

## Преобразование Ватсона для когерентного электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной сферой. II. Деформация контура интегрирования и вычисление асимптотик поля

А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин

Институт радиофизики и электроники НАН Украины им. А. Я. Усикова,  
Украина, 61085, г. Харьков, ул. Ак. Проскуры, 12

Статья поступила в редакцию 6 августа 2003 г.

Исследовано асимптотическое поведение подынтегрального выражения в контурном интеграле для потенциалов Дебая в комплексной плоскости углового момента, которое получено в первой части работы. Найденные оценки позволили выполнить деформацию контура с целью эффективного вычисления коротковолновых асимптотик потенциалов в освещенной зоне и зоне тени большой статистически неровной сферы.

Досліджена асимптотична поведінка підінтегрального виразу у контурному інтегралі для потенціалів Дебая в комплексній площині кутового моменту, отриманому в першій частині роботи. Знайдені оцінки дозволили виконати деформацію контуру з метою ефективно обчислювати короткохвильові асимптотики потенціалів у освітленій зоні та зоні тіні великої статистично нерівної сфери.

### Введение

Возможные деформации контура  $C'$  в интеграле (9) из I части настоящей работы [1] требуют предварительной асимптотической оценки подынтегральной функции  $f_{\alpha}^B(v_1)$  в комплексной плоскости  $v_1$ . Для функции Риккати-Ханкеля

$$\zeta_n^{(1,2)}(x) = \sqrt{\pi x/2} H_{v_1}^{(1,2)}(x), \quad (v_1 = n + 1/2) \quad (1)$$

воспользуемся асимптотиками ( $|v_1| \gg x$ ), приведенными в монографии [2], с. 94. В результате при  $|n| \gg x$  будем иметь

$$\zeta_n^{(1)}(x) \approx \sqrt{\pi} \frac{2i(x_a)^{v_1+1/2}}{(e^{i2\pi v_1} - 1)\Gamma(1+v_1)} (i + \xi_x), \quad (2)$$

$$\zeta_n^{(2)}(x) \approx -\sqrt{\pi} \frac{2i(x_a)^{v_1+1/2}}{(e^{i2\pi v_1} - 1)\Gamma(1+v_1)} (ie^{i2\pi v_1} + \xi_x), \quad (3)$$

где

$$\xi_x = (1 - e^{i2\pi v_1}) e^{2v_1 \ln(2v_1/(ex))}, \quad (4)$$

$$x_a \equiv x/2 = ka/2.$$

На основании этих выражений, с учетом  $x \gg 1$ , получим оценки следующих величин:

$$\ln' \zeta_n^{(1)}(x) \approx \frac{v_1}{x} \frac{i - \xi_x}{i + \xi_x}, \quad (5)$$



$$\ln \zeta_n^{(2)}(x) \approx \frac{v_1}{x} \frac{ie^{i2\pi v_1} - \xi_x}{ie^{i2\pi v_1} + \xi_x}, \quad (6)$$

$$Z_n \approx \frac{ie^{i2\pi v_1} + \xi_x}{ie^{i2\pi v_1} + \xi_r} \frac{i + \xi_r}{i + \xi_x}, \quad (7)$$

где  $\xi_r$  может быть найдена из  $\xi_x$  заменой  $x = ka$  на  $x = kr$ . Для коэффициентов Клебша-Гордана (ККГ) согласно асимптотикам [3, 4] имеем:

$$C(n, n_4, n + p; 0, 0, 0) \sim C(n, n_4, n + p; 1, 0, 1) \sim v_1^0 = \text{const.} \quad (8)$$

Вышеприведенные асимптотики позволяют сделать оценку добавки в эффективном импедансе (часть I, формулы (15), (20))

$$i\Delta_2 \tilde{\eta}_{eff}^{E,M}(n) \approx C \frac{v_1^3}{x^3} \quad (9)$$

и коэффициентов отражения

$$R_n^E \approx -1 + C^{-1} \frac{x^2}{v_1^2} \times \left[ \frac{ie^{i2\pi v_1} - \xi_x}{ie^{i2\pi v_1} + \xi_x} - \frac{i - \xi_x}{i + \xi_x} \right] \times \left[ 1 + C^{-1} \frac{x^2}{v_1^2} \frac{i - \xi_x}{i + \xi_x} \right]^{-1}, \quad (10)$$

$$R_n^M \approx -1 + \left[ 1 - \frac{ie^{i2\pi v_1} - \xi_x}{ie^{i2\pi v_1} + \xi_x} \frac{i + \xi_x}{i - \xi_x} \right] \times \left[ 1 - C^{-1} \frac{x^4}{v_1^4} \frac{i + \xi_x}{i - \xi_x} \right]^{-1}, \quad (11)$$

где  $C$  – константа.

