

А. М. Стадник, А. О. Силин

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: ostadnyk@ire.kharkov.ua

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ДИПОЛЬ НАД ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА: РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА

Задача обобщения классических результатов об излучении электрического диполя над поверхностью Земли на случай полупространства из левостороннего метаматериала с одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями важна для многих практических приложений, связанных с фокусировкой волновых полей. При этом желательно обойтись без излишних упрощений: приближения геометрической оптики, пренебрежения потерями, ограничений на волновой пакет, связанных с введением групповой скорости, неучета типа (только монополь) источника излучения. В работе строго решена модельная задача об излучении элементарного электрического диполя, расположенного нормально к плоской границе раздела диссипативных обычной и левосторонней сред. Численное моделирование выявило ожидаемую лепестковую структуру отраженного поля в первой среде и сложную (в среднем конусообразную) интерференционную структуру поля с выраженной областью максимума в полупространстве из левостороннего метаматериала. Исследовано пространственное распределение электромагнитного поля в обеих средах в зависимости от положения диполя и от величины потерь в левостороннем метаматериале. Анализ поведения вектора Пойнтинга подтвердил гипотезу, что изменение знака его тангенциальной компоненты при переходе границы раздела, характерное для электромагнитных поверхностных волн, является причиной фокусирующей способности именно границы раздела обычной и левосторонней сред, а не каждой из них по отдельности. Ил. 5. Библиогр.: 20 назв.

Ключевые слова: электрический диполь, электромагнитное поле, вектор Пойнтинга, левосторонний метаматериал, граница раздела.

Излучение вертикального электрического диполя над полуплоскостью впервые рассмотрено А. Зоммерфельдом применительно к проблеме распространения радиоволн над поверхностью Земли [1, 2]. Результаты многочисленных дальнейших работ суммированы в монографиях [3–5] с последующими уточнениями в обзорах [6–9].

Теоретическое предсказание [10] и последующая экспериментальная реализация левосторонних метаматериалов с одновременно отрицательными в некотором частотном диапазоне диэлектрической $\varepsilon(\omega)$ и магнитной $\mu(\omega)$ проницаемостями открыли новые возможности для различных приложений [11] и обусловили необходимость обобщения и коррекции полученных ранее результатов на случай левосторонних сред [12, 13].

Авторы принципиально отказались от широко используемого геометрикооптического приближения и сделали упор на модельные точно решаемые задачи. Такой подход позволяет, с одной стороны, количественно оценить: 1) эффекты диссипации в левых средах (которая, как следует из принципа причинности, не может быть уменьшена ниже определенного предела [14]); 2) влияние геометрии задачи; 3) пространственное распределение электромагнитного поля для конкретных типов источников (электрический или магнитный диполь, квадруполь и т. д.) и их различной ориентации.

С другой стороны, полученные аналитические выражения позволяют, по мнению авторов, дать более глубокую физическую трактовку явления фокусировки электромагнитного поля

границей раздела обычной и левосторонней сред, связывая ее с эффективным возбуждением поперечно-магнитных (TM) и поперечно-электрических (TE) поверхностных волн [13]. Особая роль при этом отводится анализу поведения вектора Пойнтинга на границе раздела и внутри левосторонней среды, в отличие от традиционно используемых лучевых представлений, уместных только в геометрической оптике.

В работе [13] рассмотрено поле горизонтального электрического диполя над левосторонним полупространством. Решение аналогичной задачи для вертикального диполя позволило бы, в силу линейности задачи, по принципу суперпозиции получить решение задачи о распределении электромагнитного поля точечного электрического диполя, произвольно ориентированного относительно поверхности раздела.

Такое решение послужит основой для рассмотрения более интересной в практическом плане задачи о фокусировке поля диполя плоским слоем (плоской линзой) из левостороннего метаматериала. Плоская линза проще в изготовлении, а спектр ее приложений простирается от концентрации электромагнитной энергии для интенсивного воздействия на ту или иную среду до получения изображений объектов в задачах локации, диагностики и дефектоскопии.

Целью настоящей работы является теоретический расчет и численное моделирование электромагнитного поля элементарного электрического диполя, расположенного нормально к плоскости раздела обычной среды и левостороннего метаматериала.

1. Постановка задачи. Направим ось z декартовой системы координат перпендикулярно к плоскости раздела $z=0$ двух сред с комплексными диэлектрическими $\varepsilon_a(\omega)$ и магнитными $\mu_a(\omega)$ проницаемостями (рис. 1).

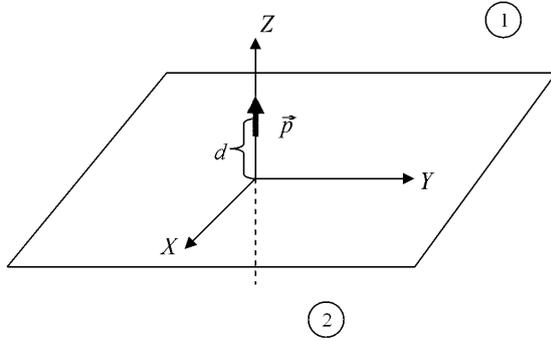


Рис. 1. Геометрия задачи

Индекс $a=1,2$ указывает на верхнее и нижнее полупространства: обычную среду с $\text{Re } \varepsilon_1(\omega) > 0, \text{Re } \mu_1(\omega) > 0$ и левосторонний метаматериал с $\text{Re } \varepsilon_2(\omega) > 0, \text{Re } \mu_2(\omega) > 0$. Обе среды предполагаются пассивными, так что $\text{Im } \varepsilon_a(\omega) > 0, \text{Im } \mu_a(\omega) > 0$. (1)

Электромагнитное поле, создаваемое монохроматическим (временная зависимость вида $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем подразумевается) источником с плотностью тока $\vec{j}_\omega(\vec{r})$, описывается уравнениями для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}_{a\omega}(\vec{r}) &= i\omega\mu_a(\omega)\vec{H}_{a\omega}(\vec{r}), \\ \text{rot } \vec{H}_{a\omega}(\vec{r}) &= -i\omega\varepsilon_a(\omega)\vec{E}_{a\omega}(\vec{r}) + \vec{j}_\omega(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2)$$

с граничными условиями для тангенциальных компонент электрического и магнитного полей

$$\vec{E}_{1\omega}^\tau(\vec{r}) = \vec{E}_{2\omega}^\tau(\vec{r}), \quad \vec{H}_{1\omega}^\tau(\vec{r}) = \vec{H}_{2\omega}^\tau(\vec{r}), \quad z=0.$$

Для упрощения записи в дальнейшем индекс ω у комплексных амплитуд опускаем.

