

8. *Левин-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. - М.: Иностран. лит. - 1951. - Т.2, ч. 2. - 555 с.
9. *Мухарлямов Р.Г.* Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы // Дифференц. уравнения. - 1967. - 3, N 2. - С. 180-192.
10. *Мухарлямов Р.Г.* Построение множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Там же. - 1969. - 5, N 4. - С.688-699.
11. *Мухарлямов Р.Г.* О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию // Там же 1971. - 7, N 10. - С. 1825-1834.
12. *Мухарлямов Р.Г.* О решении систем нелинейных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1971. - 11, N 4. - С. 829-836.
13. *Мухарлямов Р.Г.* Об уравнениях движения механических систем // Дифференц. уравнения. - 1983. - 19, N 12. - С. 2048-2056.
14. *Мухарлямов Р.Г.* О численном решении дифференциально - алгебраических уравнений // Вестник РУДН, сер. Прикл. математика и информатика. - 1999. - N 1. - С. 20-24.
15. *Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.* Уравнения движения механических систем в избыточном наборе переменных // Сб. научно-методических статей по теор. механике. - 1987. - Вып. 18. - С. 62-66.
16. *Нугманова Ш.С.* Об уравнениях движения управляемых систем // Тр. Казанского авиац. ин-та. - 1953. - 27. - С. 23-40.
17. *Харламов П.В.* Очерки об основаниях механики. - Киев.: Наукова думка, 1995. - 407 с.
18. *Четаев Н.Г.* О вынужденных движениях // Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. - М.: Изд-е АН СССР, 1962. - С. 329-335.
19. *Шульгин М.Ф.* О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. - Ташкент: Изд-ие Ср. Аз. ун-та, 1958. - 189 с.
20. *Ascher U.M., Hongsheng Chin, L.R.Petzold, S. Reich.* Stabilization of constrained Mechanical systems with DAEs and invariant manifolds // Mechanics of Structures and Machines. - 1995. - 23. - P. 135-158.
21. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. - 1972. - 1. - P.1-16.
22. *Bozis G., Ichtiaroglou S.* Existence and construction of dynamical systems having a prescribed integral of motion - an inverse problem // Inverse Problems. - 1987. - 3. - P. 213-227.
23. *Rentrop P., Strehmel K., Weiner R.* Ein Überblick über Eincshrittverfahren zur numerischen Integration in der technischen Simulation // GAMM-Mitteilungen. - 1996. - 19, N.1. - S. 9-43.

Российский ун-т Дружбы народов, Москва

Получено 21.12.99

УДК 531.38

©2000. И.Н. Гашененко

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

В работе изучены и классифицированы множества допустимых угловых скоростей, отвечающие фиксированным интегральным уровням задачи о движении гиростата вокруг неподвижной точки. Получено уравнение двумерной огибающей поверхности, которая ограничивает семейство траекторий-годографов в подвижном базисе. Исследована возможность самопересечений подвижных годографов угловой скорости.

1. Введение. Тело с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, и тело, несущее симметричный вращающийся ротор, являются наиболее известными, но не единственными примерами механической системы, называемой гиростатом [10]. Движение тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки описывается системой дифференциальных уравнений

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \mathbf{r} \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega \quad (1)$$

с тремя известными интегралами

$$H = \frac{1}{2}A\omega \cdot \omega - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = h, \quad G = (A\omega + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = g, \quad I = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (2)$$

где $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, ω – угловая скорость тела-носителя в подвижном базисе, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор вертикали, $\boldsymbol{\lambda}$ – постоянный гиростатический момент и \mathbf{r} – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс системы. Интегралы (2) позволяют выделить в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6(\omega, \boldsymbol{\nu})$ трехмерное компактное подмножество

$$Q_{h,g}^3(\mathbf{c}) = \{H = h, \quad G = g, \quad I = 1\} \subset \mathbb{R}^6(\omega, \boldsymbol{\nu}),$$

инвариантное относительно фазового потока системы (1). Интегральные многообразия $Q_{h,g}^3$ зависят от констант g, h и набора конструктивных параметров $\mathbf{c} = (A_1, r_1, \lambda_1, \dots)$, и, как правило, они действительно являются многообразиями. В соответствии с намеченной С.Смейлом [7] программой топологического исследования механических систем с симметрией, проблема изучения фазовых траекторий (1) сводится, во-первых, к описанию бифуркаций и топологии $Q_{h,g}^3$ и, во-вторых, к изучению поведения динамических систем на каждой отдельной поверхности $Q_{h,g}^3$. К настоящему времени детальное топологическое описание структуры интегральных многообразий получено для многих классических и современных задач механики [1,8,15,16].

