

## Теория проходного цилиндрического $TE_{01p}$ -резонатора с металлодиэлектрическим заполнением

В. Б. Казанский, В. В. Хардигов

*Харьковский национальный университет,  
Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4,*

*Статья поступила в редакцию 4 октября 2001 г.*

Исследуются свойства проходного кусочно-однородного аксиально-симметричного  $TE_{01p}$ -резонатора с частой решеткой из проводящих колец. Из строгих и эквивалентных граничных условий получены дисперсионное уравнение, уравнение для определения обобщенной матрицы передачи и собственные комплексные частоты. На основе энергетических соотношений с использованием теории возмущений сделана оценка диссипативных и радиационных потерь.

Показано, что при отсутствии эффекта концентрации поля в центральном стержне малого радиуса введение кольцевой решетки в периферийную область увеличивает добротность резонатора. Установлено соотношение между резонансной частотой, добротностью резонатора и комплексной диэлектрической проницаемостью центрального стержня. Учет связи резонатора с подводными волноводами и его повышенная добротность уменьшают технологические и методические погрешности измерения диэлектрической проницаемости по сравнению с моделью изолированного резонатора без кольцевой решетки.

Представляется перспективным применять данную структуру для диэлектрической спектроскопии веществ с большими потерями (водных растворов биомолекул), а также в качестве модового и частотного селекторов, базового элемента многосвязных фильтров, дискриминаторов, фазосдвигающих систем и т. п.

Вивчаються властивості прохідного шматково-однорідного аксіально-симетричного  $TE_{01p}$ -резонатора з густою ґраткою із провідних кілець. Із строгих та еквівалентних граничних умов отримано дисперсійне рівняння, узагальнену трансляційну матрицю та власні комплексні частоти. На основі енергетичних співвідношень з використанням теорії збурень зроблено оцінку дисипативних та радіаційних втрат.

Показано, що за умови відсутності ефекту концентрації поля у центральному стержні малого радіуса введення кільцевої ґратки у периферійну область збільшує добротність резонатора. Встановлено співвідношення між резонансною частотою, добротністю резонатора та комплексною діелектричною проникністю центрального стержня. Врахування зв'язку резонатора з хвилеводами та підвищення його добротності зменшує технологічні та методологічні похибки вимірювання діелектричної проникності порівняно з моделлю ізольованого резонатора без кільцевої ґратки.

Видається перспективним використати дану структуру для діелектричної спектроскопії речовин з великими втратами (водних розчинів біомолекул), а також як модового та частотного селекторів, базового елемента багатоланкових фільтрів, дискримінаторів, фазозсувних систем та т. ін.

### 1. Введение

Цилиндрический  $TE_{01p}$ -резонатор с аксиально-симметричным диэлектрическим заполне-

нием широко применяется для диэлектрической спектроскопии веществ с большими потерями (например, для исследования водных

растворов биомолекул) в СВЧ диапазоне. В рассмотренной ранее модели [1] резонатор имеет низкую добротность и не учитывается его связь с внешними цепями. Поэтому абсолютные и относительные значения комплексной диэлектрической проницаемости определяются по измеряемым параметрам с большими методическими и технологическими погрешностями.

В работе развивается теория нагруженного  $TE_{01p}$ -резонатора повышенной добротности. Модель предусматривает связь резонатора с измерительной схемой через волноводы в торцевых стенках. Уменьшение омических потерь достигается “отжатием” поля от боковых стенок резонатора с помощью частично прозрачных экранов [2, 3]. В нашем случае используется частая периодическая решетка из тонких металлических колец (кольцевой волновод).

Имея метрологическое назначение, рассматриваемая структура моделирует также модовый и частотный селекторы, базовый элемент многозвенных фильтров, дискриминаторов, фазосдвигающих систем, а при наличии нелинейных сред – активные приборы управления.

## 2. Модель резонатора и дисперсионное уравнение

Исследуется область скачкообразного расширения цилиндрического волновода длиной  $L$  с аксиально-симметричным кусочно-однородным заполнением, включающим частую периодическую решетку из металлических колец радиуса  $R_2$ . Период кольцевой решетки (КР)  $l$  намного меньше длины волны  $\lambda$  в свободном пространстве ( $\kappa = kl/2\pi = l/\lambda \ll 1$ ), параметр заполнения решетки  $u = \cos(\pi d/l)$ , где  $d$  – зазор между кольцами. Диэлектрическая и магнитная проницаемости центрального стержня и среды в подводящих волноводах одинакового радиуса  $R_1$  равны  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$ . Система координат, геометрические и материальные параметры структуры указаны на рис. 1.