Для вертикального $\vec{j} = (0, 0, j_z)$ аксиально-симметричного тока естественно перейти к цилиндрическим координатам (ρ, φ, z) , в которых $j_z = j_z(\rho, z)$, а система уравнений (2) расщепляется на две независимых подсистемы.

Первая из них описывает возбуждение поперечно-магнитных TM -волн током $j_z(\rho, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{a\rho}}{\partial z} - \frac{\partial E_{az}}{\partial \rho} &= i\omega\mu_a H_{a\varphi}, \\ -\frac{\partial H_{a\varphi}}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon_a E_{a\rho}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{a\varphi}) &= -i\omega\varepsilon_a E_{az} + j_z, \end{aligned} \quad (3)$$

вторая – соответствует задаче о собственных колебаниях поперечно-электрических TE -волн в рассматриваемой системе:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_{a\varphi}}{\partial z} &= i\omega\mu_a H_{a\rho}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{a\varphi}) &= i\omega\mu_a H_{az}, \\ \frac{\partial H_{a\rho}}{\partial z} - \frac{\partial H_{az}}{\partial \rho} &= -i\omega\varepsilon_a E_{a\varphi}. \end{aligned}$$

Интересующая нас первая задача (3) сводится к решению волнового уравнения для $H_{a\varphi}(\rho, z)$

$$\frac{\partial^2 H_{a\varphi}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{a\varphi}) \right] + k_a^2 H_{a\varphi} = \frac{\partial j_z}{\partial \rho} \quad (4)$$

с граничными условиями при $z=0$

$$\begin{aligned} H_{1\varphi}(\rho, 0) &= H_{2\varphi}(\rho, 0), \\ E_{1\rho}(\rho, 0) &= E_{2\rho}(\rho, 0), \end{aligned} \quad (5)$$

а остальные компоненты находятся из соотношений

$$E_{a\rho} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_a} \frac{\partial H_{a\varphi}}{\partial z}, \quad (6)$$

$$E_{az} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_a} \left[j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{a\varphi}) \right]. \quad (7)$$

В уравнении (4) комплексное волновое число $k_a = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$, где квадратные корни рассматриваются в смысле главного значения при разрезе вдоль положительной полуоси в комплексной плоскости. Таким образом, если $w = |w|e^{i\arg w}$, где аргумент $0 \leq \arg w < 2\pi$, то $\sqrt{w} = \sqrt{|w|}e^{i\frac{\arg w}{2}}$.

Отметим, что если w не является чисто вещественным $\text{Im } w \neq 0$, то всегда $\text{Im } \sqrt{w} > 0$, и при таком выборе в силу (1) для любых комплексных ε_a и μ_a имеем $\text{Im } k_a > 0$. Во избежание возможной путаницы отметим также, что при таком выборе в общем случае $\sqrt{w_1}\sqrt{w_2} \neq \sqrt{w_1w_2}$.

Для точечного вертикального электрического диполя с токовым моментом p_z в декартовых координатах $j_z(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z-d)p_z$. Соответственно, в уравнении (4) имеем

$$j_z(\rho, z) = \frac{p_z\delta(z-d)}{2\pi} \int_0^\infty dq q J_0(q\rho). \quad (8)$$

Для записи (8) использовано выражение для двумерной дельта-функции $\delta(x)\delta(y)$ в цилиндрических координатах [15]:

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{1}{\pi\rho} \delta(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dq q J_0(q\rho).$$

Уравнение (4) с граничными условиями (5) и соотношениями (6)–(8) представляет собой искомую постановку задачи.

2. Метод решения. Используя преобразование Ханкеля (Фурье–Бесселя) [15, 16] для магнитной и электрической компонент

$$H_{a\varphi}(\rho, z) = \int_0^{\infty} dq q H_{a\varphi}(q, z) J_1(q\rho), \quad (9)$$

$$E_{a\rho}(\rho, z) = \int_0^{\infty} dq q E_{a\rho}(q, z) J_1(q\rho),$$

преобразуем уравнение (4) и граничные условия (5) к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma_a^2 \right) H_{a\varphi}(q, z) = -\frac{qP_z}{2\pi} \delta(z-d); \quad (10)$$

$$H_{1\varphi}(q, 0) = H_{2\varphi}(q, 0), \quad (11)$$

$$E_{1\rho}(q, 0) = E_{2\rho}(q, 0),$$

где $\gamma_a = \gamma_a(q) = \sqrt{k_a^2 - q^2}$.

Отметим, что в силу сделанных выше замечаний о квадратных корнях $\text{Im} k_a > 0$, а значит, для любых значений $0 \leq q < \infty$ всегда справедливо $\text{Im} \gamma_a(q) > 0$.