Рассматриваемая здесь механическая система с гироскопическими силами допускает однопараметрическую группу симметрий, порождающую интеграл площадей. Наличие в системе гироскопических сил не вносит принципиальных изменений в общую схему исследования топологии интегральных многообразий [9]. Топологический тип $Q_{h,g}^3$ однозначно определяется "областью возможности движения" $U_{h,g} = \pi(Q_{h,g}^3)$ на сфере Пуассона $S^2 = \{|\boldsymbol{\nu}| = 1\}$, где $\pi : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$ – проекция. Многообразие $Q_{h,g}^3$ диффеоморфно расслоенному пространству с базой $U_{h,g}$ и слоем S^1 , у которого все слои над

$$\partial U_{h,g} = \left\{ \frac{1}{2}(g - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu})^2 (A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})^{-1} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = h, \quad |\boldsymbol{\nu}| = 1 \right\}$$

отождествлены в точки. Вид этих многообразий меняется при прохождении бифуркационного множества $\Sigma(\mathbf{c}) \subset \mathbb{R}^2(h, g)$, состоящего из критических значений отображения $H \times G : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, g)$. Критическими точками отображения $H \times G : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, g)$ являются относительные равновесия системы (1):

$$\boldsymbol{\nu} = \text{const}, \quad \omega = \mu\boldsymbol{\nu} = \text{const}, \quad \mu = |\omega| = (g - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}) / (A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad (3)$$

$$(g - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu})^2 (A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu})(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})^2 = 0,$$

которым отвечают равномерные вращения тела-носителя вокруг вертикали. Отметим монографию [11], в которой изучены возможные направления осей равномерных вращений гиростата в пространстве и в теле.

Бифуркационные кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ запишем в параметрической форме

$$h = \frac{1}{2}\sigma\mu^2 + \frac{1}{2\mu^2} \sum_{i=1}^3 \frac{(3r_i + \lambda_i\mu)(r_i + \lambda_i\mu)}{(A_i - \sigma)},$$

$$g = \sigma\mu + \frac{1}{\mu^3} \sum_{i=1}^3 \frac{r_i(r_i + \lambda_i\mu)}{(A_i - \sigma)}, \quad (4)$$

где величины σ и μ связаны дополнительным соотношением

$$\mu^4 - \sum_{i=1}^3 \frac{(r_i + \lambda_i \mu)^2}{(A_i - \sigma)^2} = 0. \quad (5)$$

Если положить $A_1 > A_2 > A_3$, тогда $\sigma \in (-\infty, A_3) \cup (A_3, A_2) \cup (A_2, A_1) \cup (A_1, \infty)$. Когда гиристатический момент отсутствует и все величины A_i различны, то вид кривой, определяемой на плоскости $\mathbb{R}^2(\sigma, \mu)$ неявным уравнением (5), качественно не меняется при варьировании параметров A_i, r_i . Но на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ бифуркационные кривые (4) устроены достаточно сложно, имеют точки возврата и самопересечения, взаимное расположение различных ветвей этих кривых существенно зависит от параметров. Возможные типы бифуркационных диаграмм и топология многообразий $Q_{h,g}^3$ для твердого тела с неподвижной точкой детально изучены в работах [14,4,8] и др. Любая связная компонента неособой поверхности $Q_{h,g}^3$ диффеоморфна одному из следующих замкнутых ориентируемых многообразий: сфере S^3 , вещественному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$, $S^1 \times S^2$, связной сумме $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$. Для гиристора зависимость $\mu(\sigma)$ исследована в работе [5]. Анализ самопересечений кривой (5) в особых точках $(\sigma, \mu) = (A_i, -r_i \lambda_i^{-1})$ позволил авторам указать более десяти качественно различных вариантов этой кривой, и это еще не полный список всех возможных вариантов. На рис.1 показаны примеры расположения ветвей $\mu(\sigma)$ в простом и сложном случаях.