В качестве возбуждающих выбраны монохроматические ( $\exp(-i\omega t)$ ) симметричные  $TE_{0n}$ -волны цилиндрического волновода. Представим поля в подводящих волноводах

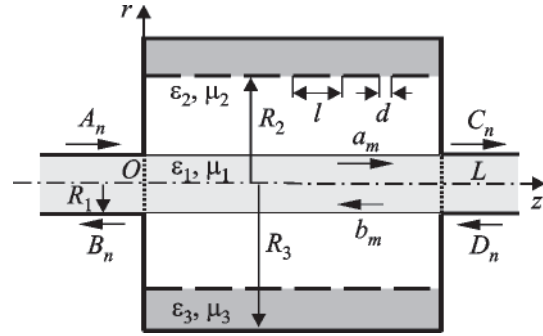


Рис. 1. Прходной волноводный резонатор с кольцевой решеткой

( $z \leq 0, z \geq L$ ) в виде падающих и отраженных волн:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} H_z^I(z < 0) \\ H_z^{III}(z > L) \end{array} \right\} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} v_{1n}^2 \left\{ \begin{array}{l} A_n \exp(i\gamma_{1n}z) + B_n \exp(-i\gamma_{1n}z) \\ C_n \exp(i\gamma_{1n}(z-L)) + D_n \exp(-i\gamma_{1n}(z-L)) \end{array} \right\} \times \\ & \times \frac{J_0(v_{1n}r/R_1)}{J_0(v_{1n})}. \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_{1n} = \sqrt{k^2 \epsilon_1 \mu_1 - (v_{1n}/R_1)^2}$  – постоянная распространения  $TE_{0n}$ -волны в волноводе радиуса  $R_1$ ,  $v_{1n}$  – корень функции Бесселя первого порядка ( $J_1(v_{1n}) = 0$ ). Поля внутри резонатора ( $0 \leq z \leq L$ ) запишем в виде:

$$\begin{aligned} H_z^{II} &= \sum_{m=1}^{\infty} (a_m e^{i\gamma_{2m}z} + b_m e^{-i\gamma_{2m}(z-L)}) k_{mj}^2 \Phi_m(r); \\ \Phi_m &= \begin{cases} J_0(k_{m1}r), & r \leq R_1; \\ F_{1m} J_0(k_{m2}r) + F_{2m} N_0(k_{m2}r), & R_1 < r \leq R_2; \\ F_{3m} J_0(k_{m3}r) + F_{4m} N_0(k_{m3}r), & R_2 < r \leq R_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Постоянная распространения  $TE_{0m}$ -волны в кусочно-однородном волноводе ( $0 \leq z \leq L$ )  $\gamma_{2m}$

связана с индивидуальными поперечными волновыми числами  $j$ -го слоя соотношениями  $k_{mj}^2 = k^2 \epsilon_j \mu_j - \gamma_{2m}^2$ ,  $J_s(x)$  и  $N_s(x)$  – функции Бесселя и Неймана  $s$ -го порядка.

Применение строгих и эквивалентных граничных условий на границах  $r = R_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) приводит к дисперсионному уравнению для постоянной распространения  $\gamma_{2m}$  в случае экранированного кольцевого волновода [3] и позволяет определить величины  $F_{im}$ :

$$k_{m1} R_1 \frac{J_0(k_{m1} R_1)}{J_1(k_{m1} R_1)} = k_{m2} R_1 \frac{J_0(k_{m2} R_1)}{J_1(k_{m2} R_1)} \times \left[ 1 - \frac{J_1(k_{m2} R_2)}{N_1(k_{m2} R_2)} \frac{N_0(k_{m2} R_1)}{J_0(k_{m2} R_1)} \right] \times \left[ 1 - \frac{J_1(k_{m2} R_2)}{N_1(k_{m2} R_2)} \frac{N_1(k_{m2} R_1)}{J_1(k_{m2} R_1)} \right]^{-1} \times \frac{k_{m2} T_{m0} - (k_{m3} Y_{32} + 2ikU^+)}{k_{m2} T_{m1} - (k_{m3} Y_{32} + 2ikU^+)}, \quad (1)$$

