$$\omega_\rho^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_\zeta^2 = \omega^2(1 - C_1^2).$$

Таким образом, вращение происходит вокруг наклонной оси, составляющей с вертикалью угол α, $\sin\alpha = \omega_\zeta/\omega = C_1$, где C_1 - постоянная, удовлетворяющая для первого решения соотношению

$$C_1^2 + (e_1^2 + e_2^2)(C_2^2 + C_3^2) = 1,$$

и для второго решения соотношению

$$C_1^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(C_2^2 + C_3^2) = 1.$$

1. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. - Киев: Наук. думка, 1980. - 174 с.
2. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. - Новосибирск : Изд-во НГУ, 1965. - 221 с.
3. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений// Механика твердого тела. - 1974.- Вып. 6.- С. 15-24.
4. *Kovaleva L. M.* Investigation of permanent rotations of the rigid body with fixed point, carrying one - and two - degree gyros // XXII Yugoslav congress of theoretical and applied mechanics. -Vrnjacka Banja, 1997. - P. 61-64.
5. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt// J. reine und angew. Math. - 1894. - **113**, H. 4. - S. 318-334

Донецкий гос. ун-т,

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 14.12.99

УДК 531.38

А.А. Савченко

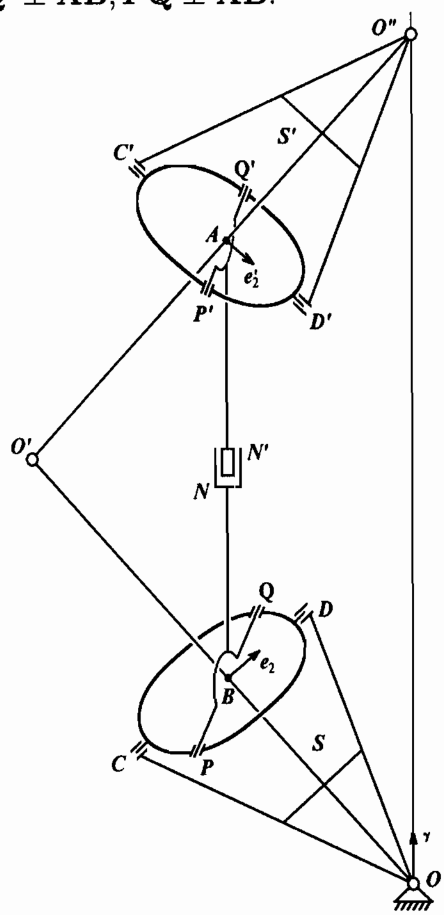
ГОЛОНОМНАЯ СВЯЗЬ, РЕАЛИЗУЮЩАЯ СИММЕТРИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ СОЧЛЕНЕННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В работах [1–3] при моделировании вращения специально закрепленного тяжелого гибкого вала исследована модель, представляющая собой систему двух тяжелых гироскопов Лагранжа, связанных таким образом, что движение одного из них симметрично движению другого относительно плоскости, проходящей через их общую точку и перпендикулярной вектору вертикали. При этом вопрос о реализации такого движения посредством голономной связи не обсуждался. В настоящей работе указывается такая голономная связь, организованная с помощью сферических и цилиндрических шарниров.

Рассмотрим механическую систему [2], состоящую из двух абсолютно твердых тел S и S', связанных между собой в общей точке O' (как на рисунке). Тело S имеет неподвижную точку O, а принадлежащая телу S' точка O'' во все время движения остается на оси, определяемой некоторым единичным вектором γ. Предположим, что в точках O, O' и O'' находятся идеальные сферические шарниры. Кроме этого, полагаем, что $|OO'| = |O'O''| = l$.

Свяжем движение тел S и S' с помощью дисков $CQDP, C'Q'D'P'$ и составной штанги $PQP'Q'$ (см. рисунок), которые в дальнейшем предполагаются невесомыми. Тело S' и диск $C'Q'D'P'$ соединены с помощью цилиндрического шарнира, допускающего поворот диска относительно тела вокруг оси $C'D'$. Точка $A \in O'O'' \subset S'$ является геометрической серединой отрезка $C'D'$. Аналогичным образом связаны диск $CQDP$ и тело S, где $B \in OO' \subset S$ – геометрическая середина отрезка CD, причем $|OB| = |O''A| = l^*$.