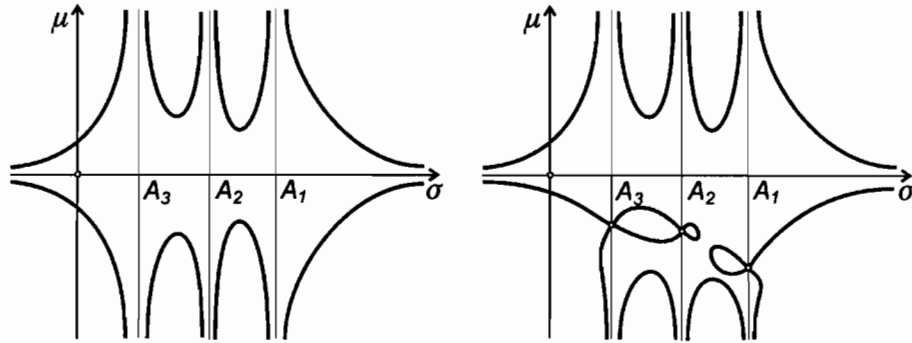


Рис. 1

Топология поверхностей $Q_{h,g}^3$ для тяжелого гиристора с неподвижной точкой полностью изучена лишь в некоторых частных случаях (см., например, [16,2]). Регулярными связными компонентами $Q_{h,g}^3$ являются те же многообразия, что и для одного твердого тела, и многообразия более сложной структуры еще не были предъявлены в этой задаче.

В этой работе изучается одна из основных кинематических характеристик вращающегося гиристора – его угловая скорость. Для этого в пространстве $\mathbb{R}^3(\omega)$ построены инвариантные множества – образы изоэнергетических поверхностей $Q_{h,g}^3$, классифицированы возможные типы этих множеств. Исследована возможность самопересечений траекторий – годографов кинетического момента и угловой скорости.

2. Уравнения Гесса для гиристора. Предположим, что векторы $A\omega + \lambda$ и \mathbf{r} не остаются коллинеарными во все время движения, и представим вектор ν в виде следующей суммы

$$\nu = a_1(A\omega + \lambda) + a_2\mathbf{r} + a_3(A\omega + \lambda) \times \mathbf{r}. \quad (6)$$

Из интегралов H, G, I находим коэффициенты

$$a_1 = \frac{[|\mathbf{r}|^2 g + (h - T)(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r}]}{|(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{r}|^2},$$

$$a_2 = \frac{[(T - h)|A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}|^2 - g(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r}]}{|(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{r}|^2}, \quad a_3 = \frac{\sqrt{f}}{|(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{r}|^2},$$

где обозначено

$$T = \frac{1}{2}(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}), \quad f = |(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{r}|^2 - |(h - T)(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) + g\mathbf{r}|^2.$$

Элементарные преобразования позволяют записать f в виде полинома шестой степени от трех неизвестных – компонент вектора угловой скорости:

$$\begin{aligned} f &= (|A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}|^2 - g^2)(|\mathbf{r}|^2 - (T - h)^2) - [(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r} - (T - h)g]^2 = \\ &= -T^2|A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}|^2 + 2hT|A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}|^2 + 2gT(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r} + |A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}|^2(|\mathbf{r}|^2 - h^2) - \\ &\quad - ((A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r})^2 - 2hg(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{r} - g^2|\mathbf{r}|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановкой (6) в первое уравнение (1) получим векторную форму уравнений П.В.Харламова [11], обобщивших уравнения В.Гесса [13]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + a_1 \mathbf{r} \times (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) + a_3 \mathbf{r} \times ((A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{r}). \quad (8)$$

Уравнение (8) не содержит $\boldsymbol{\nu}$ и описывает динамику векторов $\boldsymbol{\omega}, A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$ в подвижном базисе, жестко связанном с корпусом гиростата. Функция $f(\boldsymbol{\omega})^{-\frac{1}{2}}$ служит интегрирующим множителем уравнения (8), поэтому одного дополнительного и не зависящего явно от времени интеграла достаточно для сведения (8) к квадратурам.