где

$$T_{ms} = \frac{J_0(k_{m2} R_2) N_s(k_{m2} R_1) - J_s(k_{m2} R_1) N_0(k_{m2} R_2)}{J_1(k_{m2} R_2) N_s(k_{m2} R_1) - J_s(k_{m2} R_1) N_1(k_{m2} R_2)},$$

$$U^+ = (\mu_2 + \mu_3) \left[ i \mu_2 \mu_3 \kappa \ln(0.5(1+u)) \right]^{-1},$$

$$Y_{32} = \frac{N_1(k_{m3} R_3) J_0(k_{m3} R_2) - J_1(k_{m3} R_3) N_0(k_{m3} R_2)}{N_1(k_{m3} R_3) J_1(k_{m3} R_2) - J_1(k_{m3} R_3) N_1(k_{m3} R_2)},$$

а

$$F_{1m} = \frac{k_{m1}}{k_{m2}} \left( \frac{k_{m1}}{k_{m2}} J_0(k_{m1} R_1) N_1(k_{m2} R_1) - \frac{\mu_1}{\mu_2} J_1(k_{m1} R_1) N_0(k_{m2} R_1) \right) / IN_{21},$$

$$F_{2m} = \frac{k_{m1}}{k_{m2}} \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} J_1(k_{m1} R_1) J_0(k_{m2} R_1) - \frac{k_{m1}}{k_{m2}} J_0(k_{m1} R_1) J_1(k_{m2} R_1) \right) / IN_{21},$$

$$F_{3m} = \frac{k_{m2} \mu_2}{k_{m3} \mu_3} \frac{N_1(k_{m3} R_3)}{J_1(k_{m3} R_2) N_1(k_{m3} R_3) - N_1(k_{m3} R_2) J_1(k_{m3} R_3)} \times (F_{1m} J_1(k_{m2} R_2) + F_{2m} N_1(k_{m2} R_2)),$$

$$F_{4m} = -J_1(k_{m3} R_3) F_{3m} / N_1(k_{m3} R_3),$$

где

$$IN_{21} = J_0(k_{m2} R_1) N_1(k_{m2} R_1) - J_1(k_{m2} R_1) N_0(k_{m2} R_1).$$

Отметим, что при замене кольцевой решетки сплошным металлом ( $U^+ \rightarrow \infty$ ) уравнение (1) описывает аксиально-симметричный двухслойный волновод радиуса  $R_2$  [1], а в отсутствие решетки ( $U^+ = 0$ ) – трехслойный волновод радиуса  $R_3$ .

### 3. Коэффициенты рассеяния и собственные частоты резонатора

Для определения обобщенной матрицы рассеяния (передачи) исследуемого проходного волноводного резонатора (ПВР) воспользуемся граничными условиями на его торцах ( $z = 0$ ,  $z = L$ ), а именно: непрерывностью тангенциальных составляющих напряженностей полей при  $r \leq R_1$ ,

$$E_\phi^I(0) = E_\phi^{II}(0), \quad E_\phi^{II}(L) = E_\phi^{III}(L),$$

$$H_r^I(0) = H_r^{II}(0), \quad H_r^{II}(L) = H_r^{III}(L),$$

и равенством нулю их электрических компонент в области  $R_1 \leq r \leq R_3$ ,

$$E_\phi^{II}(0) = E_\phi^{II}(L) = 0.$$

При заданных амплитудах входящих волн ( $A_n, D_n$ ) полученная система функциональных уравнений методом перераспределений [4] сводится к бесконечной системе линейных алгеб-

раических уравнений второго рода относительно коэффициентов  $C_n$  и  $B_n$ :

$$\begin{cases} X_n + \sum_{q=1}^{\infty} P_{nq} X_q = (A_n - D_n) - \sum_{q=1}^{\infty} P_{nq} (A_q - D_q), \\ Y_n + \sum_{q=1}^{\infty} G_{nq} Y_q = (A_n + D_n) - \sum_{q=1}^{\infty} G_{nq} (A_q + D_q), \end{cases} \quad (2)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Здесь