### Деформация контура $C'$

Проведем интересные нас оценки в правой полуплоскости,  $v_1 = v_1' + iv_1'' = |v_1|e^{i\varphi}$  при  $|v_1| \rightarrow \infty$ , выделив следующие случаи:

а)  $\varphi = 0, e^{i\pi v_1} = e^{i\pi|v_1|} \sim O(1),$  (12)

$$\xi_x \sim (ex_a)^{-2|v_1|} e^{2|v_1|\ln|v_1|} \rightarrow \infty;$$

б)  $\varphi = \pi/2, e^{i\pi v_1} = e^{-\pi|v_1|} \rightarrow 0, \xi_x \sim e^{-\pi|v_1|} \rightarrow 0;$  (13)

в)  $0 < \varphi < \pi/2, e^{i\pi v_1} \sim e^{-\pi|v_1|\sin\varphi} \rightarrow 0,$  (14)

$$\xi_x \sim (ex_a)^{-2|v_1|\cos\varphi} e^{2|v_1|[\cos\varphi\ln|v_1| - \varphi\sin\varphi]} \rightarrow \infty;$$

г)  $-\pi/2 < \varphi < 0, e^{i\pi v_1} \sim e^{-\pi|v_1|\sin\varphi} \rightarrow \infty,$  (15)

$$\xi_x \sim (ex_a)^{-2|v_1|\cos\varphi} e^{2|v_1|[\cos\varphi\ln|v_1| - (\varphi+\pi)\sin\varphi]} \rightarrow \infty;$$

д)  $\varphi = -\pi/2, e^{i\pi v_1} = e^{\pi|v_1|} \rightarrow \infty, \xi_x \sim e^{\pi|v_1|} \rightarrow \infty.$  (16)

Соотношения (12)-(16) для  $\xi_x$  позволяют в каждой из областей оценить асимптотику коэффициентов отражения (10), (11). Для оценок поведения подынтегральной функции  $f_\alpha^\beta(v_1)$  в целом необходимо найти асимптотики функций Лежандра  $P_{v_1-1/2}(-\cos\theta)$ . При произвольных значениях  $z = z' + iz'' = \cos\theta$  и  $v_1$  это довольно сложная задача. Случай вещественных  $z = z' = \cos\theta$  на разрезе  $-1 < z' < 1$  упрощает ее. Этот вопрос изложен в Приложении В к I части нашей работы [1].

Опуская детали довольно громоздких оценок, заметим, что учет шероховатости сферы не ухудшает быстроту убывания  $f_\alpha^\beta(v_1)$  при  $|v_1| \rightarrow \infty$  по сравнению со случаем гладкой сферы, а в отдельных областях значений аргумента  $v_1$  даже улучшает. За исключением мнимой оси ( $\arg v_1 = \pm\pi/2$ ), на всей комплексной плоскости  $|f_\alpha^\beta(v_1)|$  убывает с ростом  $|v_1|$  экспоненциально (как и для гладкой сферы), независимо от полярного угла  $\theta$  точки наблюдения. На мнимой оси, по крайней мере,  $|f_\alpha^\beta(v_1)| \sim |v_1|^{-3/2} e^{-\theta|v_1|}$  при  $\theta|v_1| \gg 1$  либо  $|f_\alpha^\beta(v_1)| \sim |v_1|^{-1} e^{-\pi|v_1|}$  при  $\theta|v_1| \ll 1$ , что обеспечивает абсолютную сходимость интеграла (9) из [1] даже при  $\theta = 0$ .



Заметим, что  $f_\alpha^\beta(v_1)$  содержит множители с быстро осциллирующими экспонентами типа  $e^{i\pi v_1}$ ,  $e^{i v_1 \ln |v_1|}$ . Это делает условную сходимость интеграла от  $f_\alpha^\beta(v_1)$  еще более быстрой по сравнению с абсолютной.

Если аналитическое продолжение эффективного импеданса на комплексные значения  $n$  является физически реализуемым, то для него  $\text{Re} \tilde{\eta}_{eff}^{E,M}(n) \geq 0$ . При таком условии полюсы  $f_\alpha^\beta(v_1)$ , т. е. корни характеристического уравнения, как и в случае гладкой сферы, лежат в I либо III квадрантах плоскости  $v_1$  (приложение А). Это позволяет нижнюю часть петли  $C'$  деформировать в луч, параллельный мнимой оси, от  $v_1 = 1/2$  до  $-i\infty + 1/2$ , и пользоваться условием нечетности  $f_\alpha^\beta(-v_1) = -f_\alpha^\beta(v_1)$ , заменить его лучом от  $v_1 = 1/2$  до  $i\infty + 1/2$ .

Сделаем замену  $v_1 = v + 1/2$ . Тогда

$$\frac{i}{2} \int_{C'} f_\alpha^\beta(v_1) dv_1 = \frac{i}{2} \int_C f_\alpha^\beta(v + 1/2) dv, \quad (17)$$

где контур  $C$  состоит из вещественной полуоси от  $+\infty$  до 0 и мнимой от 0 до  $+i\infty$ . При этом величины (10)-(12) из I части, определяющие  $f_\alpha^\beta(v + 1/2)$ , выглядят следующим образом:

$$f_\alpha^\beta(v + 1/2) = -\frac{2v+1}{\sin \pi v} X^\beta(v + 1/2) \hat{\zeta}_v^{(2)}(kr) \times (\Phi_\alpha^\beta \cdot \hat{\zeta}_v^{(1)}(kb)) P_\nu(-\cos \theta), \quad (18)$$

$$X^\beta(v + 1/2) = 1 + R_\nu^\beta Z_\nu, \quad (19)$$

$$Z_\nu = \frac{\hat{\zeta}_v^{(2)}(x) \hat{\zeta}_v^{(1)}(kr)}{\hat{\zeta}_v^{(1)}(x) \hat{\zeta}_v^{(2)}(kr)},$$

$$\Phi_r^\beta = \begin{cases} 1, & \beta = E \\ 0, & \beta = M \end{cases}, \quad (20)$$

$$\Phi_h^\beta = v^{-1} (v + 1)^{-1} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial kb}, & \beta = E \\ 1, & \beta = M \end{cases}.$$