В соответствии с соотношениями (6) и (9) имеем

$$E_{a\rho}(q, z) = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \frac{\partial H_{a\varphi}(q, z)}{\partial z},$$

и второе из граничных условий (11) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial H_{1\varphi}(q, 0)}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial H_{2\varphi}(q, 0)}{\partial z}. \quad (13)$$

Кроме того, требование сходимости интегралов (9) приводит к еще одним граничным условиям для $H_{a\varphi}(q, z)$, но уже при $q \rightarrow +\infty$:

$$H_{a\varphi}(q, z) \rightarrow 0. \quad (14)$$

Общее решение системы уравнений (10) для $H_{1\varphi}(q, z)$ в верхнем ($z > 0$) и для $H_{2\varphi}(q, z)$ в нижнем ($z \leq 0$) полупространствах

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma_1^2 \right) H_{1\varphi}(q, z) = -\frac{qP_z}{2\pi} \delta(z-d), \quad z > 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma_2^2 \right) H_{2\varphi}(q, z) = 0, \quad z \leq 0,$$

запишем в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$H_{1\varphi}(q, z) = A_1 e^{i\gamma_1 z} + B_1 e^{-i\gamma_1 z} - \frac{qP_z}{4\pi i \gamma_1} e^{i\gamma_1 |z-d|}, \quad (15)$$

$$H_{2\varphi}(q, z) = A_2 e^{i\gamma_2 z} + B_2 e^{-i\gamma_2 z}.$$

Граничные условия (14) с учетом асимптотического поведения

$$\gamma_a(q) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} iq \quad (16)$$

дают значения для неизвестных констант $B_1 = A_2 = 0$, что позволяет переписать (15) как

$$H_{1\varphi}(q, z) = A_1 e^{i\gamma_1 z} - \frac{qP_z}{4\pi i \gamma_1} e^{i\gamma_1 |z-d|},$$

$$H_{2\varphi}(q, z) = B_2 e^{-i\gamma_2 z}.$$

Первое из граничных условий (11) дает $A_1 - \frac{qP_z}{4\pi i \gamma_1} e^{i\gamma_1 d} = B_2$ и следующие выражения для поля $H_{a\varphi}(q, z)$:

$$H_{1\varphi}(q, z) = B_2 e^{i\gamma_1 z} + \frac{qP_z}{2\pi i \gamma_1} f(q, z), \quad (17)$$

$$H_{2\varphi}(q, z) = B_2 e^{-i\gamma_2 z},$$

где вспомогательная функция

$$f(q, z) = \frac{e^{i\gamma_1(z+d)} - e^{i\gamma_1|z-d|}}{2}.$$

Второе из условий (11) или эквивалентное ему (13) после применения к системе уравнений (17) позволяет найти последнюю константу

$$B_2 = -\frac{1}{\frac{\gamma_1}{\epsilon_1} + \frac{\gamma_2}{\epsilon_2}} \frac{qP_z}{2\pi i \epsilon_1} e^{i\gamma_1 d}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получим

$$H_{1\varphi}(q, z) = H_{\varphi}^i(q, z) + H_{\varphi}^r(q, z),$$

$$H_{\varphi}^i(q, z) = -\frac{qP_z}{4\pi i \gamma_1} e^{i\gamma_1 |z-d|}, \quad (19)$$

$$H_{\varphi}^r(q, z) = R_{1,2}^{\epsilon}(q) \frac{qP_z}{4\pi i \gamma_1} e^{i\gamma_1(z+d)};$$

$$H_{2\varphi}(q, z) = -T_{1,2}^{\epsilon}(q) \frac{\epsilon_2}{\gamma_2} \frac{qP_z}{4\pi i \epsilon_1} e^{i\gamma_1 d - i\gamma_2 z}, \quad (20)$$

где

$$R_{1,2}^{\epsilon}(q) = \frac{\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}}{\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} + \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}}, \quad T_{1,2}^{\epsilon}(q) = \frac{\frac{2\epsilon_1}{\gamma_1}}{\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} + \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}}. \quad (21)$$

3. Представление в терминах теории длинных линий. Смысл такой трактовки проявляется из аналогичной записи для поперечной электрической компоненты $E_{a\rho}(\rho, z)$:

$$E_{1\rho}(q, z) = E_{\rho}^i(q, z) + E_{\rho}^r(q, z),$$

$$E_{\rho}^i(q, z) = -\text{sign}(z-d) \frac{qP_z}{4\pi i \omega \epsilon_1} e^{i\gamma_1 |z-d|}, \quad (22)$$

$$E_{\rho}^r(q, z) = R_{1,2}^{\epsilon}(q) \frac{qP_z}{4\pi i \omega \epsilon_1} e^{i\gamma_1(z+d)},$$

$$E_{2\rho}(q, z) = T_{1,2}^{\epsilon}(q) E_{\rho}^i(q, 0) e^{-i\gamma_2 z}.$$

Компонента поля $E_{a\rho}(\rho, z)$ в среде a после разложения (9) представляет собой суперпозицию ханкель-гармоник $E_{a\rho}(q, z)$, удовлетворяющих уравнению длинных линий [3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma_1^2\right)E_{1\rho}(q, z) = -\frac{qP_z}{2\pi i \omega \varepsilon_1} \delta(z-d), \quad z > 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma_2^2\right)E_{2\rho}(q, z) = 0, \quad z \leq 0.$$

Поле в первой среде есть сумма падающей $E_\rho^i(q, z)$ и отраженной $E_\rho^r(q, z)$ компонент:

$$E_{1\rho}(q, z) = E_\rho^i(q, z) + E_\rho^r(q, z).$$

Парциальный (относящийся к ханкель-гармонике с заданным волновым числом q) коэффициент отражения определяется как

$$R_{1,2}^\varepsilon(q) = \frac{E_\rho^r(q, z=0)}{E_\rho^i(q, z=0)}.$$

Соответственно, поле во второй среде выражается через парциальный коэффициент прохождения, определяемый как

$$T_{1,2}^\varepsilon(q) = \frac{E_{2\rho}(q, z=0)}{E_\rho^i(q, z=0)}.$$

Как видно из (21), оба коэффициента $R_{1,2}^\varepsilon(q)$ и $T_{1,2}^\varepsilon(q)$ имеют характерную структуру

$$R_{1,2}^\varepsilon(q) = \frac{Z_1(q) - Z_2(q)}{Z_1(q) + Z_2(q)}, \quad T_{1,2}^\varepsilon(q) = \frac{2Z_1(q)}{Z_1(q) + Z_2(q)},$$

