения движения струны принимают вид

$$\begin{aligned} \rho x_{tt}(z, t) &= T_0 x_{zz}(z, t) + p_1(z, t), \\ \rho y_{tt}(z, t) &= T_0 y_{zz}(z, t) + p_2(z, t), \end{aligned} \quad (13)$$

где p_1, p_2 — соответствующие компоненты линейной плотности силы Ампера

$$\mathbf{p} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ I_1 & I_2 & I_3 \\ B_1 & B_2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Поскольку $x_z^2, y_z^2 \ll 1$, можем считать

$$\mathbf{I} = I(x_z(z, t)\mathbf{i} + y_z(z, t)\mathbf{j} + \mathbf{k}). \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (13), получим

$$\begin{aligned} \rho x_{tt}(z, t) &= T_0 x_{zz}(z, t) - I(t)B_2(t), \\ \rho y_{tt}(z, t) &= T_0 y_{zz}(z, t) + I(t)B_1(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим сопротивление всей цепи через R . Сила тока, текущего по струне, определяется тремя факторами: источником тока (\mathcal{E}_0), явлением электромагнитной индукции вследствие изменения потока вектора \mathbf{B} через контур ($\mathcal{E}_н$), явлением самоиндукции вследствие изменения магнитного потока, создаваемого током I ($\mathcal{E}_{с.и.}$):

$$I(t) = I_0 + I_н(t) + I_{с.и.}(t) = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_н + \mathcal{E}_{с.и.}}{R}. \quad (17)$$

Считая индуктивность контура малой, пренебрегаем последним из указанных факторов. Согласно закону электромагнитной индукции,

$$\mathcal{E}_n(t) = -\frac{d}{dt} [B(t)S_B(t)], \quad (18)$$

где $S_B(t)$ — взятая с соответствующим знаком площадь проекции контура на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{B}(t)$. Произведение из формулы (18) может быть преобразовано следующим образом:

$$B(t)S_B(t) = B_2(t)S_0 + \int_{\Delta S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S}(z, t). \quad (19)$$

Здесь $\Delta S(t)$ обозначает изменение поверхности, натянутой на контур, обусловленное колебаниями струны. Выразим элементарный вектор площади $d\mathbf{S}(z, t)$ через функции (1) и элементарное приращение координаты z :

$$d\mathbf{S}(z, t) = dS(z, t) \mathbf{n}(z, t) = \sqrt{x^2(z, t) + y^2(z, t)} dz \mathbf{n}(z, t).$$

Здесь $\mathbf{n}(z, t) = (-y(z, t)\mathbf{i} + x(z, t)\mathbf{j})/\sqrt{x^2(z, t) + y^2(z, t)}$ — единичный вектор нормали к рассматриваемой элементарной площадке. Тогда из формулы (19) имеем

$$B(t)S_B(t) = B_2(t)S_0 + \int_0^l [-B_1(t)y(z, t) + B_2(t)x(z, t)] dz. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (18) и выполняя дифференцирование, получим для индукционного тока

$$\begin{aligned} I_n(t) = & -\frac{S_0}{R} \dot{B}_2(t) + \frac{1}{R} \int_0^l [\dot{B}_1(t)y(z, t) - \dot{B}_2(t)x(z, t)] dz + \\ & + \frac{1}{R} \int_0^l [B_1(t)y_t(z, t) - B_2(t)x_t(z, t)] dz. \end{aligned} \quad (21)$$

Полагая, что $\int_0^l x(z, t) dz, \int_0^l y(z, t) dz \ll S_0$, пренебрегаем в формуле (21) вторым слагаемым по сравнению с первым.

Подставляя формулы (17) и (21) в (16), получаем уравнения движения струны с током в магнитном поле:

$$\begin{aligned} \rho x_{tt}(z, t) = & T_0 x_{zz}(z, t) - \left[I_0 - \frac{S_0}{R} \dot{B}_2(t) + \frac{1}{R} \int_0^l [B_1(t)y_t(z, t) - B_2(t)x_t(z, t)] dz \right] B_2(t), \\ \rho y_{tt}(z, t) = & T_0 y_{zz}(z, t) + \left[I_0 - \frac{S_0}{R} \dot{B}_2(t) + \frac{1}{R} \int_0^l [B_1(t)y_t(z, t) - B_2(t)x_t(z, t)] dz \right] B_1(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Переходя к безразмерным величинам (7) и вводя обозначения

$$\alpha = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{\mathcal{E}_0}{RT_0}, \quad \beta = \frac{l}{\pi} \frac{S_0}{a\rho R}, \quad \gamma = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{1}{a\rho R},$$

перепишем уравнения (22) в следующем виде:

$$\begin{aligned}x_{tt} - x_{zz} &= - \left[\alpha - \beta \dot{B}_2 + \gamma \int_0^\pi (B_1 y_t - B_2 x_t) dz \right] B_2, \\y_{tt} - y_{zz} &= \left[\alpha - \beta \dot{B}_2 + \gamma \int_0^\pi (B_1 y_t - B_2 x_t) dz \right] B_1.\end{aligned}\quad (23)$$

В заключение перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, разложив функции (1) в ряды Фурье, удовлетворяющие граничным условиям (11):

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \sin kz, \quad y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \sin kz. \quad (24)$$