### Асимптотика поля в зоне тени

Имея в виду убывание  $f_\alpha^\beta(v + 1/2)$  при  $|v| \rightarrow \infty$  и наличие полюсов  $v_s$  в I квадранте, из теоремы Коши получим:

$$\frac{i}{2} \int_C f_\alpha^\beta(v + 1/2) dv = \pi \sum_{v_s} \text{Res} f_\alpha^\beta(v + 1/2), \quad (21)$$

где вычеты в полюсах  $v_s$  определяются выражением

$$\begin{aligned} \text{Res}_{v_s} f_\alpha^\beta(v + 1/2) = \\ = - \left[ \frac{2v+1}{\sin \pi v} \hat{\zeta}_v^{(2)}(kr) (\Phi_\alpha^\beta \cdot \hat{\zeta}_v^{(1)}(kb)) P_\nu(-\cos \theta) \right]_{v=v_s} \times \\ \times \text{Res}_{v_s} R_\nu^\beta \frac{\hat{\zeta}_v^{(2)}(x)}{\hat{\zeta}_v^{(1)}(x)}. \end{aligned}$$

Для парциальных волн электрических мультиполей ( $\beta = E$ ), используя значение вронскиана для  $\hat{\zeta}_v^{(i)}(x)$ , получим:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{v_s} R_\nu^E \frac{\hat{\zeta}_v^{(2)}(x)}{\hat{\zeta}_v^{(1)}(x)} = \\ = \frac{2i / \hat{\zeta}_v^{(1)}(x)}{\frac{\partial}{\partial v} \left[ \hat{\zeta}_v^{(1)}(x) + i \tilde{\eta}_{eff}^E(v) \hat{\zeta}_v^{(1)}(x) \right]} \Bigg|_{v=v_s^E} \quad (22) \end{aligned}$$

Аналогично, для волн магнитных мультиполей ( $\beta = M$ )

$$\begin{aligned} \text{Res}_{v_s} R_\nu^M \frac{\hat{\zeta}_v^{(2)}(x)}{\hat{\zeta}_v^{(1)}(x)} = \\ = \frac{-2i / \hat{\zeta}_v^{(1)'}(x)}{\frac{\partial}{\partial v} \left[ \hat{\zeta}_v^{(1)}(x) - i \tilde{\eta}_{eff}^M(v) \hat{\zeta}_v^{(1)'}(x) \right]} \Bigg|_{v=v_s^M}, \quad (23) \end{aligned}$$



где  $v_s^\beta$  – корни выражений под знаком  $\frac{\partial}{\partial v}$  в знаменателях (22) и (23) соответственно.

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \int_{c'} f_\alpha^\beta(v_1) dv_1 = \\ & = -2\pi i \sum_s \frac{2v+1}{\sin \pi v} \frac{\hat{\zeta}_v^{(1)}(kr) (\Phi_\alpha^\beta \cdot \hat{\zeta}_v^{(1)}(kb))}{M_v^\beta(x)} \times \\ & \times P_v(-\cos \theta) \Big|_{v=v_s^\beta}, \end{aligned} \quad (24)$$

причем

$$M_v^\beta(x) = \begin{cases} \hat{\zeta}_v^{(1)}(x) \frac{\partial}{\partial v} \left[ \hat{\zeta}_v^{(1)}(x) + i\tilde{r}_{\text{eff}}^E(v) \hat{\zeta}_v^{(1)}(x) \right], & \beta = E \\ -\hat{\zeta}_v^{(1)}(x) \frac{\partial}{\partial v} \left[ \hat{\zeta}_v^{(1)}(x) - i\tilde{r}_{\text{eff}}^M(v) \hat{\zeta}_v^{(1)}(x) \right], & \beta = M \end{cases} \quad (25)$$

$$(26)$$

Ряды по вычетам (24) хорошо сходятся в области тени  $\left( \arccos \frac{a}{a+b} < \theta < \pi \right)$ . В освещенной области быстрота сходимости рядов по вычетам достигается лишь после выделения геометрической части решения.

#### Асимптотика поля в освещенной зоне

Как было показано в работе [5], выделить геометрическую часть решения можно довольно естественным путем с помощью процедуры “расщепления” ([6], с. 141, формула 10):

$$P_v(-z) = e^{\mp i\pi v} P_v(z) - \frac{2}{\pi} \sin \pi v Q_v(z), \quad (27)$$

где верхний знак соответствует  $\text{Im } z > 0$ , нижний –  $\text{Im } z < 0$ . Выбирая  $z = \cos \theta - i0$ , получим:

$$P_v(-\cos \theta) = e^{i\pi v} P_v(\cos \theta) - \frac{2}{\pi} \sin \pi v Q_v(\cos \theta - i0). \quad (28)$$

Появление множителя  $e^{i\pi v}$  в первом слагаемом (27) улучшает сходимость ряда вычетов в освещенной зоне, а множитель  $\sin \pi v$  при втором – устраняет полюса  $f_\alpha^\beta(v+1/2)$  на вещественной оси, и тем самым дает возможность применить для вычисления геометрической части поля метод перевала.