где обобщенные импедансы $Z_a(q) = \frac{\varepsilon_a}{\gamma_a(q)}$, а также удовлетворяют известному тождеству [3, 4]:

$$T_{1,2}^\varepsilon(q) = 1 + R_{1,2}^\varepsilon(q).$$

4. Расчетные соотношения. Обращая преобразования (9), получим для магнитного поля:

$$H_{1\varphi}(\rho, z) = H_\varphi^i(\rho, z) + H_\varphi^r(\rho, z),$$

$$H_\varphi^i(\rho, z) = -\frac{P_z}{4\pi i} \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{i\gamma_1|z-d|}}{\gamma_1} J_1(q\rho),$$

$$H_\varphi^r(\rho, z) = \frac{P_z}{4\pi i} \int_0^\infty dq q^2 R_{1,2}^\varepsilon(q) \frac{e^{i\gamma_1(z+d)}}{\gamma_1} J_1(q\rho),$$

$$H_{2\varphi}(\rho, z) = -\frac{P_z}{4\pi i} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \int_0^\infty dq q^2 T_{1,2}^\varepsilon(q) \frac{e^{i(\gamma_1 d - \gamma_2 z)}}{\gamma_2} J_1(q\rho).$$

Компоненты полного электрического поля $E_{a\rho}(\rho, z)$ и $E_{az}(\rho, z)$ можно получить либо подставляя в (9) выражения (22) и аналогичные для $E_{az}(q, z)$, либо дифференцируя согласно (6), (7) приведенные выше формулы (23) для $H_{a\varphi}(\rho, z)$. Оба способа дают одинаковый результат:

$$E_{1\rho}(\rho, z) = E_\rho^i(\rho, z) + E_\rho^r(\rho, z),$$

$$E_\rho^i(\rho, z) = -\frac{\text{sgn}(z-d)P_z}{4\pi i \omega \varepsilon_1} \int_0^\infty dq q^2 e^{i\gamma_1|z-d|} J_1(q\rho),$$

$$E_\rho^r(\rho, z) = \frac{P_z}{4\pi i \omega \varepsilon_1} \int_0^\infty dq q^2 R_{1,2}^\varepsilon e^{i\gamma_1(z+d)} J_1(q\rho),$$

$$E_{2\rho}(\rho, z) = \int_0^\infty dq q T_{1,2}^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) e^{-i\gamma_2 z} J_1(q\rho),$$

где значение ханкель-гармоники радиальной компоненты падающего электрического поля на поверхности раздела $E_\rho^i(q, z=0)$ задано выражением

$$E_\rho^i(q, 0) = \frac{qP_z}{4\pi i \omega \varepsilon_1} e^{i\gamma_1 d},$$

$$E_{1z}(\rho, z) = E_z^i(\rho, z) + E_z^r(\rho, z),$$

$$E_z^i(\rho, z) = \frac{P_z}{i\omega \varepsilon_1} \left[\frac{\delta(\rho)}{\pi\rho} \delta(z-d) + \int_0^\infty dq q^3 \frac{e^{i\gamma_1|z-d|}}{4\pi i \gamma_1} J_0(q\rho) \right],$$

$$E_z^r(\rho, z) = \frac{P_z}{4\pi \omega \varepsilon_1} \int_0^\infty dq q^3 R_{1,2}^\varepsilon(q) \frac{e^{i\gamma_1(z+d)}}{\gamma_1} J_0(q\rho),$$

$$E_{2z}(\rho, z) = \int_0^\infty dq q^2 T_{1,2}^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) \frac{e^{-i\gamma_2 z}}{i\gamma_2} J_0(q\rho).$$

Выражения для падающих электрического и магнитного полей можно упростить воспользовавшись тождеством Вейля–Зоммерфельда:

$$\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = i \int_0^\infty dq q \frac{e^{i\sqrt{k^2-q^2}|z|}}{\sqrt{k^2-q^2}} J_0(q\rho).$$

Таким способом можно, например, получить выражение для магнитного поля

$$H_\varphi^i(\rho, z) = \frac{P_z}{4\pi i} \frac{k\rho}{r^2} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) e^{ikr},$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}$, учтено известное соотношение

$$J_1(q\rho) = -\frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \rho} J_0(q\rho)$$

между функциями Бесселя первого и нулевого порядков и явно выполнено необходимое дифференцирование.

5. Численное моделирование. На рис. 2–4 представлены результаты проведенных по формулам (23)–(25) численных расчетов пространственного распределения амплитуды электрического и магнитного полей (в децибелах относительно величин 1 В/м и 1 А/м, соответственно) электрического диполя с единичным токовым моментом, расположенного на высоте d над плоскостью раздела двух сред нормально к ней.