Заметим, что в правых частях уравнений (23) стоят функции, не зависящие от переменной z . Обозначим

$$\begin{aligned}f_1(t) &= - \left[\alpha - \beta \dot{B}_2 + \gamma \int_0^\pi (B_1 y_t - B_2 x_t) dz \right] B_2, \\f_2(t) &= \left[\alpha - \beta \dot{B}_2 + \gamma \int_0^\pi (B_1 y_t - B_2 x_t) dz \right] B_1.\end{aligned}\quad (25)$$

Для того чтобы разложить f_1 и f_2 в ряды Фурье, введем кусочно-постоянные функции

$$g_1(z, t) = \begin{cases} -f_1(t), & \text{если } -\pi < z < 0; \\ f_1(t), & \text{если } 0 < z < \pi. \end{cases} \quad (26)$$

$$g_2(z, t) = \begin{cases} -f_2(t), & \text{если } -\pi < z < 0; \\ f_2(t), & \text{если } 0 < z < \pi. \end{cases} \quad (27)$$

и доопределим их для всех z с периодом 2π . Тогда будут справедливы разложения

$$g_1(z, t) = \frac{4f_1(t)}{\pi} \left(\sin z + \frac{\sin 3z}{3} + \frac{\sin 5z}{5} + \dots \right), \quad (28)$$

$$g_2(z, t) = \frac{4f_2(t)}{\pi} \left(\sin z + \frac{\sin 3z}{3} + \frac{\sin 5z}{5} + \dots \right). \quad (29)$$

В силу формул (24)–(29) после несложных преобразований получаем из уравнений (23) следующую бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + x_1 &= -\frac{4B_2}{\pi} \left[\alpha - \beta \dot{B}_2 + 2\gamma B_1 (\dot{y}_1 + \frac{\dot{y}_3}{3} + \frac{\dot{y}_5}{5} + \dots) - 2\gamma B_2 (\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_3}{3} + \frac{\dot{x}_5}{5} + \dots) \right], \\ \ddot{y}_1 + y_1 &= \frac{4B_1}{\pi} \left[\alpha - \beta \dot{B}_2 + 2\gamma B_1 (\dot{y}_1 + \frac{\dot{y}_3}{3} + \frac{\dot{y}_5}{5} + \dots) - 2\gamma B_2 (\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_3}{3} + \frac{\dot{x}_5}{5} + \dots) \right], \\ \ddot{x}_2 + 4x_2 &= 0,\end{aligned}$$

$$\ddot{y}_2 + 4y_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_3 + 9x_3 = -\frac{4B_2}{3\pi} \left[\alpha - \beta \dot{B}_2 + 2\gamma B_1 (\dot{y}_1 + \frac{\dot{y}_3}{3} + \frac{\dot{y}_5}{5} + \dots) - 2\gamma B_2 (\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_3}{3} + \frac{\dot{x}_5}{5} + \dots) \right],$$

$$\ddot{y}_3 + 9y_3 = \frac{4B_1}{3\pi} \left[\alpha - \beta \dot{B}_2 + 2\gamma B_1 (\dot{y}_1 + \frac{\dot{y}_3}{3} + \frac{\dot{y}_5}{5} + \dots) - 2\gamma B_2 (\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_3}{3} + \frac{\dot{x}_5}{5} + \dots) \right],$$

$$\ddot{x}_4 + 16x_4 = 0,$$

$$\ddot{y}_4 + 16y_4 = 0,$$

.....
 которая описывает колебания струны с током в магнитном поле.

1. Журавлев В.Ф. О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // Изв. Академии Наук. Механика твердого тела. – 1998. – N 6. – С. 5–11.
2. Quick W.H. Theory of vibrating string as an angular motion sensor // Trans. ASME. Seria E Appl. Mech. – 1964. – 31, N 3. – P. 523–534.

Ин-т проблем механики РАН, Москва

Получено 15.12.99

УДК 531.38

©2000. С.Н. Судаков

О СИЛАХ, СПОСОБСТВУЮЩИХ РАЗВИТИЮ ПЛАНЕТАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВОЛЧКА, ПОДВЕШЕННОГО К ВАЛУ ДВИГАТЕЛЯ ПОСРЕДСТВОМ КАРДАННОГО ВАЛА

Рассмотрена задача о развитии планетарных движений сильно сплюснутого симметричного волчка, подвешенного к ротору двигателя посредством карданного вала. Исследованы силы реакций, действующие на волчок со стороны подвеса (нижней крестовины карданного вала). Подробно изучена та их составляющая, которая вызывает развитие планетарных движений. Найдены аналитические выражения для этих сил.

Введение. Подробное изложение теоретических и экспериментальных исследований по движению подвешенного на струне волчка дано в [1]. В работе [2] отмечено, что в экспериментах с подвешенным на струне волчком могут возникать планетарные движения, при которых центр масс волчка движется по раскручивающейся спирали в направлении вращения двигателя. Аналогичный эффект может легко возникать в экспериментах с сильно сплюснутым волчком, подвешенным к оси двигателя посредством карданного вала. В последнем случае поведение системы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которую, можно получить полную картину движения. Однако уравнения получаются слишком сложными и для их решения приходится использовать численные методы. Поэтому желательно иметь какие-то простые критерии, позволяющие делать предварительные качественные заключения о движении системы в зависимости от ее параметров.

В настоящей работе исследуются силы, способствующие развитию планетарных движений волчка, подвешенного посредством карданного вала, и их зависимость от параметров системы (трения в шарнирах и подкручивающего момента двигателя).