Оценим геометрическую часть поля для радиального электрического диполя:

$$J_r^E = \frac{1}{2} \int_c f_r^E(v+1/2) dv, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} f_r^E &= -\frac{2v+1}{\sin \pi v} [1 + R_v^E Z_v] \times \\ & \times \hat{\zeta}_v^{(2)}(kr) \hat{\zeta}_v^{(1)}(kb) P_v(-\cos \theta). \end{aligned} \quad (30)$$

Вторичное геометрическое поле есть

$$\begin{aligned} J_r^{E(g)} &= \frac{2i}{\pi} \int_c (v+1/2) \times \\ & \times R_v^E \frac{\hat{\zeta}_v^{(1)}(kb) [\hat{\zeta}_v^{(2)}(x)]^2 \hat{\zeta}_v^{(1)}(kr)}{\hat{\zeta}_v^{(1)}(x) \hat{\zeta}_v^{(2)}(x)} Q_v(\cos \theta - i0) dv. \end{aligned} \quad (31)$$

Следуя [7] (с. 23), для пяти быстро меняющихся функций в (31) воспользуемся интегральными представлениями (см. [6], с. 157, формула (12); с. 144, формула (21)). В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} J_r^{E(g)} &= \frac{ikx\sqrt{br}}{4\pi^3} \int_c dv A(v) \int_{-\pi+i\infty}^{\pi-i\infty} d\tau_1 \int_{-\pi+\pi-i\infty}^{\pi-\pi+i\infty} d\tau_2 \times \\ & \times \int_{-\pi+\pi-i\infty}^{\pi-\pi+i\infty} d\tau_3 \int_{-\pi+i\infty}^{\pi-i\infty} d\tau_4 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\tilde{s}}, \end{aligned} \quad (32)$$



где

$$A(v) = \frac{(v+1/2)R_v^E}{\hat{\zeta}_v^{(1)}(x)\hat{\zeta}_v^{(2)}(x)}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \tilde{S}(v, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, t) = \\ &= kb \cos \tau_1 - ka (\cos \tau_2 + \cos \tau_3) + kr \cos \tau_4 + \\ &+ (v+1/2)(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3 + \tau_4) + \\ &+ i(v+1) \ln(\cos \theta - i \sin \theta \operatorname{ch} t). \end{aligned} \quad (34)$$

Найдем точку перевала, приравнявая нулю частные производные  $\tilde{S}$  по каждой переменной. Тогда

$$t_s = 0, \quad (\tau_2 - \tau_1)_s + (\tau_3 - \tau_4)_s = \theta_s,$$

$$v_s + 1/2 = kb \sin \tau_1 = ka \sin \tau_2 = ka \sin \tau_3 = kr \sin \tau_4|_s,$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_s &= k(b \cos \tau_1 - 2a \cos \tau_2 + r \cos \tau_4) + \theta/2 = \\ &= k(D_1 + D_2) + \theta/2, \end{aligned}$$

$$\text{где } D_1 = b \cos \tau_1 - a \cos \tau_2, \quad D_2 = r \cos \tau_4 - a \cos \tau_3.$$

При этом главный член асимптотики

$$J_r^{E(s)} \approx \frac{-ikx\sqrt{br}}{4\pi^3} \frac{(2\pi)^3}{\sqrt{\Delta_s}} A(v_s) e^{i\tilde{S}_s}, \quad (35)$$

где значение гессиана в седловой точке равно

$$\begin{aligned} \Delta_s &= -ik^3 a \cos \tau_2 [rD_1 \cos \tau_4 + bD_2 \cos \tau_1] \times \\ &\times (v_s + 1) e^{i\theta} \sin \theta. \end{aligned} \quad (36)$$

Если ограничиться асимптотикой Дебая для  $\hat{\zeta}_v^{(i)}(x)$ , то получим значение множителя

$$A(v_s) = (v_s + 1/2) R_{v_s}^E \sqrt{1 - v_s^2/x^2}. \quad (37)$$

Здесь исключена область скользких углов ( $\tau_2 \sim \pi/2$ ). Входящий в  $\Delta_s$  множитель

$$v_s + 1 = \frac{1}{2} + x \sin \tau_2 \approx x \sin \tau_2, \quad (38)$$

так как мы должны исключить малые углы наблюдения,  $\theta \approx 0$ , где не выполняется используемое в (32) интегральное представление для функции  $Q_v(\cos \theta - i0)$ . Поэтому

$$J_r^{E(s)} \approx 2ikbr \alpha_{sp} R_{v_s}^E \frac{e^{ik(D_1+D_2)}}{D_1 + D_2}, \quad (39)$$

а коэффициент сферической расходимости  $\alpha_{sp}$  совпадает с выражением (9) на с. 89 монографии [7].

Особо отметим, что  $v_s$ , определяющее значение  $R_{v_s}^E$  в (37), а следовательно и  $\Delta_2 \tilde{\eta}_{eff}^E(v_s)$ , согласно (38) зависят исключительно от геометрии задачи ( $v_s \approx x \sin \tau_2$ ) и являются вещественными величинами. По своему смыслу  $k_{\perp} = v_s/a = k \sin \tau_2$  есть проекция на касательную плоскость в “зеркально отражающей” точке “средней” сферы волнового вектора  $\vec{k}$ , направленного вдоль луча, который падая под углом  $\tau_2$  из источника, отражается под углом  $\tau_3$  в точку наблюдения. Углы  $\tau_2 = \tau_3$  в зеркальной точке отсчитываются от направления радиуса в этой точке до соответствующего луча ([7], с. 88, рис. 20). Разумеется, такой же результат имеет место и для горизонтального диполя.