$$X_n = B_n - C_n, \quad Y_n = B_n + C_n,$$

$$\begin{cases} P_{nq} \\ G_{nq} \end{cases} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma_{2m}}{\gamma_{1n}} \right) \frac{v_{1q}}{v_{1n}} \frac{I_{nm} I_{qm}}{N R_m} \begin{cases} i \operatorname{ctg}(\gamma_{2m} L/2) \\ -i \operatorname{tg}(\gamma_{2m} L/2) \end{cases}$$

$$I_{nm} = \frac{v_{1n} \mu_1 (k_{m1} R_1)}{(k_{m1} R_1)^2 - v_{1n}^2},$$

$$N R_m = \left[ \mu_1^2 \int_0^{x_{11}^m} J_1^2(x) dx + \mu_2^2 \int_{x_{21}^m}^{x_{22}^m} (F_{1m} J_1(x) + F_{2m} N_1(x)) dx + \mu_3^2 \int_{x_{32}^m}^{x_{33}^m} (F_{3m} J_1(x) + F_{4m} N_1(x)) dx \right] / J_1^2(x_{11}^m).$$

Решение системы (2) методом редукции позволяет найти матрицу рассеяния в многоволновом режиме. Ее элементы имеют смысл коэффициентов отражения ( $R_n \equiv R_m = B_n/A_n$ ) и прохождения ( $\tau_n \equiv \tau_m = C_n/A_n$ )  $TE_{0n}$ -волны возбуждающего типа ( $D_n = 0$ ) и коэффициентов ее преобразования в  $TE_{0q}$ -волну в отраженном  $R_{qn} = B_q/A_n$  и прошедшем  $\tau_{qn} = C_q/A_n$  полях. Система (2) описывает также взаимное преобразование волноводных волн в резонаторе и подводящих волноводах.

Собственные комплексные частоты  $\kappa_c = \kappa'_c + i\kappa''_c$  [5, 6] ПВР ( $A_n = D_n = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) находятся из условия равенства

нулю детерминанта однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} X_n + \sum_{q=1}^{\infty} P_{nq} X_q = 0, \\ Y_n + \sum_{q=1}^{\infty} G_{nq} Y_q = 0, \end{cases}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Рассматриваемая геометрия структуры и используемый комплексный (сочетание строгих и эквивалентных граничных условий) метод решения дифракционной и спектральной задач в заданном приближении обобщают известные частные случаи, указанные выше.

#### 4. Теория метода измерения диэлектрической проницаемости стержня

Развитая теория ПВР позволяет связать комплексную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1 = \epsilon'_1 + i\epsilon''_1$  центрального стержня (образца) с экспериментально измеряемыми параметрами, такими как добротность  $Q$  и длина  $TE_{01p}$ -резонатора  $L$ . Эффективно задача решается при малом радиусе образца ( $R_1 \ll R_2$ ), когда в подводящих волноводах может распространяться только  $TE_{01}$ -волна, диссипативные потери в периферийных диэлектрических слоях отсутствуют ( $\operatorname{Im} \epsilon_j = 0$ ,  $j \neq 1$ ), а все магнитные проницаемости  $\mu_j = 1$  ( $j = 1, 2, 3$ ). В [1] была предложена методика определения  $\epsilon_1$  в два этапа: вначале находится действительная, а затем мнимая часть. На первом этапе ввиду малого радиуса стержня при описании структуры поля  $TE_{01}$ -волны пренебрегают диссипативными потерями, а в расчетных формулах полагают  $\epsilon''_1 = 0$ .

Для изолированного, со сплошными металлическими торцами, резонатора (ИР) задача сводится к решению дисперсионного уравнения (1) относительно  $k_{11}$ . При измеряемой резонансной длине  $(L/l)_p$  правая часть уравнения выражается через постоянную распространения  $\gamma_{21} l = p\pi / (L/l)_p$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ) и по-

перечные волновые числа  $k_{j1}^2 = k^2 \epsilon_j - \gamma_{21}^2$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Эти величины связаны с действительной частью диэлектрической проницаемости следующим образом:

$$\epsilon'_1 = c^2 (k_{11}^2 + \gamma_{21}^2) / \omega^2.$$

В спектральной теории для рассматриваемого резонатора ( $\kappa'_c = 0$ ) значение  $\epsilon'_1$  находится по резонансной частоте ( $\kappa'_c$ ) на основе параметрических зависимостей  $\epsilon'_1(\kappa'_c, R_j/R_3, u)$ .