Пусть диск $C'Q'D'P'$ и составная штанга $PQP'Q'$ связаны между собой цилиндрическим шарниром, допускающим поворот диска относительно штанги вокруг оси $P'Q'$; точка A, как геометрический объект, принадлежит отрезку $[P'Q']$. Аналогично соединены диск $CQDP$ и составная штанга $PQP'Q'$ ($B \in [CD]$). Предположим также, что сочленение элементов $P'Q'N'$ и PQN штанги $PQP'Q'$ в точке $O^* \in [AB]$ ($|O^*A| = |O^*B| = l^*$) допускает только их скольжение без трения относительно друг друга параллельно вектору $\boldsymbol{\gamma}$ и не допускает их относительного вращения вокруг оси AB, то есть во все время движения $[PQ] \parallel [P'Q']$. Кроме того, конструкция штанги такова, что $\mathbf{P'Q'} \perp \mathbf{AB}, \mathbf{PQ} \perp \mathbf{AB}$.



Покажем, что связанные таким образом тела S и S' совершают движения, симметричные относительно плоскости π, проходящей через точку O' и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\gamma}$. Для этого введем две системы координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, жестко связанные соответственно с телами S и S' так, чтобы $\mathbf{OO'} = l\mathbf{e}_3$, $\mathbf{O'O''} = l\mathbf{e}_3'$, а в начальный момент времени векторы $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2'$ лежат в плоскости $OO'O''$ и $\mathbf{e}_2 \parallel \mathbf{CD}, \mathbf{e}_2' \parallel \mathbf{C'D'}$. Тогда во все время движения при наличии указанных выше связей имеем $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{PQ}, \mathbf{e}_2' \perp \mathbf{P'Q'}$. А поскольку $\mathbf{AB} \perp \mathbf{PQ}$ и $\mathbf{PQ} \perp \mathbf{P'Q'}$, то векторы $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2'$ и $\boldsymbol{\gamma} \parallel \mathbf{AB}$ компланарны во все время движения, то есть

$$(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2') \cdot \boldsymbol{\gamma} \equiv 0. \tag{1}$$

Введем также в рассмотрение неподвижную систему координат $O\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\boldsymbol{\gamma}$. Положение координатных триедров $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ относительно системы $O\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\boldsymbol{\gamma}$ определим соответственно углами Эйлера θ, ψ, φ и θ', ψ', φ'. Учитывая начальное положение векторов $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2'$ и наличие сферического шарнира в точке O', можно заключить [3], что

$$\theta' = -\theta, \qquad \psi' = \psi. \tag{2}$$

С учетом (2) равенство (1) дает

$$\cos\theta \sin(\varphi - \varphi') = 0 \tag{3}$$

при любых значениях θ. Из (3) следует, что

$$\varphi' = \varphi \tag{4}$$

во все время движения.

Равенства (2) и (4) и означают, что тела S и S' совершают симметричные относительно плоскости π движения.

Теперь остается показать, что момент реакции связи $\mathbf{L}$, действующий на тело S со стороны диска $CQDP$, и аналогичный момент $\mathbf{L}'$, приложенный к гироскопу S' со стороны диска $C'Q'D'P'$, могут быть представлены в виде [2]:

$$\mathbf{L} = -L\,[\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\gamma})]\,, \qquad \mathbf{L}' = L\,[\mathbf{e}_2' \times (\mathbf{e}_2' \times \boldsymbol{\gamma})]\,, \tag{5}$$

где L – некоторый скаляр.

С этой целью освободимся от связей в шарнирах рассматриваемой системы тел. Прежде всего, принимая во внимание, что в точках O, O', O'' расположены идеальные сферические шарниры, заключаем, что моменты реакции связи в этих шарнирах равны нулю.

Освобождаясь от связи, реализуемой цилиндрическим шарниром CD, прилагаем к телу S в точке B момент $\mathbf{L}$ и силу реакции связи $\mathbf{R}$, а к диску $CQDP$ – соответственно момент $-\mathbf{L}$ и силу $-\mathbf{R}$. Поскольку шарнир CD – цилиндрический, то момент $\mathbf{L}$ направлен перпендикулярно оси шарнира, т.е.

$$\mathbf{L} \perp \mathbf{CD}. \tag{6}$$

Аналогичным образом введем в точке A момент $\mathbf{L}'$ и силу реакции связи $\mathbf{R}'$, которые выражают действие диска $C'Q'D'P'$ на тело S'. Ясно, что момент $-\mathbf{L}'$ и сила реакции $-\mathbf{R}'$ характеризуют действие тела S' на диск $C'Q'D'P'$ и

$$\mathbf{L}' \perp \mathbf{C'D'}. \tag{7}$$

Воздействие штанги $PQP'Q'$ на диск $CQDP$ заменяем приложенными в точке B моментом $\mathbf{L}_B$ и силой реакции связи $\mathbf{R}_B$. Тогда $-\mathbf{L}_B$ и $-\mathbf{R}_B$ есть соответственно момент и сила реакции связи, выражающие действие диска $CQDP$ на штангу $PQP'Q'$, причем