Ситуация с характеристическими корнями  $v_s^{E,M}$  для волн вычетов иная. Они являются корнями выражений под знаком  $\partial/\partial v$  в соотношениях (25), (26) и зависят от электродинамических свойств сферы, в том числе от  $\Delta_2 \tilde{\eta}_{eff}^{E,M}(v_s^{E,M})$ . Для широкого диапазона значений  $|\tilde{\eta}_0|$  (от 0 до  $\infty$ ) корни  $v_s^{E,M}$  локализованы вблизи значения  $x$  в полосе  $x^{1/3} \tau_s^{E,M}$ , где  $1 \leq |\tau_s^{E,M}| \ll x^{1/3}$ ,  $\arg \tau_s^{E,M} \sim \pi/3$  ([7], с. 44). Это позволяет решать характеристическое уравнение, используя метод итераций с подстановкой



$$\tilde{\eta}_{eff}^{E,M} (v_{s,(j)}^{E,M}) = \tilde{\eta}_0 + \Delta_2 \tilde{\eta}_{eff}^{E,M} (v_{s,(j-1)}^{E,M}) \quad (40)$$

(j=1,2,...),

взяв за нулевое приближение  $v_{s,(0)}^{E,M}$  характеристические корни для случая гладкой сферы с приведенным поверхностным импедансом  $\tilde{\eta}_0$ . Из-за слабой зависимости от  $\tilde{\eta}_0$ , по-видимому, практически всегда достаточно ограничиться первой итерацией  $v_{s,(1)}^{E,M}$ .

### Асимптотика эффективного импеданса

Вычислим эффективный импеданс для поля в освещенной зоне и зоне тени. С этой целью представим выражение (20) для  $\Delta_2 \tilde{\eta}_{eff}^{E,M}$  из части I в виде:

$$F^{E,M}(n) = \text{SUM1} + \text{SUM2}, \quad (41)$$

где

$$\text{SUM1} = \left( \sum_{n_4=0}^{n'} \sum_{p=-n_4}^{n_4} + \sum_{n_4=n'+1}^{\infty} \sum_{p=n_4-2n'}^{n_4} \right) \times F^{E,M}(n, n_4, n+p) - \quad (42)$$

суммы внутри полуполосы, отсекаемой прямыми  $l' = n' + n_4$ ,  $l' = n' - n_4$ ,  $l' = n_4 - n'$  (рис. 1), причем  $n' = [\text{Re}n]$  – целая часть от  $\text{Re}n$ ,  $\Delta n = n - n'$ ,  $l' = n' + p$ . Тогда

$$\text{SUM2} = \sum_{n_4=n'+1}^{\infty} \sum_{p=-n_4}^{n_4-2n'+1} F^{E,M}(n, n_4, n+p) - \quad (43)$$

сумма внутри сектора  $l' = n_4 - n' - 1$ ,  $l' = n' - n_4$ ,  $n_4 > n'$ .

Такое разбиение имеет определенный смысл для проведения последующих оценок. В I части (формула (33)) было показано, что слагаемые  $F^{E,M}(n, n_4, n+p)$  разделяются на две группы: по четным (e) узлам значений  $n_4 - p$ ,

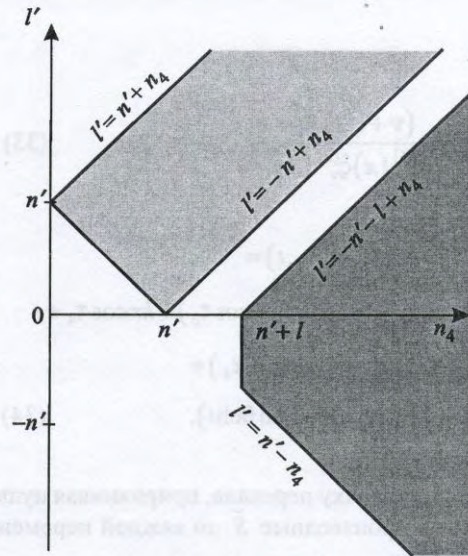


Рис. 1. Области суммирования в формулах (42) и (43)

с “мигающим” множителем  $[1 + (-1)^{n_4-p}] / 2$ , и по нечетным (o), с “мигающим” множителем  $[1 - (-1)^{n_4-p}] / 2$ :

$$F^{E,M}(n, n_4, n+p) = \sum_{\pm} \frac{1 \pm (-1)^{n_4-p}}{2} F^{E,M(e,o)}(n, n_4, n+p). \quad (44)$$

Поскольку узлы суммирования  $(n_4, p)$  ненулевых значений (44) для четной и нечетной части чередуются, то SUM1 и SUM2 для четной и нечетной суммы требуют разбиения внутренней суммы с шагом  $\Delta p = 1$  на подсуммы с шагом  $\Delta p = 2$  и сдвинутыми на 1 пределами суммирования по  $n_4$ . Для проведения такого разбиения необходимо задать определенную четность  $n'$ . Будем считать его четным числом  $n' = 2m'$  (для нечетного  $n' = 2m' + 1$  меняются местами порядки разбиения  $n_4$  и  $p$ , что при последующей приближенной замене дискретного суммирования на интегрирование не имеет принципиального значения). Если ввести волновые числа



$$k_{\perp} = n'/a, \quad \chi = n_4/a, \quad q' = l'/a = (n' + p)/a, \quad (45)$$