Знание  $\epsilon'_1$  и полей в структуре (при  $\epsilon''_1 = 0$ ,  $\text{tg } \delta = \epsilon''_1/\epsilon'_1 = 0$ ) позволяет, следуя [1], определить энергии, запасенные в диэлектрическом стержне  $W_D$  и в остальном объеме резонатора  $W_0$ , мощность излучения в подводящие волноводы  $P_{\text{изл}}$ , мощность потерь в диэлектрике  $P_D = \omega \text{tg } \delta W_D$  и металлических элементах резонатора (включая его стенки)  $P_M$ :

$$W_D = \epsilon'_1 \frac{k^2}{4} \int_0^L \int_0^{R_1} |E_\phi^{II}|^2 r dr dz,$$

$$W_0 = \sum_{j=2}^3 \frac{k^2 \epsilon_j}{4} \int_0^L \int_{R_{j-1}}^{R_j} |E_\phi^{II}|^2 r dr dz,$$

$$P_M = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \int_{S_c + S_k} |H_{\text{tg}}|^2 ds,$$

$$P_{\text{изл}} = \frac{c}{4} \int_{S_0} E_\phi^{II} (H_r^{II})^* ds,$$

где  $H_{\text{tg}}$  – тангенциальная составляющая магнитного поля на металлических элементах;  $\sigma$  – проводимость металлических элементов;  $S_c = 2\pi(R_3L + R_3^2 - R_1^2)$ ,  $S_k = 2\pi R_2(l - d)L/l$  – общая площадь поверхности стенок резонатора и металлических колец соответственно;  $S_0 = \pi R_1^2$  – площадь поперечного сечения входных волноводов. В дальнейшем для расчетов  $P_M$  использовались значения  $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17} \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega = 10^{10} \text{ c}^{-1}$ . Поскольку добротность нагруженного резонатора равна  $Q = \omega(W_0 + W_D)/(P_M + P_D + P_{\text{изл}})$ ,

тангенс угла потерь (при  $R_1 \ll R_2$ ,  $W_0/W_D \gg 1$ ) принимает вид:

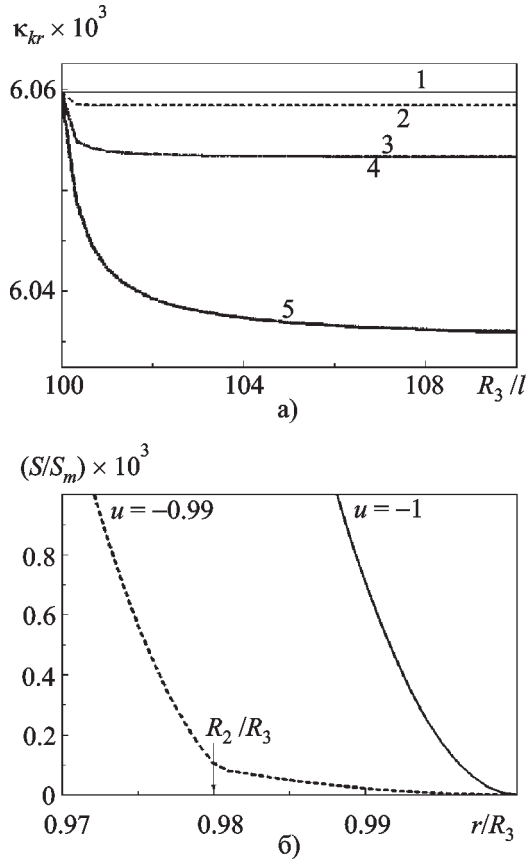
$$\text{tg } \delta \approx (Q^{-1} - Q_0^{-1})W_0/W_D,$$

где  $Q_0 = \omega W_0/(P_M + P_{\text{изл}})$  – добротность резонатора без измеряемого образца. Заметим, что в спектральном методе добротность  $Q = \kappa'_c/2\kappa''_c$  не учитывает потери в металлических элементах резонатора.

Представленная теория не исключает систематической методической погрешности измерения комплексной диэлектрической проницаемости, которая связана с применением приближенного метода малых возмущений (во всех расчетах используются характеристики невозмущенного резонатора, т. е. резонатора без образца). Точность расчетов возрастает с уменьшением отношения  $R_1/R_2$  и диссипативных потерь измеряемого образца.

