

Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения сверхширокополосных сигналов на фоне помех

О. В. Лазоренко, С. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,
Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4
E-mail: Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 21 сентября 2001 г.

Кратко излагаются основные свойства вейвлетов, дискретного и интегрального вейвлет-преобразований. Предлагается использовать вейвлет-анализ для обнаружения сверхширокополосных (СШП) сигналов на фоне помех. Приводятся результаты численного вейвлет-анализа модельных СШП сигналов, рассматривается пример обнаружения СШП сигнала на фоне слабокоррелированной аддитивной помехи. Эффективность такого метода обнаружения СШП сигналов сравнивается с методом согласованной фильтрации, основанным на традиционном преобразовании Фурье.

Стисло викладено основні властивості вейвлетів, дискретного та інтегрального вейвлет-перетворень. Запропоновано використовувати вейвлет-аналіз для виявлення надширокосмугових (НШС) сигналів на фоні завад. Наведено результати чисельного вейвлет-аналізу модельних НШС сигналів, розглянуто приклад виявлення НШС сигналу на фоні слабокорельованої адитивної завади. Ефективність такого метода виявлення НШС сигналів порівнюється з методом узгодженої фільтрації, побудованим на традиційному перетворенні Фур'є.

Введение

В последние годы проявляется повышенный интерес к использованию нетрадиционных видов сигналов в различных областях науки и техники [1-4]. К таким видам сигналов относятся, например, сверхширокополосные (СШП) сигналы, которые в литературе именуется также “несинусоидальными”, “негармоническими”, “нестационарными”, “сигналами без несущей” и т. п. Последние четыре термина (особенно “нестационарные”) не являются вполне удачными, и далее используется лишь термин “СШП сигналы”. Такие сигналы имеют не только техногенное происхождение, но и встречаются в природе: многие естественные процессы, в частности в геофизике и физике околоземного пространства, обладают сверхшироким спектром [5-7]. Для СШП сигналов традиционные методы анали-

за во многих случаях либо принципиально неприменимы, либо имеют ограниченные возможности, не отвечающие предъявляемым требованиям. Поэтому является актуальным исследование возможности применения математического аппарата вейвлет-анализа [8, 9] для обнаружения кратковременных апериодических процессов в околоземной среде .

Целью настоящей работы является оценка возможности и целесообразности применения вейвлет-анализа к задаче обнаружения СШП сигналов на фоне помех.

Общие сведения

1. Основы вейвлет-анализа

Вейвлет-анализ, называемый также некоторыми авторами вейвлетным анализом (см., например, [10]), как математический аппарат

разработан сравнительно недавно – в середине 80-х годов XX столетия. Термин “вейвлет” (дословный перевод – маленькая волна, “волнушка”) был введен тогда же Гроссманом и Морле в связи с анализом свойств сейсмических и акустических сигналов [8, 9]. На сегодняшний день вейвлет-анализ уже начал применяться в задачах распознавания образов, при обработке и синтезе всевозможных сигналов, при анализе изображений различной природы и т. п. [8-10].

Вейвлет-преобразование, в частности одномерного сигнала, состоит в его разложении по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами локализованной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. Каждая из функций этого базиса характеризует как определенную пространственную (или временную) частотную составляющую сигнала, так и локализацию этой составляющей в физическом пространстве (или времени). В отличие от традиционного преобразования Фурье, ставящего в соответствие одномерному сигналу одномерную функцию спектральной плотности, вейвлет-преобразование дает двумерную развертку исследуемого одномерного сигнала, при этом частота и координата (или время) рассматриваются как независимые переменные. Последнее означает, что для вейвлет-преобразования увеличение разрешающей способности по одной из переменных не приводит к автоматическому уменьшению разрешающей способности по другой. Поэтому появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно в физическом (время, координата) и в частотном пространствах. Вейвлет-преобразование имеет также отличие и от оконного преобразования Фурье (преобразования Габора), дающего двумерный спектр. Оно заключается в том, что базис первого составляет фактически одна и та же функция, а второго – разные [8, 9]. Таким образом, вейвлет-анализ обеспечивает лучшую частотно-временную локализацию, гибкость анализа и возможность выбора более подходящего вида вейвлета.

Опишем подробнее возможности вейвлет-преобразования, существенные при решении поставленной задачи [9].

1.1. Понятие вейвлета

Рассмотрим пространство $L^2(\mathbf{R})$ функций $f(t)$, определенных на всей действительной оси $\mathbf{R}(-\infty, +\infty)$ и обладающих конечной энергией

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Сконструируем функциональное пространство $L^2(\mathbf{R})$ на основе одной специфической функции, так называемого вейвлета $\psi(t)$.

Функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется R-функцией, если базис $\{\psi_{jk}\}$, определяемый выражением

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

(\mathbf{Z} – множество целых чисел), является базисом Рисса [8, 9], т. е. существуют две константы A_w и B_w , $0 < A_w \leq B_w < \infty$, для которых соотношение, называемое вейвлетной рамкой, –

$$A_w \|\{c_{jk}\}\|^2 \leq \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk} \right\|^2 \leq B_w \|\{c_{jk}\}\|^2,$$

выполняется при любой ограниченной, дважды квадратично суммируемой последовательности $\{c_{jk}\}$:

$$\|\{c_{jk}\}\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{jk}|^2 < \infty.$$

Любая локализованная R-функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется R-вейвлетом (или просто вейвлетом), если для нее существует функция $\dot{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$ (ее пара, двойник), такая, что семейства $\{\psi_{jk}\}$ и $\{\dot{\psi}_{jk}\}$, построенные по принципу соотношения (1), являются парными базисами функционального пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Здесь $\{\dot{\Psi}_{jk}\}$ – “двойник” базиса $\{\Psi_{jk}\}$ в том смысле, что скалярное произведение входящих в них функций удовлетворяет условию:

$$\langle \Psi_{jk}, \dot{\Psi}_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km},$$

где

$$\dot{\Psi}_{jk}(t) = 2^{j/2} \dot{\Psi}(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbf{Z},$$

δ_{jl} , δ_{km} – символы Кронекера.

Тогда для любой функции $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ существует реконструкционная формула вида:

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle f, \Psi_{jk} \rangle \dot{\Psi}_{jk}(t). \quad (2)$$

Величину $\|\Psi(t)\|$ называют нормой функции $\Psi(t)$ и определяют как

$$\|\Psi\| = \langle \Psi, \Psi \rangle^{1/2}, \quad \langle \Psi, \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) \tilde{\Psi}(t) dt,$$

где $\tilde{\Psi}(t)$ – функция, комплексно сопряженная функции $\Psi(t)$.

Вейвлет $\Psi(t)$ называется единичным, если $\|\Psi\| = 1$.

Базис $\{\Psi_{jk}\}$ именуется ортонормированным, если $\|\Psi_{jk}\| = 1 \quad \forall j, k \in \mathbf{Z}$.

Вейвлет $\Psi(t)$ называется ортогональным, если порождаемое им семейство $\{\Psi_{jk}\}$, определяемое соотношением (1), представляет собой ортонормированный базис функционального пространства $L^2(\mathbf{R})$, т. е.

$$\langle \Psi_{jk}, \Psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}, \quad j, k, l, m \in \mathbf{Z}.$$

Для ортогонального вейвлета базисы $\{\Psi_{jk}\}$ и $\{\dot{\Psi}_{jk}\}$ совпадают и реконструкционная формула (2) упрощается:

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \Psi_{jk}(t), \quad (3)$$

$$c_{jk} = \langle f, \Psi_{jk} \rangle. \quad (4)$$

Вейвлет $\Psi(t)$ называется полуортогональным, если его базис Рисса $\{\Psi_{jk}\}$ удовлетворяет условию

$$\langle \Psi_{jk}, \Psi_{lm} \rangle = 0 \quad \text{при } j = l, \quad \forall j, k \in \mathbf{Z}.$$

Вейвлет $\Psi(t)$ именуется неортогональным, если он не является полуортогональным вейвлетом.

Следует отметить, что принципиально возможно разложение функции $f(t)$ и по неортогональному базису вейвлетов. Дело в том, что неортогональный вейвлет, будучи R-вейвлетом, по определению имеет двойника, а потому позволяет создать семейства $\{\Psi_{jk}\}$ и $\{\dot{\Psi}_{jk}\}$, удовлетворяющие условию биортогональности:

$$\langle \Psi_{jk}, \dot{\Psi}_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}, \quad j, k, l, m \in \mathbf{Z},$$

что дает возможность построить и ряд по вейвлетам, и реконструкционную формулу (2).

1.2. Свойства вейвлета

Локализация. Вейвлет должен быть локализован как во времени, так и по частоте.