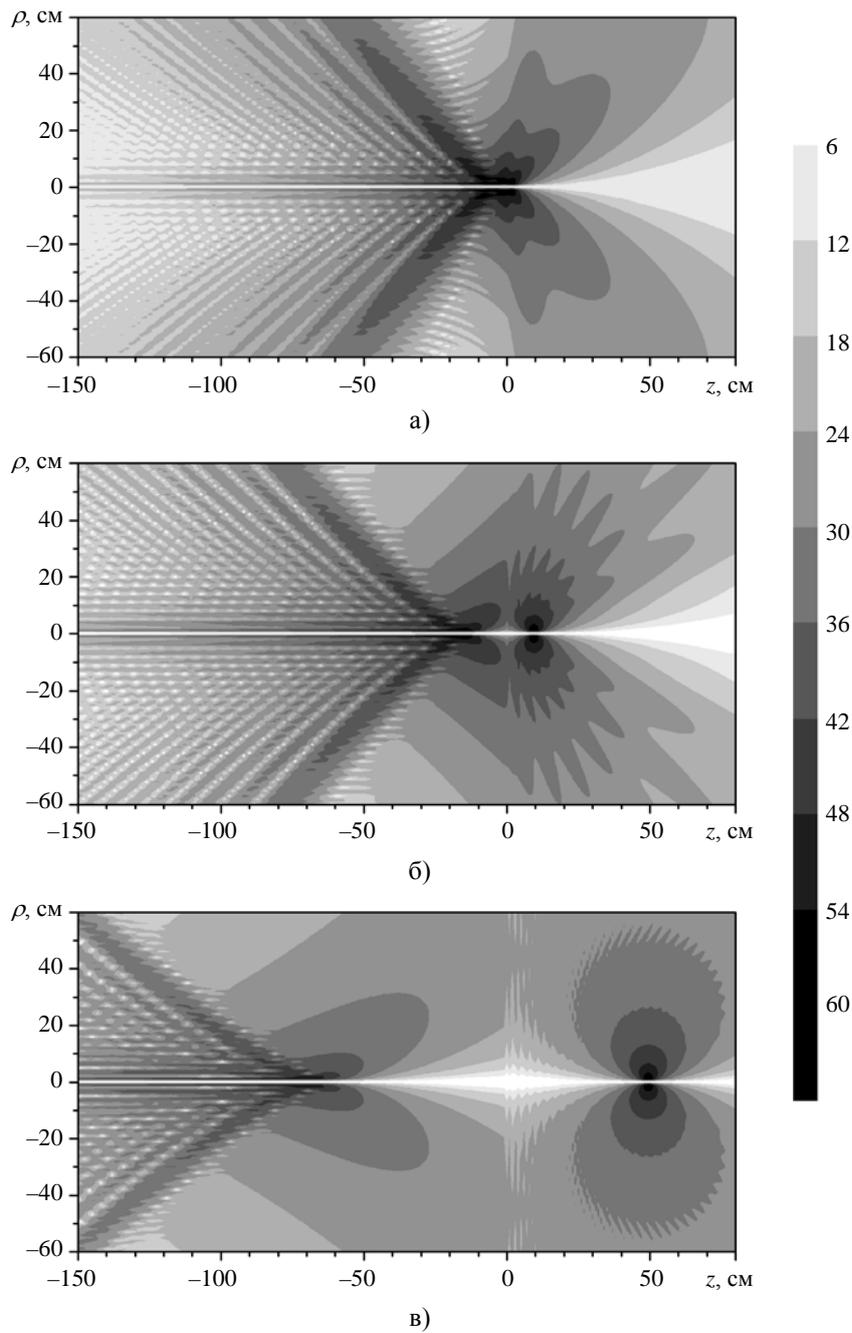


Рис. 2. Пространственное распределение амплитуды магнитного поля для различных высот d диполя: а) 2 см; б) 10 см; в) 50 см

Для удобства сравнения с результатами предыдущих работ [12, 13] использовались значения рабочей частоты $f = \omega / 2\pi = 10$ ГГц. Параметры первой среды (вакуума): $\varepsilon'_1 = \mu'_1 = 1$, $\varepsilon''_1 = \mu''_1 = 0$; параметры второй среды: $\varepsilon'_2 = -3$ и $\mu'_2 = -0,5$. На всех рисунках ось Oz направлена слева направо, $z = 0$ соответствует границе раздела, $z = d$ – высоте диполя. Везде, кроме рис. 4, использованы значения $\varepsilon''_2 = \mu''_2 = 0,001$.

На рис. 2 представлена амплитуда магнитного поля при различных d . Отчетливо видна фокальная область с максимумом около вершины «конуса» (пространственная картина получается вращением вокруг оси Oz), имеющей сложную интерференционную структуру. При удалении диполя от поверхности раздела характерные особенности во второй среде сохраняются, в то время как в первой влияние границы ослабевает и распределение приближается к характерному для однородной среды.