## 5. Численно-аналитический анализ свойств резонатора с кольцевой решеткой

Оценим влияние КР на условия распространения  $TE_{01}$ -волн в слоистом волноводе по динамике зависимости критической частоты ( $\gamma_{21} = 0$ ) от параметра заполнения  $\kappa_{kr}(u)$ . Диапазон изменения  $\kappa_{kr}$  определен неравенством  $\kappa_{kr}(-1) \leq \kappa_{kr} \leq \kappa_{kr}(1)$ , где  $\kappa_{kr}(1)$  – решение уравнения (1) для двухслойного ( $u = 1$ ,  $U^+ = \infty$ ), а  $\kappa_{kr}(-1)$  – для трехслойного ( $u = -1$ ,  $U^+ = 0$ ) волноводов. Поскольку в широком интервале изменения параметра заполнения  $u \in [-0.99; 1)$  при  $\kappa \ll 1$  и  $|U^+| \gg 1$ , критические частоты, согласно (1), незначительно (менее чем на 0.35 %) отличаются от  $\kappa_{kr}(1)$  и практически не зависят от диэлектрической проницаемости  $\epsilon_3$  и внешнего радиуса  $R_3$ , если  $(R_3 - R_2)/l \geq 2$  (рис. 2, а). Это объясняется тем, что кольцевая решетка существенно ослабляет электродинамическую связь между центральной ( $r \leq R_2$ ) и периферийной ( $R_2 \leq r \leq R_3$ ) областями. С введением КР поле распространяющейся волны сосредоточивается в центральной области, о чем свидетельствует рас-

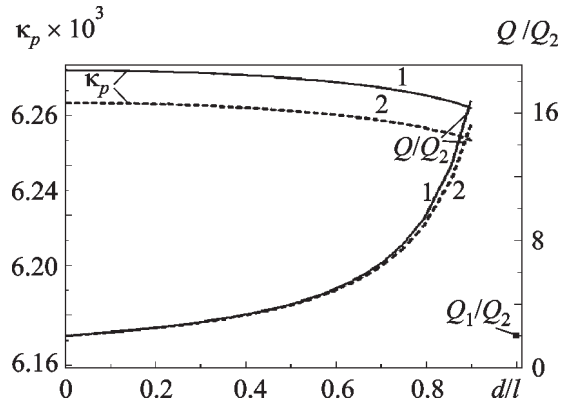


**Рис. 2.** а) Зависимость критической частоты  $\kappa_{kr}$   $TE_{01}$ -волны металлодиэлектрического волновода от внешнего радиуса  $R_3/l$  при  $R_1/l = 10$ ,  $R_2/l = 100$ ,  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\epsilon_2 = 1$ ,  $\mu_j = 1$ : кривая 1 –  $u = 1$ ; кривая 2 –  $u = 0.5$ ,  $\epsilon_3 = 1$ ; кривая 3 –  $u = -0.5$ ,  $\epsilon_3 = 1$ ; кривая 4 –  $u = -0.5$ ,  $\epsilon_3 = 3$ ; кривая 5 –  $u = -0.99$ ,  $\epsilon_3 = 1$ .  
 б) Распределение нормированного вектора Умова-Пойтинга в периферийной области волновода при  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ ,  $\mu_j = 1$ ,  $R_1/R_3 = 0.049$ ,  $R_2/R_3 = 0.98$ ,  $R_3/l = 102$ ,  $\kappa = 0.00628$

пределение нормированного вектора Умова-Пойтинга  $S(r)/S_m$  в поперечном сечении волновода (рис. 2, б).

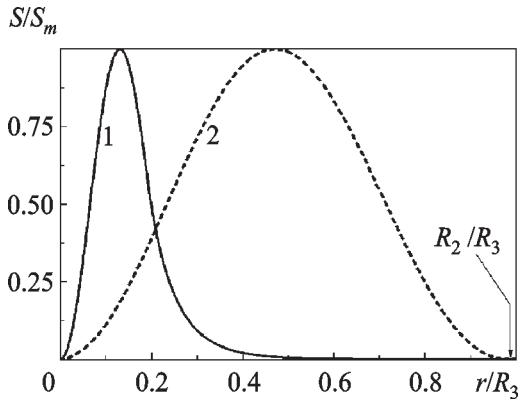
При указанном сосредоточении поля  $TE_{0n}$ -волны (его “отжати” от боковых стенок) диссипация энергии в основном происходит на металлических кольцах. Поэтому соответствующий ИР с КР и малой периферийной областью  $(R_3 - R_2)/R_3 \leq 0.02$  имеет более высокую добротность, чем без КР. В отсутствие поверхностных волн центрального стержня добротность