3. Огибающая поверхность $\partial V_{h,g}$. Рассмотрим проекцию $p : (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) \mapsto \boldsymbol{\omega}$. Точка $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ принадлежит образу $V_{h,g} = p(Q_{h,g}^3)$ тогда и только тогда, когда существует действительное решение (ν_1, ν_2, ν_3) , удовлетворяющее трем первым интегралам. Из условия

$$\frac{D(H, G, I)}{D(\nu_1, \nu_2, \nu_3)} = 0 \quad (9)$$

исключим ν_i и найдем уравнение двумерной поверхности, ограничивающей область $V_{h,g}$. Далее будем называть $\partial V_{h,g} = \{f(\boldsymbol{\omega}) = 0\} \subset \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ *огибающей поверхностью*. Образы фазовых траекторий системы (1), отвечающие фиксированным постоянным (h, g) , заполняют замкнутую область $V_{h,g} = \{f(\boldsymbol{\omega}) \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$. Из равенства (6) следует, что каждая внутренняя точка множества $V_{h,g} \subset \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ имеет два прообраза на поверхности $Q_{h,g}^3$, отличающихся лишь знаком коэффициента a_3 в выражении (6). Правая часть уравнения (8) обращается в нуль только на крае $\partial V_{h,g}$. Уравнение $f(\boldsymbol{\omega}) = 0$ существенно упрощается при $\mathbf{r} = 0$ и приводится к уравнению эллипсоида $T = h$. В случае Эйлера-Жуковского этот эллипсоид заполняют фазовые траектории, отвечающие фиксированному уровню энергии. Отметим известное равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}|^2 = \sqrt{f(\boldsymbol{\omega})}, \quad (10)$$

которое следует из (8). Любая траектория (подвижный годограф угловой скорости тела-носителя), принадлежащая множеству $V_{h,g}$, касается огибающей поверхности $\partial V_{h,g}$ в тот момент времени, когда $|A\omega + \lambda|$ достигает локального экстремума вдоль траектории. Если траектория-годограф целиком принадлежит поверхности $\partial V_{h,g}$, тогда, согласно с равенством (10), модуль вектора кинетического момента сохраняет свое начальное значение. В рассматриваемой задаче известны все случаи, когда $|A\omega + \lambda| = \text{const}$. Кроме решения Эйлера-Жуковского и равномерных вращений (3), модуль кинетического момента постоянен лишь в некоторых частных случаях решений Лагранжа и Гесса-Сретенского, характеризующихся прецессионными движениями тела-носителя вокруг вертикали [3].

4. Классификация $\partial V_{h,g}$. Топология огибающих поверхностей $\partial V_{h,g}$ зависит от значений констант (h, g) и параметров гиростата. Существуют поверхности $\partial V_{h,g}$, которые не имеют особых точек (например, диффеоморфные сфере S^2 или тору T^2). Тогда каждая связная компонента $V_{h,g}$ является компактным многообразием с краем. Особые точки действительной поверхности $\partial V_{h,g}$ найдем из условий

$$f(\omega) = 0, \quad \text{grad} f(\omega) = 0.$$

На бифуркационном множестве $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h, g)$ огибающая поверхность $\partial V_{h,g}$ всегда имеет особые точки, которые отвечают равномерным вращениям тела (т.е. относительным равновесиям системы (1)). Изменение топологического типа $Q_{h,g}^3$ при прохождении бифуркационного множества (4) приводит к изменению типа $V_{h,g}$. Если поверхность $Q_{h,g}^3$ состоит из нескольких связных компонент, тогда и $V_{h,g}$ является объединением непересекающихся множеств.