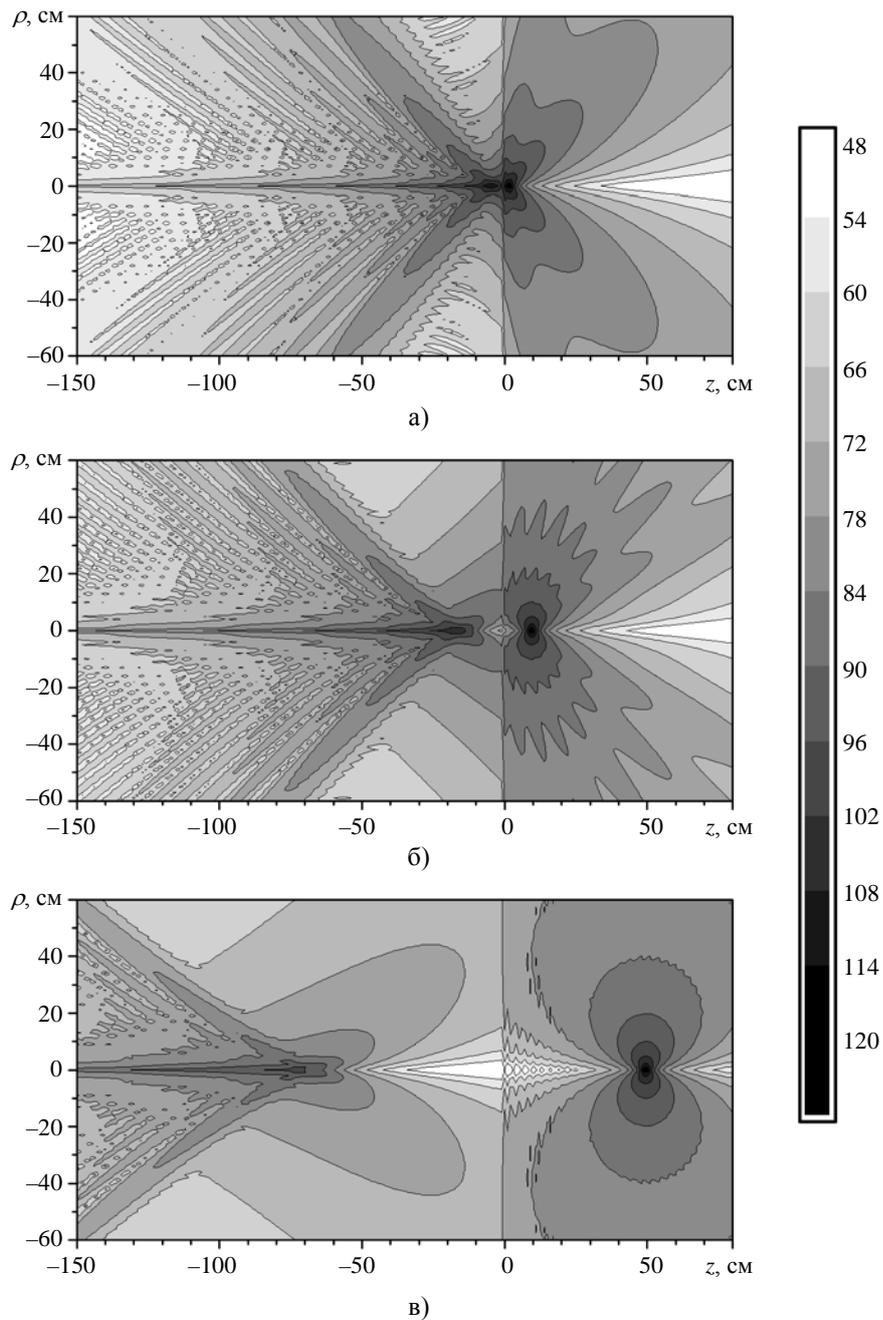


Рис. 3. Пространственное распределение амплитуды электрического поля для различных высот d диполя в слабо поглощающей ($\varepsilon_2'' = 0,001$ и $\mu_2'' = 0,001$) левосторонней среде: а) 2 см; б) 10 см; в) 50 см

На рис. 3, 4 представлены результаты аналогичных расчетов для амплитуды электрического поля $E = \sqrt{E_\rho^2 + E_\phi^2}$. Видно, что изложенные выше особенности пространственного распределения характерны не только для магнитного, но и для электрического поля.

Сравнение рис. 3 и 4 позволяет количественно оценить эффект поглощения во второй среде. Диссипативные процессы уменьшают в целом амплитуду фокального пятна и «сглаживают»

характерную для сред со слабым поглощением тонкую интерференционную структуру.

На рис. 5 представлено поле направлений вектора Пойнтинга, соответствующее распределению электрического поля на рис. 3, б. В правой (обычной) среде вектор Пойнтинга направлен от точечного источника. Изменение знака и величины тангенциальной компоненты вектора Пойнтинга при сохранении его нормальной компоненты на границе раздела приводит к формированию области максимума внутри левосторонней среды.

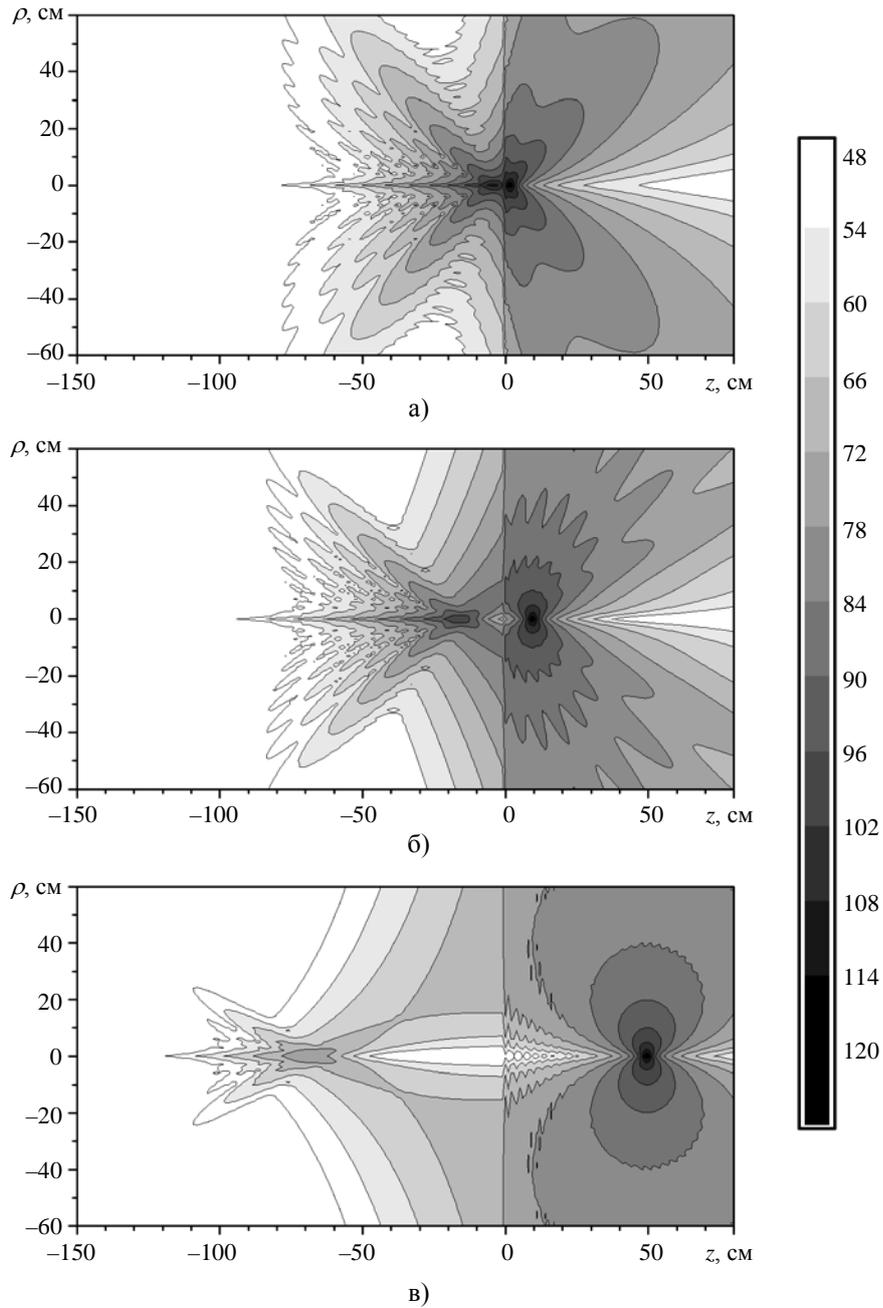


Рис. 4. Пространственное распределение амплитуды электрического поля для различных высот d диполя в левосторонней среде с параметрами $\epsilon_2'' = 0,01$ и $\mu_2'' = 0,01$: а) 2 см; б) 10 см; в) 50 см