шаг изменения которых

$$d\chi = 1/a, \quad dq' = 2/a, \quad (46)$$

то при условии  $n', n_4 \gg 1$  можно пренебречь разницей в пределах суммирования, не превышающей 2, и представить суммы приближенно интегралами:

$$\text{SUM1}^{(e,o)} \approx \frac{a^2}{2} \left( \int_0^{k_{\perp}} d\chi \int_{k_{\perp}-\chi}^{k_{\perp}+\chi} dq' + \int_{k_{\perp}}^{\infty} d\chi \int_{-k_{\perp}+\chi}^{k_{\perp}+\chi} dq' \right) \times F^{E,M(e,o)}(n, n_4, \Delta n + l'), \quad (47)$$

$$\text{SUM2}^{(e,o)} \approx \frac{a^2}{2} \int_{k_{\perp}}^{\infty} d\chi \times \int_{k_{\perp}-\chi}^{-k_{\perp}+\chi} dq' F^{E,M(e,o)}(n, n_4, \Delta n + l'). \quad (48)$$

Здесь  $F^{E,M(e,o)}(n, n_4, \Delta n + l')$  определяется формулами (34)-(37) из I части работы.

Погрешность этих соотношений та же, что и при замене интеграла суммой по формуле прямоугольников, т. е. пропорциональна произведению  $a^{-2}$  на максимум второй производной подынтегральной функции.

Согласно (45)  $n', n_4, l'$  в (48) следует выразить через  $k_{\perp}, \chi, q'$ . В целях упрощения численных расчетов и сопоставления с предельным случаем рассеяния шероховатой плоскостью во внутреннем интеграле по  $q'$  перейдем к угловой переменной  $\varphi$ .

Для первой суммы (47) естественной является замена

$$q' = \sqrt{k_{\perp}^2 + \chi^2 + 2k_{\perp}\chi \cos \varphi}, \quad (49)$$

$$dq' = -(k_{\perp}\chi/q') \sin \varphi d\varphi,$$

так как уравнения границ полуполосы отражают "правило треугольника", согласно которому  $l'$  можно рассматривать как модуль векторной суммы векторов с модулями  $n'$  и  $n_4$ , образующими угол  $\varphi$  между собой. Нижний предел,  $q' = |k_{\perp} - \chi|$ , отвечает значению  $\varphi = \pi$  а верхний,  $q' = k_{\perp} + \chi$ , — значению  $\varphi = 0$ . Выразив  $\sin \varphi$  через  $\cos \varphi$ , а затем через  $q'$ , получим:

$$\text{SUM1} \approx \int_0^{\infty} d\chi \int_0^{\pi} d\varphi \frac{S'}{q'} \sum_{(e,o)} F^{E,M(e,o)}(n, n_4, \Delta n + l'). \quad (50)$$

Здесь  $S' = S|_{\Delta n=0}$ , а  $S$  — величина, определенная в [4] (формула (30)) ( $j_1 = n, j_2 = n_4, j_3 = l$ ),

$$S = \frac{1}{4} \left\{ 4j_3^2 j_1^2 - (j_3^2 - j_1^2 - j_2^2)^2 \right\}^{1/2} = \frac{1}{4} \{ z_0 z_1 z_2 z_3 \}^{1/2}, \quad (51)$$

причем

$$z_0 = j_1 + j_2 + j_3, \quad z_i = z_0 - 2j_i, \quad (i=1,2,3). \quad (52)$$

Для второй суммы можно произвести замену

$$q' = (\chi - k_{\perp}) \text{tg}(\varphi/2), \quad dq' = \frac{\chi - k_{\perp}}{2 \cos^2(\varphi/2)} d\varphi. \quad (53)$$

Тогда

$$\text{SUM2} \approx \frac{a^2}{4} \int_{k_{\perp}}^{\infty} d\chi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \frac{\chi - k_{\perp}}{\cos^2(\varphi/2)} \times \sum_{(e,o)} F^{E,M(e,o)}(n, n_4, \Delta n + l'). \quad (54)$$



Воспользуемся асимптотикой ([4], формула (30)):

$$C^2(n-1, n_4-1, l-1; 0, 0, 0) \approx C^2(n, n_4, l; 0, 0, 0) \approx \frac{l}{\pi S}, \quad (l = j_3). \quad (55)$$

При подстановке (55) в соотношения (34)-(37) из [1] (часть I) можно получить:

$$\sum_{(e,o)} F^{E,M(e,o)}(n, n_4, l) \approx 2A \frac{l}{\pi S} \tilde{F}^{E,M}(n, n_4, l), \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}^E(n, n_4, l) = & \left[ (-1/x - \hat{\Omega}_l^- / \hat{\Omega}_l^+) A_1 + \right. \\ & \left. + \sqrt{n(n+1)l(l+1)} / x^2 \hat{\Omega}_l^+ \right] \times \\ & \times \left[ (1 - \tilde{\eta}_0^2) A_1 - \sqrt{n(n+1)l(l+1)} / x^2 \right] + \\ & + (1 - \tilde{\eta}_0^2) (-1/x + \hat{\Omega}_l^+ / \hat{\Omega}_l^-) A_2^2, \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^M(n, n_4, l) = & \left[ (-1/x + \hat{\Omega}_l^+ / \hat{\Omega}_l^-) A_1 - \right. \\ & \left. - i\tilde{\eta}_0 \sqrt{n(n+1)l(l+1)} / x^2 \hat{\Omega}_l^- \right] \times \\ & \times \left[ (1 - \tilde{\eta}_0^2) A_1 + \tilde{\eta}_0^2 \sqrt{n(n+1)l(l+1)} / x^2 \right] + \\ & + (1 - \tilde{\eta}_0^2) (-1/x - \hat{\Omega}_l^- / \hat{\Omega}_l^+) A_2^2. \quad (58) \end{aligned}$$