Он имеет нулевое среднее, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \Psi(t) dt = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

В зависимости от величины m вейвлет принято называть вейвлетом m -го порядка.

Вейвлет должен обладать свойством *ограниченности*, т. е.

$$\int |\Psi(t)|^2 dt < \infty.$$

Автомодельность базиса. Характерным признаком базиса вейвлет-преобразования

является его автомодельность, так как все базисные функции получены с помощью масштабных преобразований и сдвигов из одного и того же исходного вейвлета.

1.3. Вейвлетные ряды

Вернемся к вопросу построения функционального пространства $L^2(\mathbf{R})$ на основе одного вейвлета $\psi(t)$ и определим смысл чисел j и k .

Любой вейвлет локализован в пространстве, поэтому, чтобы с его помощью покрыть всю действительную ось $\mathbf{R}(-\infty, +\infty)$, введем систему сдвигов (переносов) вдоль оси. Для простоты величины сдвигов выберем целыми, т. е. $\psi(t-k)$, где k – целое число. В качестве аналога синусоидальной частоты используем степени двойки: $\psi(2^j t - k)$, где j – также целое число.

Тогда с помощью дискретных масштабных преобразований $(1/2^j)$ и сдвигов $(k/2^j)$ удастся описать все частоты и покрыть всю ось, используя только один базисный вейвлет $\psi(t)$.

Для таких вейвлетов справедливо соотношение

$$\|\psi(2^j t - k)\| = 2^{-j/2} \|\psi(t)\|.$$

Если вейвлет $\psi(t)$ является единичным, то все вейвлеты порождаемого им семейства $\{\psi_{jk}\}$ вида (1) также являются нормированными на единицу, т. е. $\|\psi_{jk}\| = \|\psi\| = 1$.

Тогда любая функция $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ может быть представлена в виде (3), причем коэффициенты разложения c_{jk} , даваемые выражением (4), определяются интегральным вейвлет-преобразованием:

$$c_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle = [W_{\psi} f] \left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right). \quad (5)$$

Таким образом, пара соотношений (3) и (5) представляет собой вейвлетные ряды одномерного временного сигнала.

1.4. Интегральное вейвлет-преобразование

Если перейти от дискретных параметров j и k к непрерывным значениям базисных параметров – масштабного коэффициента a и па-

раметра сдвига b , можно создать другой базис функционального пространства $L^2(\mathbf{R})$. Базисные функции будут иметь вид:

$$\Psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right),$$

$$a \in \mathbf{R}^+, \quad b \in \mathbf{R}, \quad \psi \in L^2(\mathbf{R}).$$

Тогда прямое интегральное преобразование можно записать так:

$$[W_{\psi} f](a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \tilde{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \tilde{\Psi}_{ab}(t) dt. \quad (6)$$

Обратное интегральное преобразование дается соотношением

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \iint [W_{\psi} f](a, b) \Psi_{ab}(t) \frac{da db}{a^2}, \quad (7)$$

где нормализующий коэффициент определяется выражением

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty,$$

а $\hat{\psi}(\omega)$ – фурье-образ функции $\psi(t)$.

Пара выражений (6) и (7) определяет интегральное вейвлет-преобразование одномерного сигнала.

1.5. Дискретное вейвлет-преобразование

Как непрерывное вейвлет-преобразование, так и вейвлетные ряды плохо приспособлены для проведения численных вычислений. Более того, и первое, и второе преобразования дают вейвлет-спектры, содержащие избыточное количество информации, т. е. полностью восстановить сигнал можно и с помощью меньшего количества спектральных компо-

нент. Поэтому разработано дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) [9].

Алгоритм ДВП имеет дело с дискретным вектором $f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, для которого вычисляется вейвлет-спектр, который, в свою очередь, также является дискретным вектором. Следует обратить внимание на то, что непрерывное вейвлет-преобразование, разлагая непрерывную функцию $f(t)$ по непрерывным функциям $\psi_{ab}(t)$, дает непрерывный спектр $W_f(a, b)$. Непрерывная функция $f(t)$ разлагается в вейвлетные ряды по непрерывным функциям $\psi_{ik}(t)$, но спектр $W_f(i, k)$ получается уже дискретным. Дискретное вейвлет-преобразование ставит дискретный спектр в соответствие дискретному, а не непрерывному сигналу. Однако последнее не является принципиальным, поскольку при численном моделировании любая непрерывная функция представляется в цифровом компьютере в дискретном виде. В то же время следует отметить, что и сегодня существуют аналоговые вычислительные машины, где непрерывные функции остаются непрерывными, так как представляются аналоговыми сигналами. Для таких машин алгоритм вейвлет-преобразования также существует и уже применяется [8, 9]. Для ортонормальных вейвлетных базисов на двоичной решетке разработаны алгоритмы многомасштабного анализа (multiresolution analysis), например, пирамида Лапласа (Laplacian pyramid) или подполосное кодирование (subband coding). Их можно считать до некоторой степени аналогом быстрого преобразования Фурье (БПФ) и по аналогии назвать быстрым вейвлет-преобразованием (БВП).

Следует отметить, что количество операций, необходимых для проведения БВП, оказывается равным $O(d)$, где d – размерность дискретного вектора данных, O – символ, обозначающий одинаковый порядок малости величин. Это меньше, чем аналогичное количество операций для БПФ, которое составляет $O(d \log_2 d)$ [9].

Таким образом, БВП очень удобно для проведения численных расчетов и будет далее использоваться в настоящей работе.

1.6. Модели вейвлетов

Как уже было сказано выше, каждый базис вейвлетов строится на основе масштабирования и смещения вдоль временной оси всего лишь одной вейвлетообразующей функции. Поскольку вейвлет-преобразование есть скалярное произведение анализирующего вейвлета на заданном масштабе и анализируемого сигнала, вейвлет-спектр СШП сигнала оказывается более локализованным, чем вейвлет-спектр узкополосного сигнала. Период последнего совпадает с длительностью самого финитного СШП сигнала в том смысле, что вдоль оси a он имеет фактически ту же ширину, а вдоль оси b он уже спектра узкополосного сигнала во столько, во сколько раз меньше количество лепестков данного СШП сигнала по сравнению с указанным узкополосным.

Выбор анализирующего вейвлета, как правило, определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из исследуемого сигнала. Каждый вейвлет имеет характерные особенности как во временном, так и в частотном (в смысле преобразования Фурье) пространстве. Поэтому с помощью разных вейвлетов можно подчеркнуть разные особенности одного и того же анализируемого сигнала.

В настоящей работе для проведения исследований мы выбираем шесть наиболее часто используемых вейвлетов: HAAR-вейвлет, FHAT-вейвлет, WAVE-вейвлет, MHAT-вейвлет, DOG-вейвлет и вейвлет Добечи (Daubechies) [8, 9].

2. Модели СШП сигналов и помех

2.1. Понятие СШП сигнала

Под СШП сигналом понимают сигнал, показатель широкополосности μ которого удовлетворяет условию $1 \leq \mu < 2$. По определению [3]

$$\mu = 2(f_{\max} - f_{\min}) / (f_{\max} + f_{\min}),$$

где f_{\min} и f_{\max} – минимальная и максимальная частоты функции спектральной плотности сигнала. Такие сигналы переносят объем информации в $\mu/\mu_n \gg 1$ раз больше, чем

традиционные узкополосные и широкополосные сигналы, для которых показатель широкополосности $\mu_n \ll 1$. Эта особенность позволяет на качественно новом уровне подойти к решению различных вопросов науки и техники. Так, при использовании для дистанционного радиозондирования (в радиолокации) СШП сигналы дают возможность получить сверхразрешение по дальности (от 0.1 м при длительности импульса радиолокационной станции $\tau_0 \approx (f_{\max} - f_{\min})^{-1} \approx 10^{-9}$ с). Кроме того, они позволяют на более высоком уровне решать задачи обнаружения, распознавания и различения целей, которые имеют специальное антирадарное покрытие (например, изготовленное по технологии “Стелс”), а также получать некоординатную информацию о цели (размеры, форма и т. п.). СШП сигналы используют также в георадарах для дистанционного радиозондирования снегового и ледяного покровов, подповерхностной радиолокации (определение глубины залегания разных пород, поиск воды, повреждений подземных коммуникаций и др.), всепогодной ближней радиолокации, для связи с погруженными подводными лодками и т. д. [1-4]. В [12, 13] обсуждаются другие применения СШП сигналов и, в частности, для исследования околоземного космического пространства.