Как указывалось в работе [13], объяснение фокусировки на границе раздела обычной и левосторонней сред с использованием граничных условий для вектора Пойнтинга обладает определенными достоинствами, основанными на универсальном характере и ясном физическом смысле вектора плотности потока энергии.

6. Обсуждение результатов. Численные расчеты выявили важную для приложений особенность электрического поля в левосторонней среде: более узкую в радиальном направлении и более

вытянутую вдоль оси z область максимума (иной характер фокусировки) для вертикального диполя, чем для горизонтального [13] при прочих одинаковых параметрах задачи.

Отметим, что полученное решение является точным, так как при его выводе не делалось никаких приближений. Учет потерь (комплексные значения $\epsilon_a(\omega)$ и $\mu_a(\omega)$), с одной стороны, делает более общей постановку задачи, с другой – в силу дисперсионных соотношений является физически единственно обоснованным [14].

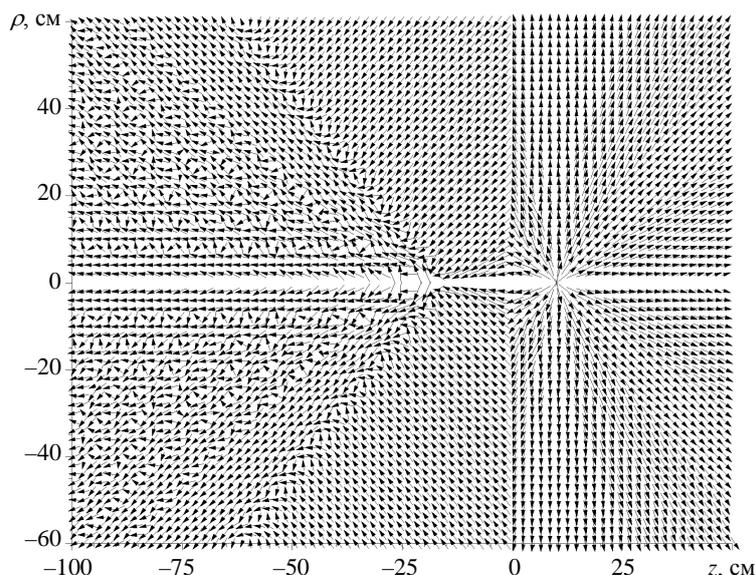


Рис. 5. Пространственная ориентация вектора Пойнтинга в окрестности границы раздела для случая $d = 10$ см

Не использовались понятия групповой скорости и ее антипараллельности с фазовой скоростью как основная характеристика явления фокусировки или «отрицательной рефракции» [17]. Можно обойтись без лучевых представлений геометрикооптического приближения и введения новых концепций [18, 19].

Физическое обоснование необходимости учета диссипативных свойств левосторонней среды заключается в следующем. Из дисперсионных соотношений следует, что если для обычных сред поглощение может быть сколь угодно малым (в предельном случае нулевым для вакуума), то для левосторонней среды оно принципиально не может быть меньше некоторого предела [14]. Это показывает невозможность практической реализации так называемой суперлинзы [20], не отрицая самого эффекта фокусировки.

Полюса для парциальных коэффициентов отражения (21) соответствуют дисперсионному уравнению для поперечно-магнитных поверхностных электромагнитных волн, возбуждение которых является физическим механизмом фокусировки границей раздела.

Выводы. Точное решение модельной задачи об излучении вертикального электрического диполя, расположенного над плоской границей раздела левосторонней и обычной сред, подтверждает общий характер эффекта фокусировки электромагнитного поля границей раздела такой пары сред.

Численные расчеты пространственного распределения электромагнитного поля в левосторонней среде показывают выраженный конусообразный максимум со сложной интерференционной структурой, область максимума которой в целом уже, чем для случая горизонтального диполя.

Качественно такая структура объясняется изменением знака тангенциальной компоненты вектора Пойнтинга при переходе через границу раздела и сохраняется при любых значениях высоты диполя, величины поглощения в обеих средах и других параметров задачи.

Авторы выражают глубокую благодарность В. К. Иванову за постоянный интерес и стимулирующие дискуссии.

Библиографический список

1. Sommerfeld A. Propagation of waves in wireless telegraphy / A. Sommerfeld // *Annalen der Physik*. – 1909. – 28. – P. 665–736.
2. Sommerfeld A. Propagation of waves in wireless telegraphy / A. Sommerfeld // *Annalen der Physik*. – 1926. – 81. – P. 1135–1153.
3. Wait J. R. Electromagnetic waves in stratified media / J. R. Wait. – Oxford: Pergamon Press, 1970. – 608 p.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
5. King R. W. P. Lateral electromagnetic waves: theory and applications to communications, geophysical exploration, and remote sensing / R. W. P. King, M. Owens, T. T. Wu. – N. Y.: Springer-Verlag, 1992. – 746 p.
6. Collin R. E. Hertzian dipole radiation over a lossy earth or sea: some early and late 20th century controversies / R. E. Collin // *IEEE Antennas and Propag. Magazine*. – 2004. – 46, N 2. – P. 64–79.
7. Collin R. E. Some observations about the near zone electric field of a hertzian dipole above a lossy earth / R. E. Collin // *IEEE Trans. on Antennas and Propag.* – 2004. – 52, N 11. – P. 3133–3137.
8. A comparative study of radio wave propagation over the earth due to a vertical electric dipole / T. Fei, L. W. Li, T. S. Yeo et al. // *IEEE Trans. on Antennas and Propag.* – 2007. – 55, N 10. – P. 2723–2732.
9. Michalski K. A. The Sommerfeld half-space problem revisited: from radio frequencies and Zenneck waves to visible light and Fano modes / K. A. Michalski, J. R. Mosig // *J. Electromagnetic Waves and Applications*. – 2016. – 30, N 1. – P. 1–42.
10. Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ / В. Г. Веселаго // *Успехи физ. наук*. – 1967. – 92, вып. 3. – С. 517–526.