Напомним, что согласно (51) при  $l = n + p$

$$S = \frac{1}{4} \left\{ \left[ (2n+p)^2 - n_4^2 \right] \left[ n_4^2 - p^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad (59)$$

а величина  $2A$  определена в [1] выражением

$$2A = \frac{2\pi}{a} (k\sigma)^2 \chi \tilde{W}(\chi). \quad (60)$$

Сложение четных и нечетных частей дает

$$\begin{aligned} \text{SUM1} \approx & 2(k\sigma)^2 \int_0^\infty d\chi \int_0^\pi d\varphi \chi \tilde{W}(\chi) \frac{qS'}{q'S} \times \\ & \times \tilde{F}^{E,M}(n, n_4, \Delta n + l'), \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SUM2} \approx & 2(k\sigma)^2 \int_{k_\perp}^\infty d\chi \int_0^{\pi/2} d\varphi \chi \tilde{W}(\chi) \frac{(\chi - k_\perp)a}{4\cos^2(\varphi/2)} \times \\ & \times \sum_{\pm} \frac{\Delta n \pm l'}{S} \tilde{F}^{E,M}(n, n_4, \Delta n \pm l'). \quad (62) \end{aligned}$$

В последнем интеграле по  $\varphi$  мы перешли от интервала интегрирования  $(-\pi/2, \pi/2)$  к  $(0, \pi/2)$ . Напомним, что  $q' = l'/a$  определено в обоих случаях по-разному (формулы (49) и (53)). Сложность численного интегрирования в (61) и (62) одного порядка. В случае произвольных значений физических параметров задачи необходимо вычислять оба выражения (61) и (62). Однако для “зеркально” отраженной волны в освещенной зоне, когда  $n = k_\perp a$  – вещественная величина, следует ожидать, что величиной (62) можно пренебречь по сравнению с (61). В этом случае  $0 \leq \Delta n < 1$  и для ханкелевской аппроксимации [8]

$$\ln' \zeta_{\Delta n \pm l'}^{(1)}(x) \approx -(x/2)^{1/3} \ln' w(t) [1 + O(\Delta t)], \quad (63)$$

где

$$t = \frac{l' - x}{(x/2)^{1/3}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta n + 1/2}{(x/2)^{1/3}}, \quad (64)$$

а  $w(t)$  – функция Эйри-Фока. Все остальные величины, входящие в подынтегральное выражение, также раскладываются в ряды по степеням  $\Delta n/n'$ ,  $\Delta n/l'$  и т. д. При этом в (61) разложение имеет вид  $1 + O(\Delta n/x^{1/3}, \Delta n/n', \dots)$ , а в выражении (62) – вид  $\pm 1 + O(\Delta n/x^{1/3}, \Delta n/n', \dots)$ . В результате сложения  $\sum_{\pm} [\pm 1 + O(\dots)]$  основ-



ные члены разложения в (62) взаимно уничтожаются и разложение (62) начинается с асимптотически малых членов  $O(\Delta n/x^{1/3}, \Delta n/n', \dots)$ . Основной член асимптотики для (61) получается, если положить  $\Delta n = 0$  (тогда  $n = n'$ ,  $l = l'$ ,  $q = q'$ ,  $S = S'$ , ...):

$$\text{SUM1} \approx 2(k\sigma)^2 \int_0^\infty d\chi \int_0^\pi d\varphi \chi \tilde{W}(\chi) \tilde{F}^{E,M}(n', n_4, l'). \quad (65)$$

Если учесть, что ([4], формула (32))

$$A_1|_{\Delta n=0} \approx \cos \varphi_2 = \frac{l'^2 + n'^2 - n_4^2}{2n'l'} = \frac{k_\perp + \chi \cos \varphi}{q'}, \quad (66)$$

$$A_2^2|_{\Delta n=0} \approx \sin^2 \varphi_2 = \frac{\chi^2 \sin^2 \varphi}{q'^2}, \quad (67)$$

ввести обозначение

$$\ln' \hat{\zeta}_l^{(1)}(x)|_{\Delta n=0} = \ln' \hat{\zeta}_l^{(1)}(x) = (i/k) \chi_z \quad (68)$$

и пренебречь величиной  $x^{-1}$  по сравнению с  $\hat{\Omega}_l^+ / \hat{\Omega}_l^-$ ,  $\hat{\Omega}_l^- / \hat{\Omega}_l^+$ , то подстановка в формулу (65) приводит к выражениям (57), (58) работы [9]. Следует при этом учесть, что в (58) содержится опечатка: в квадратной скобке в последнем слагаемом  $\eta_0^3 k v^2 k_\perp^2 / k^4$  отсутствует показатель степени у  $\eta_0$ . Кроме того,  $q'$  в [9] обозначается как  $v$ .