$$\mathbf{L}_B \perp \mathbf{PQ}, \tag{8}$$

так как шарнир PQ – цилиндрический. Точно так же шарнир $P'Q'$ может быть заменен моментом $\mathbf{L}_A$ и силой реакции связи $\mathbf{R}_A$, действующими на диск $C'Q'D'P'$ со стороны штанги $PQP'Q'$. Момент $-\mathbf{L}_A$ и сила реакции $-\mathbf{R}_A$ выражают в этом случае воздействие диска $C'Q'D'P'$ на штангу $PQP'Q'$. При этом

$$\mathbf{L}_A \perp \mathbf{P'Q'}, \tag{9}$$

Далее, освобождаясь от связи в точке O^* элементов $P'Q'N'$ и PQN составной штанги $PQP'Q'$, прилагаем к первому из них момент и силу реакции связи $\mathbf{L}_O$ и $\mathbf{R}_O$, а ко второму – момент $-\mathbf{L}_O$ и силу реакции $-\mathbf{R}_O$ соответственно. В силу отмеченной выше специфики этой связи заключаем, что

$$\mathbf{R}_O \perp \mathbf{AB}. \tag{10}$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемой модели диски и штанга предполагаются невесомыми, получаем следующие уравнения движения:
диска $C'Q'D'P'$

$$-\mathbf{L}' + \mathbf{L}_A = 0, \qquad -\mathbf{R}' + \mathbf{R}_A = 0; \tag{11}$$

элемента штанги $P'Q'N'$

$$-\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_O = 0, \qquad -\mathbf{L}_A + \mathbf{L}_O + \mathbf{R}_A \times \mathbf{O_*A} = 0; \tag{12}$$

элемента штанги PQN

$$-\mathbf{R}_B - \mathbf{R}_O = 0, \qquad -\mathbf{L}_B - \mathbf{L}_O + \mathbf{R}_B \times \mathbf{O_*B} = 0; \tag{13}$$

диска $CQDP$

$$\mathbf{L}_B - \mathbf{L} = 0, \qquad \mathbf{R} - \mathbf{R}_B = 0. \tag{14}$$

Из (11) и (14) следует, что

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{L}', \quad \mathbf{R}_A = \mathbf{R}', \quad \mathbf{L}_B = \mathbf{L}, \quad \mathbf{R}_B = \mathbf{R}, \tag{15}$$

а из (12) и (13)

$$\mathbf{R}' = -\mathbf{R}. \tag{16}$$

Учитывая соотношения (6) – (10), заключаем, что

$$\mathbf{L} = L\left[\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\gamma})\right], \qquad \mathbf{L}' = L'\left[\mathbf{e}_2' \times (\mathbf{e}_2' \times \boldsymbol{\gamma})\right], \tag{17}$$

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_A \perp \boldsymbol{\gamma}, \qquad \mathbf{R} = \mathbf{R}_B \perp \boldsymbol{\gamma}, \tag{18}$$

где L и L' – величины, подлежащие определению.

Запишем равенства (17) в следующем виде:

$$\mathbf{L} = L\left[(\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma})\,\mathbf{e}_2 - \boldsymbol{\gamma}\right], \qquad \mathbf{L}' = L'\left[(\mathbf{e}_2' \cdot \boldsymbol{\gamma})\,\mathbf{e}_2' - \boldsymbol{\gamma}\right]. \tag{19}$$

Суммируя вторые равенства в (12) и (13) с учетом (15), (16), получим

$$\mathbf{L} + \mathbf{L}' + 2\mathbf{O}_*\mathbf{B} \times \mathbf{R} = 0. \tag{20}$$

Умножая равенство (20) скалярно на $\boldsymbol{\gamma}$ и учитывая (19) а также, что $\mathbf{O}_*\mathbf{A} \parallel \boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{O}_*\mathbf{B} \parallel \boldsymbol{\gamma}$, находим

$$L\left[(\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma})^2 - 1\right] + L'\left[(\mathbf{e}_2' \cdot \boldsymbol{\gamma})^2 - 1\right] = 0, \tag{21}$$

а поскольку в силу (2), (4)

$$(\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma})^2 = (\mathbf{e}_2' \cdot \boldsymbol{\gamma})^2 = \sin^2\theta\cos^2\varphi,$$

то из (21) следует $L' = -L$. При этом формулы (17) переходят в соотношения (5). Что и требовалось доказать.

1. *Савченко А.А.* Регулярные прецессии двух твердых тел, образующих полузамкнутую цепь // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 21–25.
2. *Савченко А.Я., Савченко А.А.* Обобщенные уравнения Эйлера-Пуассона // В сб. "Вопросы аналитической механики и ее применений". Ин-т математики НАН Украины, Киев. – 1999. – С. 338–351.
3. *Савченко А.Я., Шепеленко О.В.* Об обобщениях задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Механика твердого тела. – 1993. – Вып. 25. – С. 63–69.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 10.09.99