11. Иванов В. К. Определение комплексной диэлектрической проницаемости жидкостей коаксиальными зондами с использованием подложек из метаматериала / В. К. Иванов, А. О. Силин, А. М. Стадник // Радиофизика и электрон. – 2011. – 2(16), № 1. – С. 92–99.
12. Петрин А. Б. О распространении электромагнитной волны в среде с отрицательным преломлением от точечного источника, расположенного в воздухе / А. Б. Петрин // Письма в журн. эксперим. и теорет. физики. – 2008. – 87, № 9. – С. 550–555.
13. Иванов В. К. Фокусировка электромагнитного поля точечного электрического диполя границей раздела обычной и левой сред / В. К. Иванов, А. О. Силин, А. М. Стадник // Радиофизика и электрон. – 2013. – 4(18), № 4. – С. 40–48.
14. Stockman M. I. Criterion for negative refraction with low optical losses from a fundamental principle of causality / M. I. Stockman // Phys. Rev. Lett. – 2007. – 98, N 17. – P. 177404 (4 p.).
15. Zemanian A. H. Generalized integral transformations. – N. Y.: Interscience Publ., 1968. – 320 p.
16. Arfken G. B. Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide / G. B. Arfken, H. J. Weber, F. E. Harris. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – 1220 p.
17. Блюх К. Ю. Локализация стационарного электромагнитного поля при помощи плоской границы метаматериала / К. Ю. Блюх, Ю. П. Блюх // Успехи физ. наук. – 2004. – 174, вып. 4. – С. 339–447.
18. Шевченко В. В. Локализация стационарного электромагнитного поля при помощи плоской границы метаматериала / В. В. Шевченко // Успехи физ. наук. – 2011. – 181, вып. 11. – С. 1171–1181.
19. Шевченко В. В. О локализации сходящейся сферической волны, проходящей через плоскую границу среды / В. В. Шевченко // Радиотехника и электрон. – 2016. – 61, № 5. – С. 442–446.
20. Pendry J. B. Negative refraction makes a perfect lens / J. B. Pendry // Phys. Rev. Lett. – 2000. – 85, N 18. – P. 3966–3969.

Рукопись поступила 02.09.2016.

О. М. Stadnyk, О. О. Silin

A VERTICAL DIPOLE OVER METAMATERIAL HALF-SPACE: DISTRIBUTION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD AND THE POYNTING VECTOR

The problem of generalization of the classical results on the electric dipole radiation over the Earth's surface in the case of the left-handed metamaterial half-space is important for many practical applications related to the focusing of wave fields. It is desirable to do without undue simplifications: geometrical optics approximation, neglecting losses, restrictions on the wave packet

associated with the introduction of the group velocity, neglecting the type (only monopole) of source. In the paper, the model problem of radiation of elementary electric dipole situated normally to the plane boundary between dissipative left-handed and ordinary media has been rigorously solved. The numerical simulation revealed the expected radar pattern-like structure of the reflected field in the first medium and complex (on average tapered) interference field structure with a pronounced maximum in the region of the left-handed metamaterial half-space. The spatial distribution of the electromagnetic field in two media, depending on the height of the dipole and the magnitude of losses in the left-handed metamaterial is presented. The analysis of the Poynting vector streamlines confirmed the hypothesis, previously put forward by the authors, that the change in sign of the tangential component at the interface, that is common for electromagnetic surface waves, is the cause of the focusing ability of the boundary between the normal and the left-handed media, rather than each of them individually.

Key words: electric dipole, electromagnetic field, Poynting vector, left-handed metamaterial, boundary.

О. М. Стадник, О. О. Силин

ВЕРТИКАЛЬНИЙ ДИПОЛЬ НАД НАПІВПРОСТОРОМ З МЕТАМАТЕРІАЛУ: РОЗПОДІЛ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ І ВЕКТОР ПОЙНТІНГА

Задача узагальнення класичних результатів про випромінювання електричного диполя над поверхнею Землі на випадок напівпростору з метаматеріалу (лівостороннього середовища) з негативними діелектричною і магнітною проникностями важлива для практичних застосувань фокусування хвильових полів. При цьому бажано обійтися без зайвих спрощень: наближення геометричної оптики, зневаги втратами, обмежень на хвильовий пакет, пов'язаних з уведенням групової швидкості, неврахування типу джерела випромінювання. У роботі строго розв'язано модельну задачу про випромінювання електричного диполя, розташованого нормально до площі розділу дисипативних звичайного і лівостороннього середовищ. Числове моделювання виявило очікувану пелюсткову структуру відбитого поля і складну (в середньому конусоподібну) інтерференційну структуру поля з вираженою областю максимуму в напівпросторі з метаматеріалу. Досліджено просторовий розподіл електромагнітного поля в обох середовищах залежно від положення диполя і величини втрат у метаматеріалі. Аналіз поведінки вектора Пойнтінга підтвердив гіпотезу, що зміна знака його тангенціальної компоненти на площині розділу, яка характерна для електромагнітних поверхневих хвиль, є причиною фокусувальної здатності межі розділу звичайного і лівостороннього середовищ.

Ключові слова: електричний диполь; електромагнітне поле; вектор Пойнтінга; лівосторонній метаматеріал; межа розділу.