увеличивается пропорционально ширине зазора  $d/l$ . Рассчитанные по указанному выше алгоритму характерные зависимости  $Q/Q_2$  показаны на рис. 3. Здесь же отмечено точкой значение  $Q_1/Q_2$ , где  $Q_1$  – добротность резонатора радиуса  $R_3$  без КР, а  $Q_2$  – добротность внутренней ( $r \leq R_2$ ) области резонатора с боковой металлической стенкой радиуса  $R_2$ .



**Рис. 3.** Зависимость нормированной добротности  $Q/Q_2$  и резонансной частоты  $\kappa_p$   $TE_{013}$ -колебания ИР от ширины щели КР  $d/l$  при  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ ,  $\mu_j = 1$ ,  $R_2/l = 100$ ,  $R_3/l = 102$ ,  $L/l = 1000$ ,  $\epsilon_1'' = 0.01$ : кривая 1 –  $R_1/l = 5$ ; кривая 2 –  $R_1/l = 8$

Различные соотношения между  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$  и  $\epsilon_2$ ,  $\mu_2$  приводят к качественно различной структуре поля  $TE_{01}$ -волны внутри центральной области ( $r \leq R_2$ ) [3]. При частотах, на которых поперечное волновое число  $k_{12}$  становится мнимым ( $\gamma_{21} \geq k\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$ ), волноведущим становится диэлектрический стержень (кривая 1 на рис. 4). При этом свойства распространяющейся волны в основном зависят от параметров соответствующего диэлектрического волновода. Критическая частота  $TE_{01}$ -волны цилиндрического диэлектрического волновода в среде с  $\epsilon_2$ ,  $\mu_2$  равна  $\kappa_{de} = v_{11}l / (2\pi R_1 \sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \epsilon_2\mu_2})$  [7]. В исследуемой системе она зависит от параметров КР и периферийной области ( $R_3$ ,  $\epsilon_3$ ). Однако с ростом частоты их влияние на постоянную распространения существенно



**Рис. 4.** Распределение нормированного вектора Умова-Пойтинга  $TE_{01}$ -волны при  $R_2/l=100$ ,  $R_3/l=102$ ,  $\epsilon_1=10$ ,  $\epsilon_2=\epsilon_3=1$ ,  $\mu_j=1$ ,  $u=0$ ,  $\kappa=0.008$ : кривая 1 –  $R_1/R_3=0.196$ , кривая 2 –  $R_1/R_3=0.049$

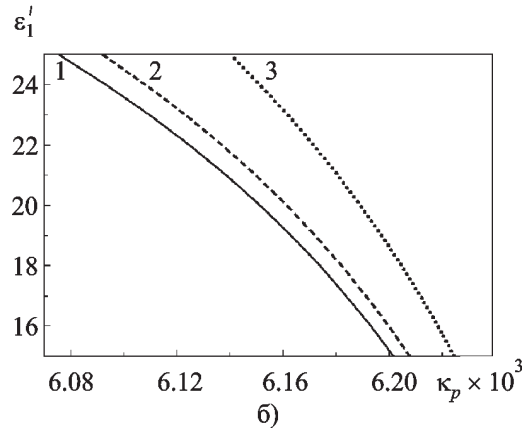
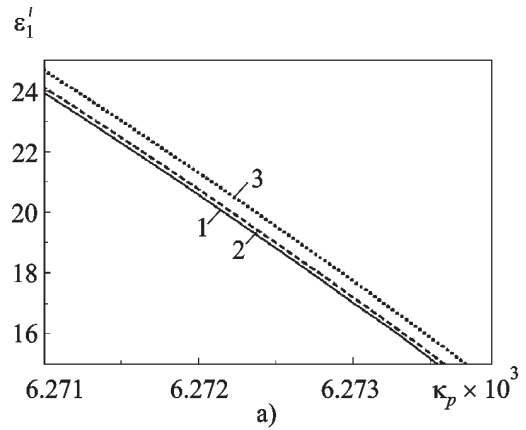
уменьшается. Такой диэлектрический эффект приводит к снижению добротности соответствующего ИР за счет возрастания потерь в диэлектрике, а в ПВР при  $\kappa \gg v_{1n}l / (2\pi R_1 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1})$  – еще и за счет увеличения его согласования с подводящими волноводами. Для измерений  $\epsilon_1$  выбор параметров резонатора должен исключать эти негативные явления (кривая 2 на рис. 4).