Кроме того, огибающая поверхность $\partial V_{h,g}$ имеет особую точку, если векторы $A\omega + \lambda$ и \mathbf{r} становятся коллинеарными в процессе движения гиростата. Тогда выполняется равенство $A\omega + \lambda = \gamma\mathbf{r}$. Из первых интегралов находим, что множитель γ равен действительному корню кубического уравнения

$$\frac{1}{2}(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\gamma^3 - (A^{-1}\mathbf{r} \cdot \lambda)\gamma^2 + \left[\frac{1}{2}(A^{-1}\lambda \cdot \lambda) - h \right] \gamma - g = 0, \quad (11)$$

а вектор ν удовлетворяет уравнениям $\gamma(\mathbf{r} \cdot \nu) = g$, $|\nu| = 1$. Отметим важное свойство: в пространстве $\mathbb{R}^3(\omega)$ существует ось с ортом $\mathbf{l} = A^{-1}(\gamma\mathbf{r} - \lambda)(|A^{-1}(\gamma\mathbf{r} - \lambda)|)^{-1}$, которая пересекает замкнутую область $V_{h,g}$ не более чем в трех точках. Эти точки, удовлетворяющие равенствам $\omega = A^{-1}(\gamma\mathbf{r} - \lambda) = \text{const}$, являются особыми точками огибающей поверхности $\partial V_{h,g}$. Теперь выясним топологию прообраза $p^{-1}(\partial V_{h,g})$. Связная компонента $p^{-1}(\partial V_{h,g})$ является двумерным ориентируемым многообразием, которое разбивает неособую компоненту $Q_{h,g}^3$ на два ориентируемых многообразия с краем. Известно [6], что любое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие всегда можно представить в виде объединения двух полных кренделей подходящего рода без общих внутренних точек, т.е. всегда можно найти $M, M' \subset Q^3$ такие, что $M \cup M' = Q^3$ и $M \cap M' = \partial M = \partial M'$. Например, сферу S^3 можно получить склеиванием двух шаров по гомеоморфизму их краев, склеиванием двух полных торов можно получить многообразия $S^3, \mathbb{R}P^3, S^1 \times S^2$ и т.д. Такое разбиение называется разбиением Хегора рода m , где m -топологический род кренделя ∂M . В рассматриваемой задаче поверхностью ∂M служит связная компонента $p^{-1}(\partial V_{h,g})$, ее род m зависит от параметров.

П.В.Харламов [11] ввел для гиростата специальную систему координат, первая ось которой проходит через центр масс механической системы. В этом базисе он получил простые дифференциальные уравнения для компонент вектора кинетического момента. Из предыдущего следует, что при фиксированных постоянных $(h, g, A_i, r_i, \lambda_i)$ траектории-годографы кинетического момента могут неоднократно пересекать ось, несущую центр масс, но не более чем в трех фиксированных точках. Все точки самопересечения траекторий в открытой области $V_{h,g} \setminus \partial V_{h,g}$ могут быть лишь двойными.

Найдем кривые, разделяющие плоскость $\mathbb{R}^2(h, g)$ на области, внутри которых сохраняется число особых точек огибающей поверхности $\partial V_{h,g}$. Кривую кратных корней уравнения (11) запишем в виде

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 0, \quad (12)$$

где

$$g_2 = \frac{4(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda})^2}{3(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^2} + \frac{2h - (A^{-1}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})}{(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})},$$

$$g_3 = \frac{(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda})(2h - (A^{-1}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}))}{3(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^2} + \frac{8(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda})^3}{27(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^3} + \frac{g}{(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}.$$

С учетом неравенств $-|\mathbf{r}| \leq (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu}) \leq |\mathbf{r}|$ находим для параметра γ следующие ограничения

$$-|\mathbf{r}| \leq \left[\frac{1}{2}(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\gamma^2 - (A^{-1}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda})\gamma + \frac{1}{2}(A^{-1}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - h \right] \leq |\mathbf{r}|. \quad (13)$$

Из (11), (13) получим уравнения разделяющих кривых

$$g^2(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \pm 2g|\mathbf{r}|(A^{-1}\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda}) + |\mathbf{r}|^2((A^{-1}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - 2h \pm 2|\mathbf{r}|) = 0. \quad (14)$$

Итак, кривые (4),(12),(14) разбивают плоскость $\mathbb{R}^2(h, g)$ на подобласти с качественно различными типами поверхностей $\partial V_{h,g}$. Некоторые из этих поверхностей показаны на рис. 2. Центр масс находится на главной оси инерции, на этой же оси расположены особые точки поверхности $\partial V_{h,g}$. Окончательный результат сформулируем в виде теоремы.