2.2. Требования к СШП сигналам

Основные требования к СШП сигналам $s(t)$ [3, 4]:

- 1) $\int_{\tau} s(t) dt = 0$ или $\left. \frac{dS}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 0$,
 - 2) $s(0) = s(\tau) = 0$,
 - 3) $s(t)$ – непрерывна для $t \in \mathbf{R}$.
- Здесь τ – длительность сигнала.

2.3. Аналитические модели сигналов

В настоящей работе для исследований будем использовать следующие вещественные временные модели СШП сигналов, предложенные в [11]:

$$s_1(t) = (-1)^n \sin(2\pi nt) \Theta(t), \quad (8)$$

$$s_2(t) = (-1)^n \sin(2\pi nt) \exp(-(2t-1)^2) \Theta(t), \quad (9)$$

$$s_3(t) = -\eta(t) - \eta(t-1) + 2 \sum_{k=1-n}^{n-1} (-1)^{k+1+\delta_k} \eta(t-k/n-1/2), \quad (10)$$

$$s_4(t) = (-1)^n \sin(2\pi nt) \exp(-|2t-1|) \Theta(t), \quad (11)$$

$$s_5(t) = (-1)^n (1 - |2t-1|) \sin(2\pi nt) \Theta(t), \quad (12)$$

$$s_6(t) = (1 - |2t-1|) \cos(4\pi nt) \Theta(t), \quad (13)$$

где $\Theta(t) = \eta(t) - \eta(t-1)$, $\eta(t)$ – функция Хэвисайда; $N = 2n$ для первых пяти сигналов и $N = 2n + 1$ – для последнего, $n \in \mathbf{Z}$, N – количество лепестков СШП сигнала. Основными достоинствами таких моделей являются их простота и адекватность реальным СШП сигналам естественного и техногенного происхождения.

Величина показателя широкополосности сравнительно хорошо оценивается из соотношения $\mu \approx 4/N$ [3].

Для описания реальных процессов в природе, имеющих сверхширокий спектр, будем использовать следующие две модели:

$$s_7(t) = (1 - t/\tau) \exp(-t/\tau) \eta(t), \quad (14)$$

$$s_8(t) = (\exp(-\alpha_1 t) - \exp(-\alpha_2 t)) \cos(\beta t) \eta(t). \quad (15)$$

Вид моделей $s_1 \dots s_8$ приведен на рис. 1. Зависимость $s_7(t)$ описывает импульс давления [14], возникающий при воздушном взрыве (например, при величине тротилового эквивалента взрыва 1 Мт длительность импульса τ_0 – около 4 с). Зависимость $s_8(t)$ является известной моделью ближних атмосфериков [15]. Легко показать, что при $\beta = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ выражение (15) описывает именно СШП сигнал.

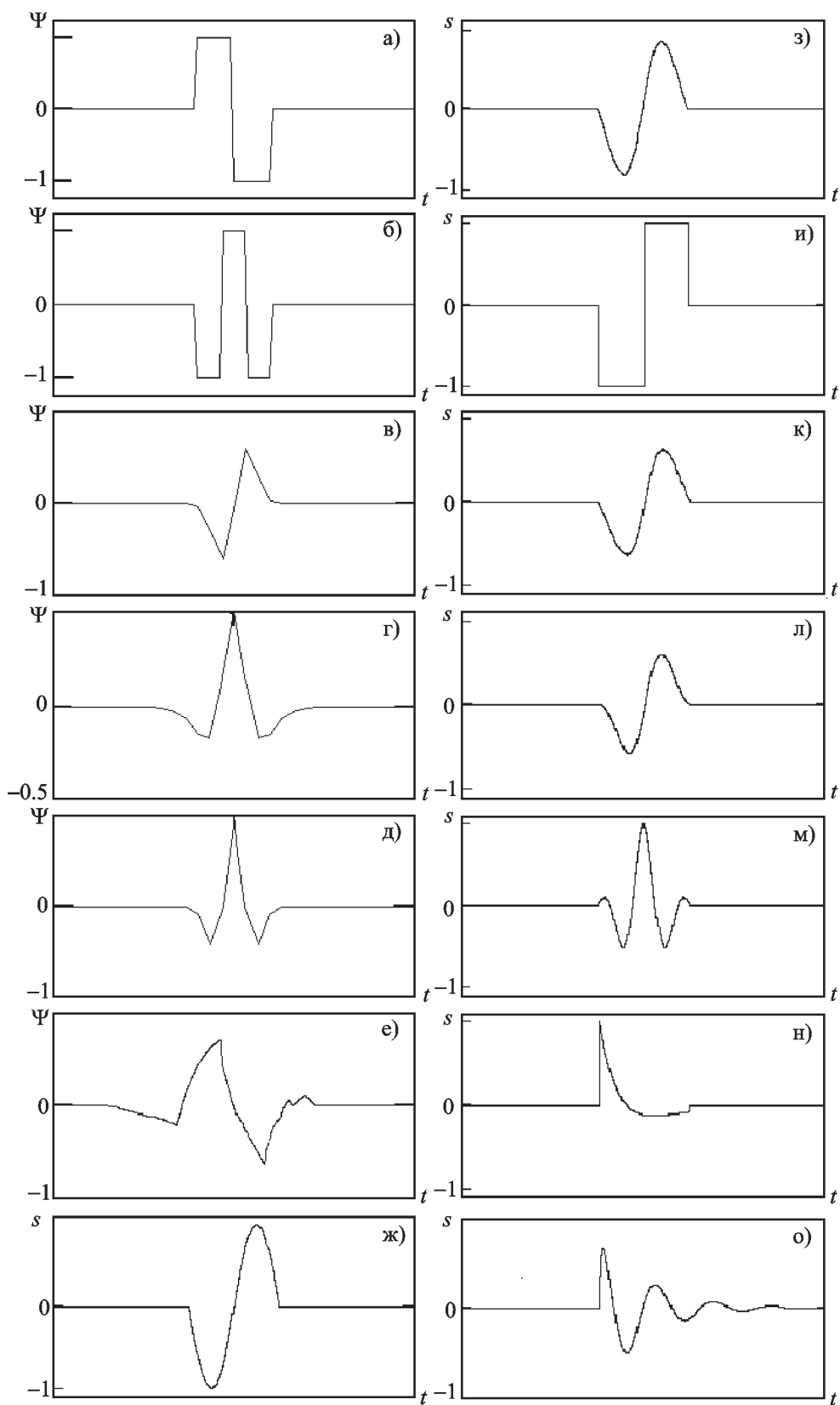


Рис. 1. Модели вейвлетов: а – HAAR-вейвлет, б – FWT-вейвлет, в – WAVE-вейвлет, з – MWT-вейвлет, д – DOG-вейвлет, е – вейвлет Добечи; и СШП сигналов: ж – о – модели $s_1 - s_8$ соответственно

2.4. Модели помехи

Далее в работе будем использовать модели аддитивной помехи $n(t)$, имеющей равномерное и нормальное распределение. Смесь сигнала и помехи запишется при этом в виде:

$$s(t) = s_0(t) + n(t).$$

Мощность помехи задается следующими выражениями для непрерывной $n(t)$ и дискретной n_i временных функций помехи соответственно:

$$P_n = \sigma^2 = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} (n(t) - \bar{n})^2 dt,$$

$$P_n = \sigma^2 = \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} (n_i - \bar{n})^2,$$

Здесь σ^2 – дисперсия помехи, T_n – длительность помехи, N_n – число отсчетов.

Отношение сигнал/помеха для непрерывно и дискретно заданных зависимостей $s(t)$ и $n(t)$ будем определять выражениями:

$$q = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} s_0^2(t) dt}{\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} (n(t) - \bar{n})^2 dt} \tag{16}$$

$$q = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} s_0^2 i}{\frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} (n_i - \bar{n})^2}.$$

Результаты анализа

Представляется целесообразным использовать вейвлет-анализ для описания СШП сигналов [16]. Это обусловлено тем, что любой вейвлет, по сути дела, является именно СШП

сигналом. Такой вывод можно сделать, сравнив требования, предъявляемые к вейвлетам и к СШП сигналам. Обратное утверждение в общем случае является неверным. Отсюда следует, что разложение СШП сигнала в базисе, созданном на основе вейвлетов, должно позволить разрешить основную проблему, возникающую при использовании преобразования Фурье, а именно, бесконечность Фурье-спектра (time-scale spectrum) финитного СШП сигнала. Отдельные попытки в этом направлении предпринимались в США в 90-х годах XX века [17], однако об их результатах нам почти ничего не известно.

1. Разложение модельных СШП сигналов по вейвлетам

Мы провели разложение каждого из модельных СШП сигналов $s_1...s_8$ по системам базисных функций, созданных на основе НААР-вейвлета, ФНАГ-вейвлета, WAVE-вейвлета, МНАТ-вейвлета, DOG-вейвлета с помощью интегрального вейвлет-преобразования и на основе вейвлета Добечи с помощью быстрого вейвлет-преобразования. Вид использованных вейвлетов и СШП сигналов показан на рис. 1.