Подчеркнем особо, что выражения в виде интегралов (57), (58) в [9] были получены для физических (целых) значений  $n, n_4, l$  (незатухающие волны) приближенной заменой суммирования по  $n_4, l$  на интегрирование. Проведенный анализ показывает, что эти выражения асимптотически верны и для вещественных  $n, l$  в освещенной зоне. В работе [9] было отмечено, что (57), (58) совпадают с добавками к тензору эффективного импеданса плоских волн, рассеянных шероховатой плоскостью, составляющая волнового вектора которых в "средней" плоскости равна  $k_\perp = n'/a$ . Этот резуль-

тат кажется вполне естественным для большой сферы ( $x = ka \gg 1$ ) и мелкомасштабных неровностей ( $n_4 = \chi a \gg 1$ ). Когерентное рассеянное поле формируется небольшим участком шероховатой сферы, расположенным вблизи "зеркально" отражающей точки на "средней" сфере, который приближенно может рассматриваться как участок шероховатой плоскости.

В зоне тени, когда  $\text{Im} \Delta n \sim (x/2)^{1/3} \gg 1$ , изменения  $\Delta t$  в аппроксимации (63) не малы, что не позволяет аналитически оценить отношение  $\text{SUM2}/\text{SUM1}$ . В каждом конкретном случае это можно сделать после проведения численного интегрирования.

## Выводы

Успешное осуществление преобразования Ватсона в рассмотренном частном случае позволяет надеяться, что подобное исследование можно провести и в самом общем случае, с учетом в граничных условиях всех без исключения членов возмущений, квадратичных по высоте неровностей. Такие исследования могут послужить основой для оценок ослабления волн в зоне тени шероховатой сферы и проверки существующих эвристических методов этих оценок.

## Приложение А.

### О локализации корней характеристического уравнения

Характеристическое уравнение для корней  $v = v_1 - 1/2$  волн электрических мультиполей имеет вид:

$$\hat{\zeta}_{v_1-1/2}^{(1)}(x) + i\eta(v_1 - 1/2) \hat{\zeta}_{v_1-1/2}^{(1)}(x) = 0. \quad (A1)$$

Следуя [2], (с. 95, 96), рассмотрим вспомогательную задачу ( $\lambda = v_1^2 - 1/4$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{k^2} \frac{d^2 R(\lambda, r)}{dr^2} + \left[ 1 - \frac{\lambda}{(kr)^2} \right] R(\lambda, r) &= 0, \\ \frac{dR(\lambda, r)}{dr} &= -ik\eta(\lambda) R(\lambda, r) \text{ при } r = a. \end{aligned} \right. \quad (A2)$$



С точностью до константы ее решение имеет вид:

$$R(\lambda, r) = D\hat{\zeta}_v^{(2)}(kr) - Q\hat{\zeta}_v^{(1)}(kr), \quad (A3)$$

где

$$D = \hat{\zeta}_v^{(1)'}(x) + i\eta(\lambda)\hat{\zeta}_v^{(1)}(x), \quad (A4)$$

$$Q = \hat{\zeta}_v^{(2)'}(x) + i\eta(\lambda)\hat{\zeta}_v^{(2)}(x). \quad (A5)$$

Поступая аналогично ([2], с. 95-96), получим:

$$\begin{aligned} & |Q|^2 e^{\pi \text{Im} v_1} - |D|^2 e^{-\pi \text{Im} v_1} + |R(\lambda, a)|^2 \text{Re} \eta(\lambda) = \\ & = k^{-1} \text{Im} v_1^2 \int_a^\infty |R(\lambda, r)|^2 r^{-2} dr. \end{aligned} \quad (A6)$$

Для физически реализуемых импедансов  $\text{Re} \eta(\lambda) \geq 0$ . Тогда, если  $v_1$  – корень уравнения  $D(v_1) = 0$ , то из (A6) следует, что  $\text{Im} v_1^2 > 0$  или  $\text{Re} v_1 \text{Im} v_1 > 0$ . Это означает, что характеристические корни могут находиться только в I и III квадрантах.

Аналогичное доказательство проводится и для полей магнитных мультиполей, для чего достаточно в (A1)-(A6) сделать замену  $\eta(\lambda) \rightarrow 1/\eta(\lambda)$ .

Работа выполнена в рамках проекта УНТЦ № 2116.

### Литература

1. А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин. Радиофизика и радиоастрономия. 9, № 1, с. 37-46.
2. Р. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. Москва, Мир, 1969, 608 с.
3. А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин. Радиофизика и радиоастрономия. 2002, 7, № 1, с. 74-80.
4. А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин. Радиофизика и радиоастрономия. 2002, 7, № 1, с. 81-87.
5. W. Franz. Z. Naturf. 1954, 9a, № 9, pp. 705-716.

6. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. I. Москва, Наука, 1973, 296 с.
7. H. Bremmer. Terrestrial Radio Waves. Elsevier, New York, 1949, pp. 343.
8. В. А. Фок. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. Москва, Советское радио, 1970, 517 с.
9. А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин. Радиофизика и радиоастрономия. 1997, 2, № 2, с. 119-126.

### Watson Transformation for the Coherent Electromagnetic Field Scattered by a Statistically Rough Sphere. II. Deformation of the Integration Contour and Calculation of the Field Asymptotics

A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazyinin

The asymptotic behavior of the integrand in the contour integral for Debye potentials in a complex plane of the angular momentum which are obtained in the first part of the work is investigated. The estimates obtained allow contour deformation on purpose to effectively calculate the short-wave asymptotics for the potentials in the illuminated and shadow zones of a large statistically rough sphere.