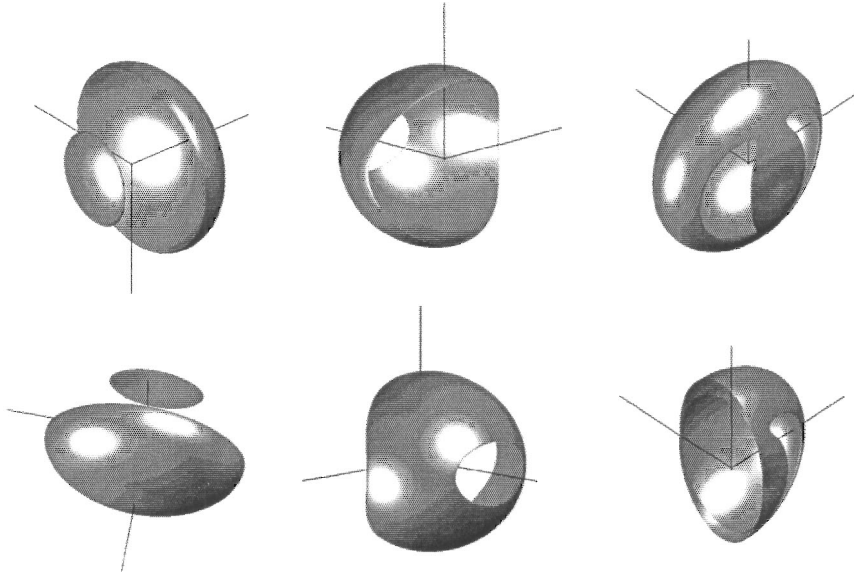


Рис. 2

Теорема. Для фиксированных постоянных $(h, g, A_i, r_i, \lambda_i)$ все интегральные кривые, соответствующие решениям $\omega = \omega(t)$ векторного уравнения (8), принадлежат трехмерной области $V_{h,g} = p(Q_{h,g}^3)$. При этом выполняются следующие свойства:

а) произвольная точка множества $V_{h,g} \setminus \partial V_{h,g}$ имеет ровно два прообраза на многообразии $Q_{h,g}^3$;

б) все особые точки действительной поверхности $\partial V_{h,g}$ либо отвечают относительным равновесиям (3), либо принадлежат оси с ортом 1;

в) классификацию возможных типов поверхностей $\partial V_{h,g}$ задают кривые (12), (14) и бифуркационное множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h, g)$.

5. Семейство характеристик на $\partial V_{h,g}$. Вполне интегрируемая динамическая система на $Q_{h,g}^3$ имеет дополнительный интеграл $K(\omega, \nu) = k$, расслаивающий инвариантное многообразие $Q_{h,g}^3$ на связные двумерные компоненты

$$J_{h,k,g}(c) = \{H = h, K = k, G = g, I = 1\} \subset \mathbb{R}^6(\omega, \nu).$$

Огибающая поверхность $\partial V_{h,g}$ касается в каждой своей точке некоторой компоненты семейства $P_{h,k,g} = p(J_{h,k,g})$, зависящего от параметра k . Кривая, вдоль которой $\partial V_{h,g}$ касается фиксированной поверхности $P_{h,k,g}$, называется *характеристикой* данного семейства. Характеристики образуют на $\partial V_{h,g}$ семейство линий, зависящее от k . Уравнение характеристик на $\partial V_{h,g}$ найдем подстановкой (6) и $a_3 = 0$ в интеграл:

$$\widetilde{K}(\omega) = K(\omega, \nu)|_{\nu=\nu^0(\omega)} = k, \quad \nu^0 = a_1(A\omega + \lambda) + a_2\mathbf{r}. \quad (15)$$