В качестве примера на рис. 2 представлены непрерывные вейвлет-спектры $W(a,b)$ модельного СШП сигнала (модель s_5) при использовании системы базисных функций, созданной на основе DOG-вейвлета. Важно отметить тот факт, что в терминах интегрального вейвлет-преобразования каждый из рассматриваемых сигналов оказался локализованным как вдоль оси параметра масштабирования a , так и вдоль оси параметра сдвига b . Установлено также, что при увеличении количества лепестков N СШП сигнала его вейвлет-спектр изменяется. При фиксированной длительности сигнала его вейвлет-спектр сужается вдоль оси a и смещается в область меньших a , а при фиксированном расстоянии между нулями сигнала расширяется вдоль оси b . К сожалению, обратное непрерывное вейвлет-преобразование в виде (7) непригодно для численного моделирования [9]. Поэтому в практических целях используется быстрое вейвлет-преобразование [8, 9].

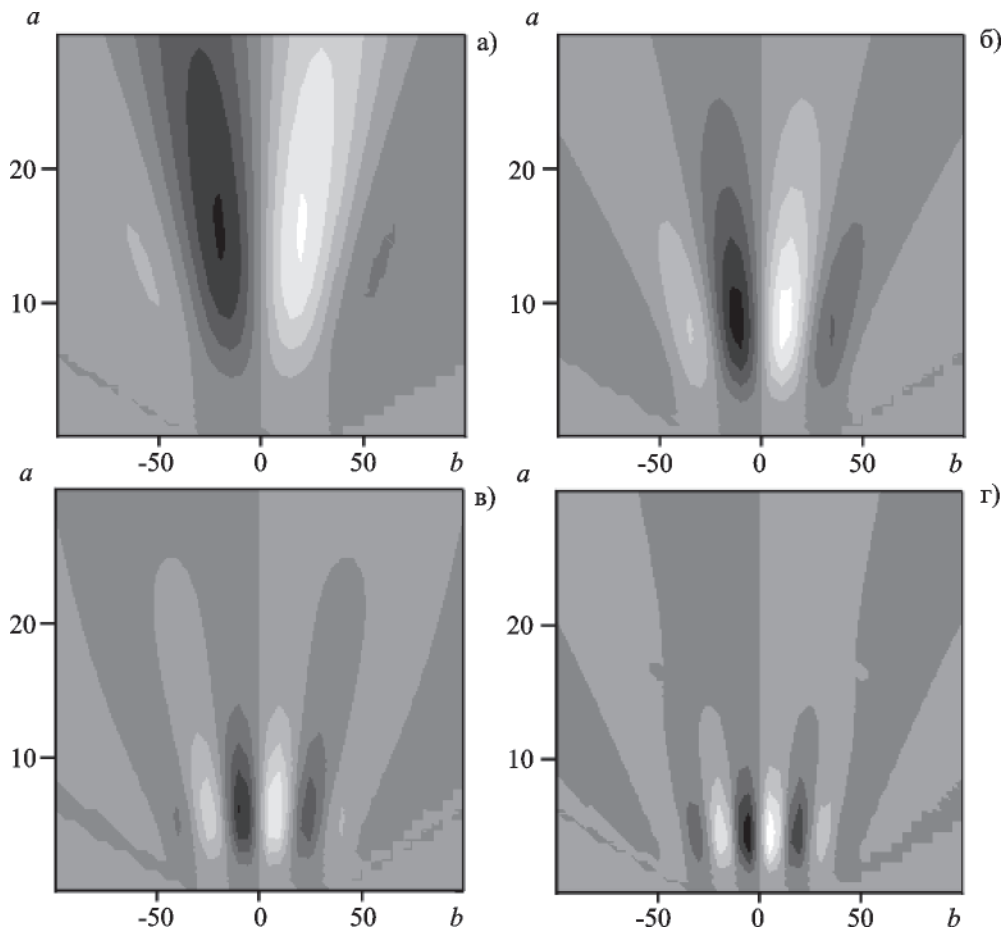


Рис. 2. Непрерывные вейвлет-спектры $W(a,b)$ СШП сигнала (модель s_5) при использовании DOG-вейвлета: а – $N = 2$, б – $N = 4$, в – $N = 6$, г – $N = 8$. Белый цвет соответствует максимуму функции, черный – минимуму, градации серого – промежуточным значениям соответственно

На рис. 3 в качестве примера приводятся разложения модельных СШП сигналов s_7 и s_8 по базису, составленному на основе вейвлета Добечи при разных значениях параметров сигналов. Вид такого дискретного вейвлет-спектра отличается от непрерывного вейвлет-спектра. Это объясняется особенностями построения пирамидального алгоритма, лежащего в основе БВП [9]. Здесь вместо непрерывного параметра масштабирования a используется дискретный параметр L , называемый уровнем разложения и принимающий только натуральные значения.

Установлено также, что по мере увеличения количества лепестков СШП сигнала вейвлет-спектр сигнала постепенно перемещает-

ся в область более высоких значений a и расширяется вдоль оси b . Следовательно, вейвлет-спектр СШП сигналов хорошо локализован вдоль обеих координат, а по мере перехода от СШП сигналов к узкополосным он существенно размывается и смещается.

2. Обратное вейвлет-преобразование модельных СШП сигналов

Зададимся целью проследить, как зависит форма восстановленного сигнала от количества взятых членов дискретного вейвлет-преобразования при отсутствии шумов. Чтобы количественно определить меру сходства восстановленного $s(t)$ и исходного $s_0(t)$ сигналов, введем следующие критерии:

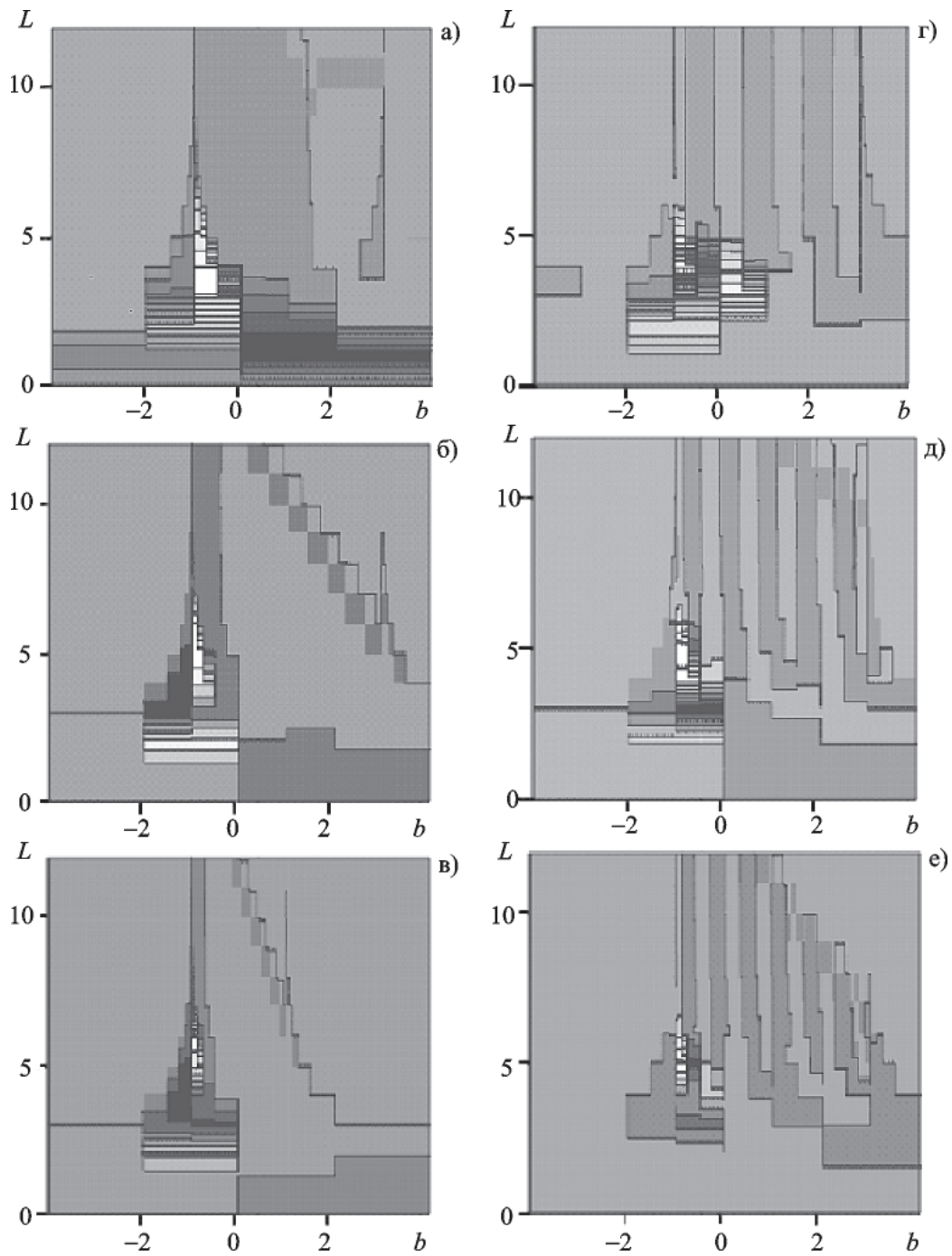


Рис. 3. Вейвлет-спектры БВП, основанного на вейвлете Добечи, для СШП сигналов. Модель s_7 : а – $\tau = 0.4$, б – $\tau = 0.1$, в – $\tau = 0.05$. Модель s_8 : г – $\alpha_2 = 50$, $\alpha_1 = 2$; д – $\alpha_2 = 50$, $\alpha_1 = 5$; е – $\alpha_2 = 50$, $\alpha_1 = 8$. Белый цвет соответствует максимуму функции, черный – минимуму, градации серого – промежуточным значениям соответственно

$$A = \frac{\overline{(s-s_0)^2}}{\overline{s_0^2(t)}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (s(t)-s_0(t))^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_0^2(t) dt}, \quad (17)$$

$$B = \frac{\overline{s(t)s_0(t)}}{\overline{s_0^2(t)}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s_0(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_0^2(t) dt}, \quad (18)$$

$$C = \sqrt{A^2 + (B-1)^2}. \quad (19)$$

Функционалы $A(s(t))$, $B(s(t))$ и $C(s(t))$ изменяются в таких пределах: $0 \leq A \leq 4$, $-1 \leq B \leq 1$, $0 \leq C \leq \sqrt{17}$.

Минимальное значение функционала A соответствует тождественности восстановленного и разложенного сигнала, а максимальное – их полной антикорреляции. И наоборот, минимальное значение функционала B означает антикорреляцию указанных сигналов, а максимальное – их полную тождественность. Следовательно, чем меньше A и чем больше B , тем точнее восстанавливается рассматриваемый сигнал. Другими словами, алгоритм восстановления сигнала $s(t)$ сводится к минимизации функционала $A(s(t))$ при одновременной максимизации функционала $B(s(t))$. Нормированность введенных функционалов позволяет сравнивать разложения различных сигналов по базисам разных вейвлет-функций независимо от параметров самих сигналов и базисных функций. Функционал $C(s(t))$ является нелинейной комбинацией функционалов $A(s(t))$ и $B(s(t))$, служит обобщенной количественной характеристикой качества восстановления сигнала и требует своей минимизации.

На рис. 4 приведены результаты восстановления СШП сигнала (модель s_8) с помощью быстрого вейвлет-преобразования, основанного на вейвлете Добечи. Можно видеть, как с ростом количества учтенных уровней разло-

жения L возрастает точность представления восстановленного сигнала.

Необходимо отметить, что для полного восстановления СШП сигналов, похожих на базисные вейвлеты (см. рис. 1), оказывается достаточным использование шести (модели $s_1 \dots s_5$) или семи (модели s_6 и s_8) уровней разложения, а для менее похожих (модель s_7) нужно задавать одиннадцать – двенадцать уровней. В отличие от преобразования Фурье, где при удалении наиболее высокочастотных компонент фурье-спектра у СШП сигнала появляются лишние (ложные) лепестки и сглаживаются перепады, характер искажений при отсечении части вейвлет-спектра, соответствующей большим номерам уровней разложения, несколько иной. При увеличении числа отбрасываемых уровней разложения временная функция СШП сигнала становится как бы все более изрезанной, но новые лепестки не появляются. Последнее важно для СШП сигнала, поскольку увеличение количества лепестков приводит к уменьшению μ , что весьма нежелательно. Кроме того, сообщение, переносимое СШП сигналом, содержится в его форме. Указанное поведение может объясняться особенностями самого базисного вейвлета, так как известно, что используемый здесь вейвлет Добечи имеет фрактальную структуру. Кроме того, при увеличении числа отбрасываемых уровней разложения на единицу количество точек, которыми представлен сигнал, уменьшается в два раза.

Таким образом, очевидно, что для представления СШП сигналов более предпочтительно использовать именно вейвлет-преобразование, а не преобразование Фурье, так как частотно-временная локализация первого оказывается выше. К тому же БВП работает заметно быстрее, чем БПФ, поскольку требует меньшего количества производимых операций (см. выше).

3. Обнаружение СШП сигнала на фоне аддитивной помехи

Рассмотрим задачу об обнаружении СШП сигнала на фоне аддитивной помехи с использованием вейвлет-преобразования. Применение вейвлет-анализа перспективно как для обнаружения СШП сигналов искусственного происхождения, так и различных кратковре-

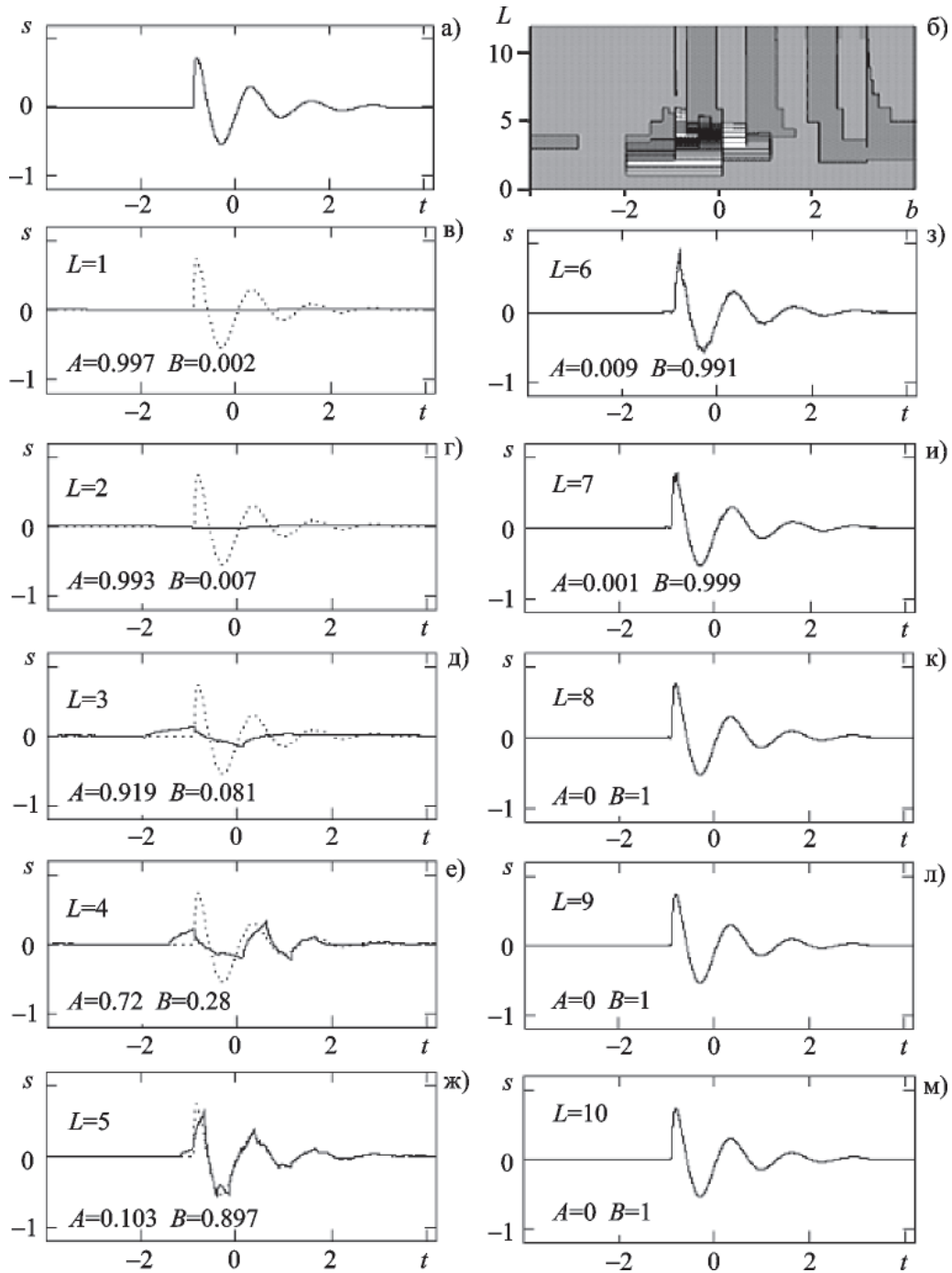


Рис. 4. Восстановление СШП сигнала (модель s_g) с помощью БВП, основанного на вейвлете Добечи: а – исходный сигнал, б – его вейвлет-спектр, в – м – восстановленный сигнал при разных значениях L . Пунктиром обозначен исходный сигнал. Значения функционалов A и B , задаваемых соотношениями (17) и (18), характеризуют степень сходства исходного и восстановленного сигналов

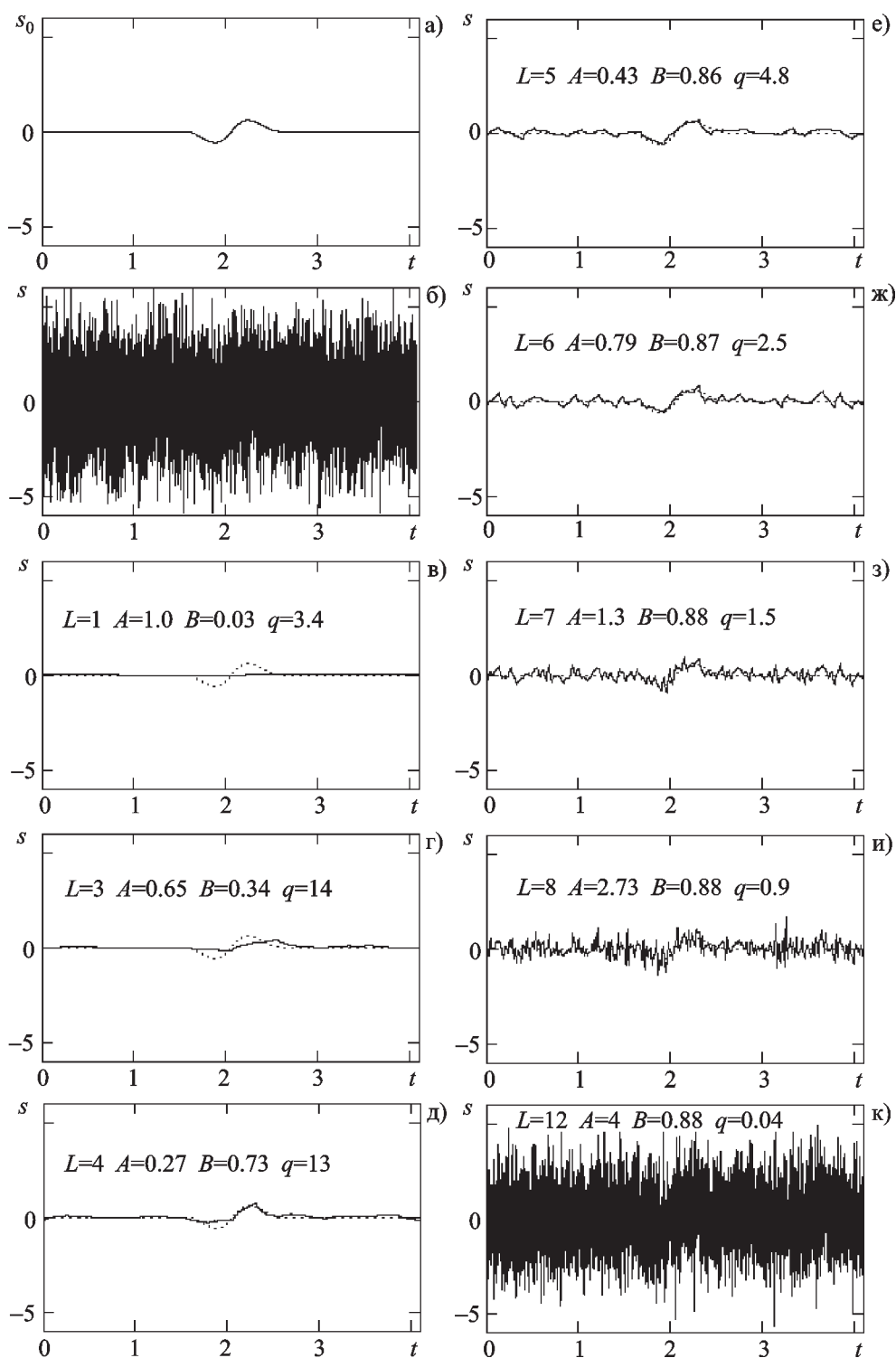


Рис. 5. Фильтрация СИП сигнала (модель s_2) с помощью вейвлета Добечи при отношении сигнал/помеха на входе вейвлет-фильтра $q_0 = 0.1$ (нормальное распределение помехи): а – исходный сигнал, б – аддитивная смесь сигнала и помехи, в – к – восстановленный сигнал при разных L . Пунктиром обозначен исходный сигнал. Значения функционалов A и B , задаваемых соотношениями (17) и (18), характеризуют степень сходства исходного и восстановленного сигналов

менных аперiodических процессов естественного происхождения, которые, обладая сверхшироким спектром, могут быть отнесены к СШП сигналам. Эта идея основана на том, что локализованные базисные функции вейвлет-преобразования в гораздо большей мере похожи на рассматриваемые сигналы, чем базисные функции традиционно применяемого преобразования Фурье.

В качестве количественных критериев, описывающих соотношения между исходным, зашумленным и восстановленным сигналами, будем использовать выражения (16)-(19).

Посредством численного моделирования установлено, что при восстановлении сигнала имеется оптимальное количество уровней разложения, когда, с одной стороны, сигнал уже достаточно восстановлен, а с другой стороны, мощность помехи еще недостаточно велика, чтобы значительно изменить форму сигнала. Процесс восстановления СШП сигналов показан на примере модели s_5 на рис. 5. Качество восстановленного сигнала и отношение сигнал/помеха q , как и следовало ожидать, зависят от степени перекрытия вейвлет-спектров сигнала и помехи.

Оптимальное число уровней разложения на практике удобно определять с помощью графиков, изображенных на рис. 6. В каждой из четырех групп графиков приведены зависимости функционалов A и B , а также отношения сигнал/помеха q от количества использованных при восстановлении сигнала уровней вейвлет-разложения L . На всех кривых ромбиками показаны параметры восстановленного сигнала на фоне помехи, квадратиками – в отсутствие помехи. Вертикальные линии, соединяющие по три графика, соответствуют оптимальному значению L . Оно выбирается по минимальному значению функционала $A = f(L)$. В случае равенства значений функционалов A для разных L предпочтение отдается тому, для которого выше значение функционала $B = f(L)$. Другой способ определения оптимального значения L состоит в использовании функционала C вместо функционалов A и B . Соответствующие графики приведены на рис. 7.

3.1. Зависимость эффективности метода от соотношения интервалов корреляции сигнала и помехи

Рассмотрим зависимость функционалов A , B и q на выходе вейвлет-фильтра от отношения интервалов корреляции помехи и сигнала $r = \tau_n / \tau_s$ на его входе при разных L .

Установлено, что по мере увеличения r качество восстановления сигнала ухудшается, чему соответствует рост A и уменьшение q . Так, например, для модели s_5 при $q_0 = 1$ (q_0 – отношение сигнал/помеха на входе вейвлет-фильтра), $L = 4$ ($L = 6$) для равномерно распределенной помехи при $r = 2 \cdot 10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-1}$:

$$A \approx 0.134 \div 0.939 \quad (A \approx 0.016 \div 1.811),$$

$$C \approx 0.167 \div 0.994 \quad (C \approx 0.101 \div 1.814),$$

$q \approx 316 \div 2$ ($q \approx 128 \div 1$) соответственно. А для нормально распределенной помехи при $r = 1.6 \cdot 10^{-2} \div 1.2$:

$$A \approx 0.132 \div 0.877 \quad (A \approx 0.018 \div 1.834),$$

$$C \approx 0.188 \div 1.046 \quad (C \approx 0.018 \div 1.907),$$

$q \approx 511 \div 2$ ($q \approx 117 \div 1$) соответственно. Значение B существенно не меняется. Это связано с тем, что вейвлет-спектр помехи смещается в область меньших L , все более перекрываясь со спектром самого сигнала. В таком случае сама помеха постепенно перестает быть слабокоррелированной.