При фиксированных константах h, k, g точки последовательных касаний траектории уравнения (8) с поверхностью $\partial V_{h,g}$ ложатся на замкнутые кривые в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3(\omega)$, образованные совместными решениями уравнений $f(\omega) = 0, \widetilde{K}(\omega) = k$. Однопараметрическое семейство характеристик удобно изучать и классифицировать на сфере Пуассона. Уравнение вида (15) запишем для сферы $S^2 = \{|\nu| = 1\}$:

$$\widehat{K}(\nu) = K(\omega, \nu)|_{\omega=\omega^0(\nu)} = k, \quad A\omega^0 + \lambda = b_1\nu + b_2\mathbf{r}, \quad (16)$$

где коэффициенты $b_{1,2}$ удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$b_1 + b_2(\nu \cdot \mathbf{r}) = g, \quad (b_1\nu + b_2\mathbf{r} - \lambda) \cdot A^{-1}(b_1\nu + b_2\mathbf{r} - \lambda) - 2(\nu \cdot \mathbf{r}) - 2h = 0. \quad (17)$$

Из (17) следует, что произвольная точка сферы Пуассона, не лежащая на оси, несущей центр масс системы, имеет не более двух прообразов $\omega^0 = A^{-1}(b_1\nu + b_2\mathbf{r} - \lambda)$ на $\partial V_{h,g}$. Возьмем два экземпляра сферы S^2 и на каждом из них построим линии уровня $\widehat{K}(\nu) = k$. Например, в случае Ковалевской имеем $A_1 = A_2 = 2A_3, r_3 = 0, \lambda_i = 0$, для пяти различных пар (h, g) результаты расчетов приведены на рис. 3 (здесь $Q_{h,g}^3$ диффеоморфны $S^3 - a, b, \mathbb{R}P^3 - c, e$ и $S^1 \times S^2 - d$) [12]. Кривые на сфере иллюстрируют структуру разбиения интегрального многообразия $Q_{h,g}^3$ на связные двумерные поверхности уровня интеграла K (такое разбиение в [1] называется слоением Лиувилля на изоэнергетической поверхности $Q_{h,g}^3$).

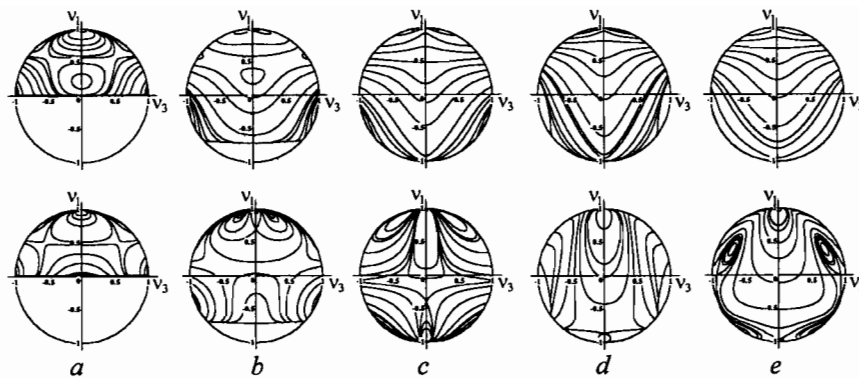


Рис. 3

Эти кривые на сфере разрушаются как только параметры выходят за пределы, установленные данным интегрируемым случаем. На рис. 4 приведены результаты компьютерного моделирования, демонстрирующие переход от интегрируемого случая Ковалевской к случаю Лагранжа. Для этого центр масс тела последовательно переводится с первой на третью главную ось. В этом примере многообразие $Q_{h,g}^3$ диффеоморфно S^3 и постоянная $g = 0$. Даже малое отклонение центра масс тела с главной оси инерции приводит к появлению областей хаотичности, но островки регулярных траекторий все-таки остаются при любом вращении барицентрической оси в главной плоскости. В случае Лагранжа кривые (15), (16) на $\partial V_{h,g}$ и на сфере Пуассона являются окружностями, поэтому и кривые на рис. 4 постепенно выпрямляются.