3.2. Зависимость эффективности метода от вида СШП сигналов

Моделирование показало, что при увеличении количества лепестков СШП сигнала (чему соответствует уменьшение показателя его широкополосности) и сохранении его постоянной длительности качество восстановления сигнала также ухудшается. Для модели s_5 , например, при $N = 2 \div 40$, $q_0 = 1$, $r = 2 \cdot 10^{-3}$ для нормально распределенной помехи имеем: $L = 5 \div 9$, $A \approx 0.021 \div 0.119$, $B \approx 1 \div 0.978$, $C \approx 0.021 \div 0.121$, $q \approx 230 \div 18$ соответственно. Ухудшение качества восстановления происходит из-за смещения вейвлет-спектра сигнала в область больших L , т. е. навстречу спектру помехи. Однако при этом и сам сигнал постепенно перестает быть сверхширокополосным, становясь обычным узкополосным сигналом.

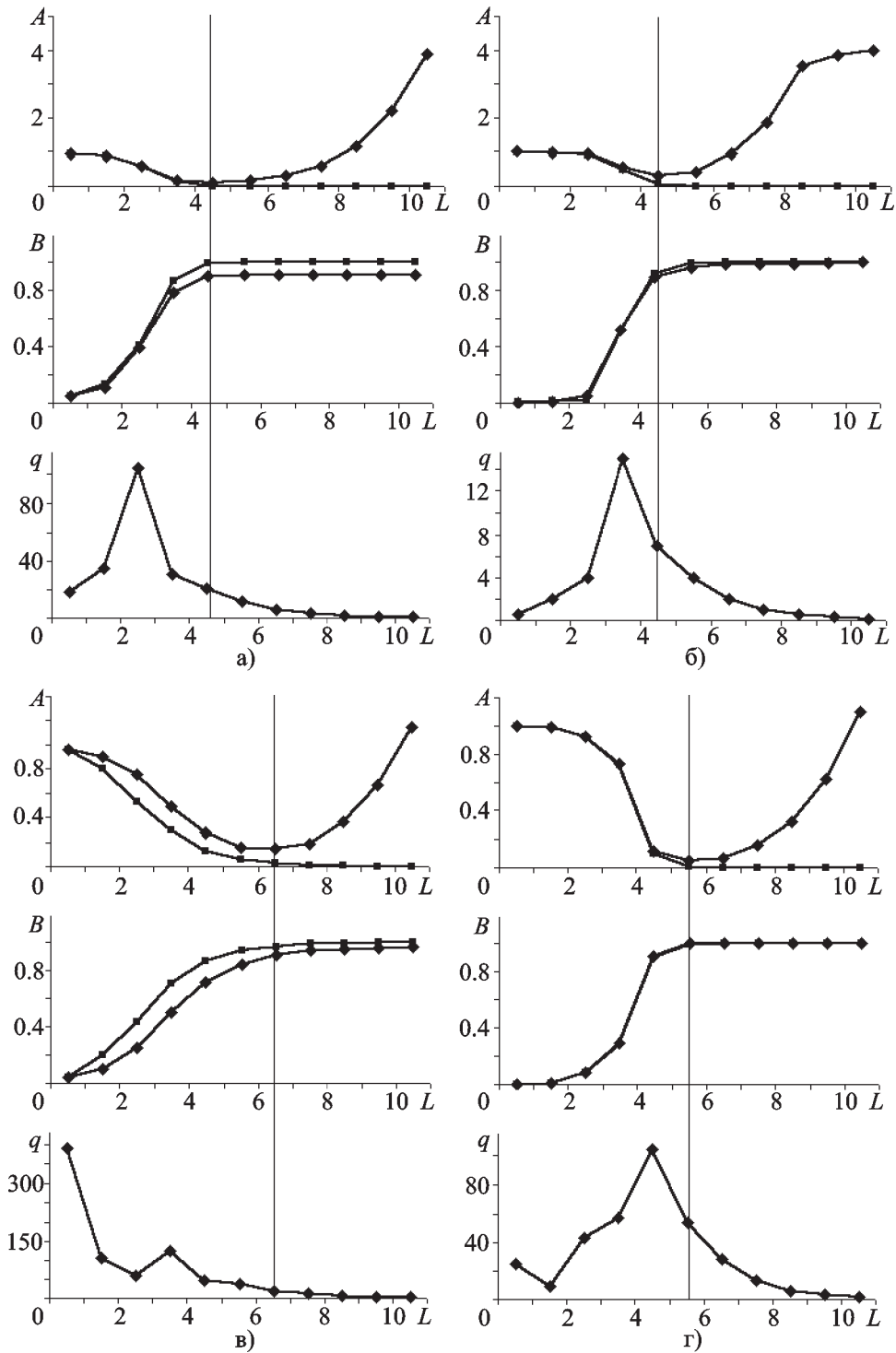


Рис. 6. Зависимость функционалов A , B и отношения сигнал/помеха q от количества учтенных уровней разложения L для разных моделей СШП сигналов: а – модель s_5 , б – модель s_6 , в – модель s_7 , г – модель s_8 . Ромбиками обозначены параметры восстановленного сигнала на фоне помехи, квадратиками – в отсутствие помехи. Вертикальные линии на графиках соответствуют оптимальному значению L

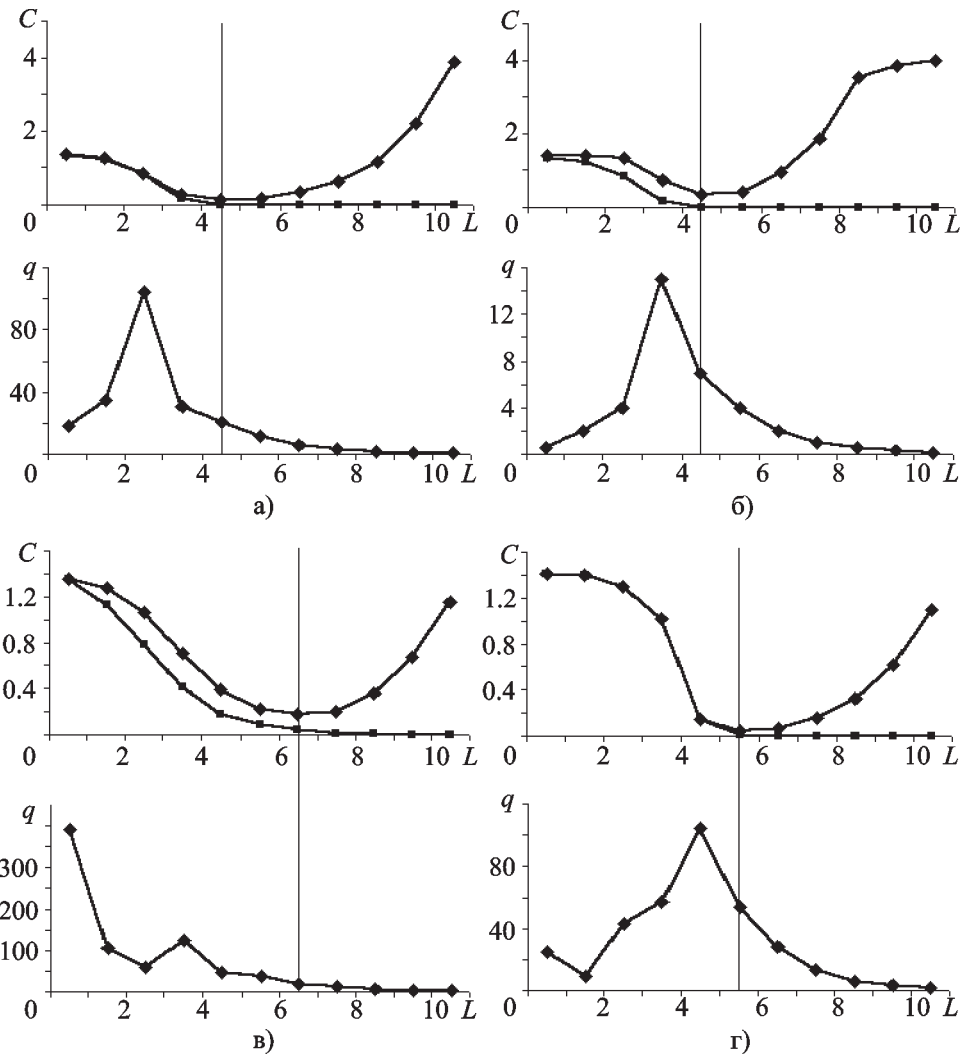


Рис. 7. Зависимость функционала C и отношения сигнал/помеха q от количества учтенных уровней разложения L для разных моделей СШП сигналов: а – модель s_5 , б – модель s_6 , в – модель s_7 , г – модель s_8 . Ромбиками обозначены параметры восстановленного сигнала на фоне помехи, квадратиками – в отсутствие помехи. Вертикальные линии на графиках соответствуют оптимальному значению L

Выбор модели сигнала также оказывает влияние на получаемый результат, так как разные модели имеют разные по ширине вейвлет-спектры, которые в разной степени перекрываются со спектром помехи.

3.3. Сравнение результатов вейвлет-анализа и фурье-анализа

Особый интерес представляет сравнение результатов оптимальной фильтрации СШП сигнала с помощью вейвлет-преобразования и традиционной фильтрации с применением фурье-анализа.

В работе для этих целей производилась согласованная фильтрация с использованием преобразования Фурье, когда амплитудно-частотная характеристика фильтра совпадает с известным спектром искомого сигнала. Полученные результаты показывают, что сигнал, восстановленный с помощью вейвлета Добе-чи, несколько изрезан, но не имеет ложных лепестков. В то же время сигнал, полученный при согласованной фильтрации с помощью преобразования Фурье, хотя и гладок, но имеет несколько ложных лепестков, что

для СШП сигнала явно нежелательно, так как основной информационной характеристикой СШП сигнала является именно его форма.

3.4. Зависимость эффективности метода от отношения сигнал/помеха

Представляет также интерес изучение зависимости функционалов A , B , C и отношения q , соответствующих оптимальному значению L и получающихся при согласованной фильтрации в фурье-анализе, от отношения сигнал/помеха исходного (входного) зашумленного сигнала q_0 . Так, например, для модели s_5 с нормально распределенной аддитивной помехой при $N=2$, $r=1.6 \cdot 10^{-3}$ для $q_0 = 10 \div 0.01$ при использовании вейвлет-преобразования (преобразования Фурье) имеем соответственно: $L = 6 \div 4$,
 $A \approx 0.002 \div 0.409$ ($A \approx 0.051 \div 0.275$),
 $C \approx 0.027 \div 0.421$ ($C \approx 0.112 \div 0.292$),
 $q \approx 10^3 \div 6$ ($q \approx 4 \cdot 10^3 \div 8$). Значения функционала B практически не изменяются. Наиболее интересно то, что для функционала A , который отвечает за подобие восстановленного и исходного сигналов, существует значение $q_0 \approx 0.1$, когда преимущество вейвлет-фильтрации перед фурье-фильтрацией практически исчезает. Это связано с тем, что амплитуда вейвлет-спектра помехи нарастает с уменьшением q_0 , и вейвлет-спектры сигнала и помехи начинают заметно перекрываться.

Обсуждение

Проведенные исследования показали, что вейвлет-преобразование имеет преимущество перед традиционным преобразованием Фурье при решении задачи обнаружения СШП сигнала на фоне аддитивной слабокоррелированной помехи. С одной стороны, это связано с хорошей локализацией вейвлет-спектра таких сигналов, тогда как их фурье-спектр гораздо шире. С другой стороны, вейвлет-спектры СШП сигнала и помехи в отличие от фурье-спектров перекрываются слабо. Это позволяет разделить сигнал и помеху, почти не искажая форму сигнала. Для СШП сигнала последнее имеет первостепенное значение.

Для каждого конкретного СШП сигнала следует подбирать наиболее похожий на него производящий вейвлет, на основе которого затем строятся соответствующие базисные функции. В таком базисе вейвлет-спектр СШП сигнала будет наиболее узким, так как его разложение по вейвлетам, по сути дела, является разложением именно по базису СШП сигнала. Это должно также несколько повысить качество восстановления сигнала на фоне помехи. Если же указанная похожесть невелика, то вейвлет-спектр сигнала будет более широким, что приведет к большему его перекрытию со спектром помехи, а следовательно, и к худшему качеству восстановленного сигнала.

Вместе с тем следует отметить, что практическая реализация подобных радиотехнических систем, осуществляющих обнаружение СШП сигналов на фоне помех с помощью вейвлет-анализа, связана со значительными трудностями как теоретического, так и практического характера. По существу, речь идет о необходимости создания соответствующих сверхширокополосных устройств приема и обработки сигналов, а также необходимости использования мощного быстродействующего компьютера для обеспечения достаточной оперативности получения результатов. И то и другое связано со значительными материальными затратами.

Выводы

1. Показано, что каждый вейвлет является, по сути, СШП сигналом. Поэтому разложение СШП сигнала по вейвлетам – это разложение по базису СШП сигналов. Такое разложение является естественным, а значит, эффективным.
2. Установлено, что вейвлет-спектр СШП сигнала оказывается достаточно локализованным по обеим координатам. Причиной локализации вейвлет-спектра финитного СШП сигнала по сравнению с бесконечным спектром Фурье является сходство самого сигнала с базисными функциями вейвлет-преобразования.
3. Выяснено, что для достаточно точного восстановления СШП сигнала по вейвлет-спектру с помощью быстрого вейвлет-преоб-

разования достаточно учесть 5 – 6 уровней разложения.

4. Установлено, что при обнаружении СШП сигнала на фоне слабокоррелированной помехи имеется оптимальное число уровней вейвлет-разложения, при учете которых, с одной стороны, влияние помехи является еще сравнительно слабым, а с другой стороны, сигнал уже достаточно хорошо восстановлен.

5. Показано, что при увеличении интервала корреляции помехи и при снижении отношения сигнал/помеха на входе вейвлет-фильтра качество восстановленного сигнала ухудшается.

6. Установлено, что характер восстановленного сигнала при использовании вейвлет- и фурье-анализа оказывается различным. При фурье-фильтрации у СШП сигнала появляются лишние (ложные) лепестки, что искажает его форму, уменьшает показатель широкополосности, а потому является неприемлемым.

7. Показано, что вейвлет-анализ в задаче обнаружения СШП сигнала на фоне слабокоррелированной помехи для рассмотренных моделей оказывается более эффективным, чем фурье-анализ при $q_0 > 0.1$.

Литература

1. D. L. Moffatt, R. J. Puskar. *Geophysics*. 1976, **41**, No. 3, pp. 506-518.
2. E. M. Kennaugh. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 1981, **29**, No. 2, pp. 327-331.
3. Л. Ю. Астанин, А. А. Костылев. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. Москва, Радио и связь, 1989, 192 с.
4. Х. Ф. Хармут. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи. Москва, Радио и связь, 1985, 376 с.
5. Г. А. Гусев, З. Г. Гусев, В. А. Еременко, Ю. Н. Черкашин. Сборник статей. Распространение радиоволн в ионосфере. Москва, Наука, 1989, с. 51-56.
6. П. В. Блюх, А. П. Николаенко, Ю. Ф. Филиппов. Глобальные электромагнитные резонансы в полостях Земли-ионосфера. Киев, Наукова думка, 1977, 200 с.
7. О. А. Молчанов. *Геомагнетизм и аэрономия*. 1991, **31**, №1, с. 111-119.
8. Н. М. Астафьева. *Успехи физических наук*. 1996, **166**, №11, с. 1115-1170.

9. *The Transforms and Applications Handbook*. Editor-in-chief: Alexander Poularikas. USA, CRC Press, 1996, 1103 pp.

10. В. В. Виноградов, Г. В. Литвиненко. *Радиофизика и радиоастрономия*. 1998, **3**, №2, с. 198-203.

11. О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. *Геомагнетизм и аэрономия*. 1997, **37**, №6, с. 80-90.

12. О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. Матер. Междунар. симп. "Мониторинг окружающей среды и проблемы солнечно-земной физики". Томск, 1996, с. 85-86.

13. О. В. Лазоренко. Дисс. ...канд. физ.-мат. наук. Харьков, ХГУ, 1999, 201 с.

14. Обнаружение ядерных испытаний. Тематический выпуск ТИИЭР. 1965, **53**, №12.

15. Ю. В. Штенников, В. В. Добрянский. Проблемы дифракции и рассеяния волн. Ленинград, ЛГУ, Вып. 9, 1969, с. 138-145.

16. O. V. Lazorenko. Proc. VIIth International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, June 2-5, 1998, Kharkov. Kharkov, 1998, p. 621.

17. J. Young. Proc. IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp. Chicago, III, July 20-24, 1992, **2**, pp. 1132-1135.

Application of Wavelet Analysis to Problem of Ultra-Wideband Signal Detection on Noise Background

O. V. Lazorenko, S. V. Lazorenko, L. F. Chernogor

The basic properties of the wavelets, discrete and integral wavelet transforms, are dealt with. The wavelet analysis is proposed to apply for detection of ultra-wideband (UWB) signals on a noise background. The results of the numerical wavelet analysis of model UWB signals are presented, and an example of the UWB signal detection on the background of weakly correlated additive noise is discussed. The method efficiency is compared with method of the traditional matched filtering based on the Fourier transform.