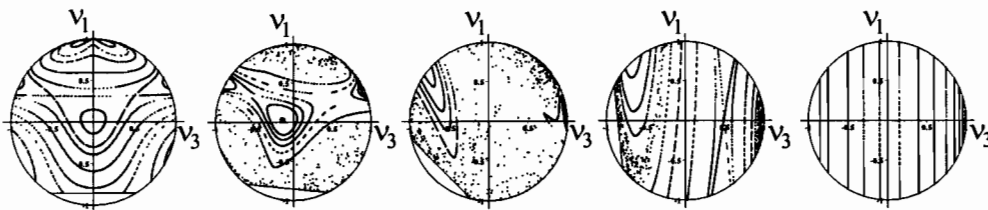


Рис. 4

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. – Ижевск: Удмурдский ун-т. – 1999. – Т. 1. – 444 с., Т.2. – 448 с.
2. Гашененко И.Н. Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиростата // Механика твердого тела. – 1997. – Вып.29. – С.1–7.
3. Горр Г.В., Илюхин А.А. Случай постоянства модуля момента количества движения гиростата // Там же. – 1974. – Вып.6. – С.9–15.
4. Каток С.Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // Успехи мат. наук. – 1972. – 27, вып.2. – С.126–132.
5. Ковалев А.М., Киселев А.М. О конусе осей равномерного вращения гиростата // Механика твердого тела. – 1972. – Вып.4. – С.36–45.
6. Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. – М: Изд-во МГУ, 1991. – 301 с.
7. Смейл С. Топология и механика // Успехи мат. наук. – 1972. – 27, вып.2. – С.77–121.
8. Татаринцев Я.В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика. – 1974. – N 6. – С.99–105.
9. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 200 с.
10. Харламов П.В. Гиростаты // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – N 9. – С.37–40.

11. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
12. Gasheneko I.N. Angular velocity of the Kovalevskaya top // Regular and chaotic dynamics. – 2000. – 5, N 1. – P.104-113.
13. Hess W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – 37. – S.153-181.
14. Jacob A. Invariant manifolds in motion of a rigid body about a fixed point // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 1971. – 16, N 10. – P.1497-1521.
15. McCord C.K., Meyer K.R., Wang Q. The integral manifolds of the three body problem // Memoirs of the AMS. – 1998. – 132, N 628. – 91 p.
16. Oshemkov A.A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // Advances in Sov. Math. – 1991. – 6. – P.67-146.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 20.12.99

УДК 531.38

©2000. А.М. Ковалев, В.В. Кириченко

УРАВНЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА ГЕССА В ОКРЕСТНОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Движение гироскопа Гесса рассматривается в специальной системе координат, введенной П.В. Харламовым. В исходных переменных описано и исследовано множество равномерных вращений. С помощью интегралов выполнено понижение порядка уравнений до третьего. Выделены стационарные решения редуцированной системы. Для исходной системы получены линеаризованные в окрестности стационарных движений уравнения и указаны их интегралы.

Гироскоп Гесса [4] занимает важное место в динамике твердого тела благодаря тому, что, во-первых, частными случаями его движения являются случаи Эйлера и Лагранжа, и, во-вторых, решение уравнений движения при данном распределении масс обладает рядом замечательных свойств [1], установленных ещё Г.Г.Аппельротом, А.М. Ляпуновым, П.А.Некрасовым при решении задачи С.В.Ковалевской. Частные случаи движения гироскопа Гесса описываются решениями В.Гесса и А.И.Докшевича, которые достаточно хорошо изучены аналитически и геометрически. Движение гироскопа Гесса в общем случае пока не исследовано. В настоящей работе дан полный анализ равномерных вращений гироскопа Гесса и рассматривается его движение в их окрестности. Выполнена редукция уравнений движения до третьего порядка, получены линеаризованные уравнения и их интегралы.

1. Исходные соотношения. Рассматривается движение твердого тела, имеющего неподвижную точку и находящегося в поле силы тяжести. В качестве подвижной системы координат, жестко связанной с телом, выбирается специальная система координат, введенная П.В.Харламовым [3]. Начало координат выбирается в неподвижной точке, первая ось проводится через центр масс тела, вторая и третья оси направляются так, чтобы выражение кинетической энергии имело вид

$$T = \frac{1}{2}(a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2) + (b_1y + b_2z)x, \quad (1)$$

где x, y, z - проекции вектора момента количества движения тела на выбранные оси; a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 - компоненты гирационного тензора в специальных осях.