При численном моделировании эксперимента считаются известными резонансная частота  $\kappa_p$  и длина  $L_p/l$  ИР. Они связаны с реальной частью постоянной распространения  $\gamma'_{21}$  соотношением:

$$\gamma'_{21}/k = p / (2\kappa_p L_p/l), \quad p=1, 2, \dots \quad (3)$$

Известные  $\gamma'_{21}(\kappa_p)$  позволяют вычислить правую часть уравнения (1) как функцию резонансной частоты и параметров недиссипативного ИР и, в конечном итоге, определить  $\epsilon'_1(\kappa_p)$  [1].

На рис. 5 представлены характерные графики зависимости  $\epsilon'_1(\kappa_p)$  при отсутствии (рис. 5, а) и наличии (рис. 5, б) диэлектрического эффекта. В благоприятном режиме (рис. 5, а) зависимости  $\epsilon'_1(\kappa_p)$  практически линейные с весьма высоким градиентом,  $|d\epsilon'_1/d\kappa_p| \gg 1$ .



**Рис. 5.** Зависимость  $\epsilon'_1$  от резонансной частоты ИР  $\kappa_p$  при  $\epsilon_2=\epsilon_3=1$ ,  $u=0$ ,  $R_2/l=100$ ,  $R_3/l=102$ ,  $L/l=1000$ ,  $R_1/l=5$  (а),  $R_1/l=10$  (б): кривая 1 –  $\epsilon''_1=0$ ; кривая 2 –  $\epsilon''_1=5$ ; кривая 3 –  $\epsilon''_1=10$

Поскольку обобщенное уравнение (1) связывает комплексные значения постоянной распространения  $\gamma_{21}$  и диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1$ , можно оценить методическую погрешность определения  $\text{Re } \epsilon_1$ . Для этого по заданному значению  $\epsilon_1 = \epsilon'_1 + i\epsilon''_1$  ( $\text{Im } \epsilon_j = 0$ ,  $j=2, 3$ ) с помощью (3) находятся резонансные частоты  $\kappa_p(\epsilon'_1, \epsilon''_1)$  и мнимая часть  $\gamma''_{21}$ . Соответствующие графики также представлены на рис. 5. Эти зависимости и численные данные показывают, что при малом радиусе стержня даже при относительно большом тангенсе угла потерь,  $\text{tg } \delta_1 = \epsilon''_1/\epsilon'_1 \leq 0.5$ , методическая погрешность определения  $\epsilon'_1$  по резонансной частоте в пренебрежении потерь  $|\epsilon'_1(\epsilon''_1) - \epsilon'_1(0)|/\epsilon'_1(0) \leq 5\%$  (рис. 5, а). При

концентрации поля внутри стержня (диэлектрический эффект) погрешность намного больше и зависит от диапазона изменения  $\epsilon'_1$  (рис. 5, б).

Особенность ПВР – наличие излучения за счет взаимного преобразования собственных волн резонатора и подводящих волноводов – приводит к уменьшению добротности ПВР по сравнению с его закрытым аналогом даже в том случае, когда условия распространения  $TE_{01}$ -волн в подводящих волноводах отсутствуют.

Для качественного анализа волновых процессов в ПВР достаточно учесть только одну волну подводящего волновода. Тогда собственные комплексные частоты  $\kappa_c = \kappa'_c + i\kappa''_c$  определяются из двух независимых систем уравнений:

$$\begin{cases} 1 + P_{11} = 0, \\ Y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 0, \\ 1 + G_{11} = 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} P_{11} \\ G_{11} \end{cases} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{2m}}{\gamma_{11}} \frac{(k_{m1}R_1)^2 \mu_1^2 v_{11}^2}{((k_{m1}R_1)^2 - v_{11}^2)^2 N r_m} \times \begin{cases} i \operatorname{ctg}(\gamma_{2m} L/2) \\ -i \operatorname{tg}(\gamma_{2m} L/2) \end{cases}.$$

Выделяя из суммы слагаемое, отвечающее  $TE_{01}$ -волне резонатора, получаем уравнения для собственных частот ПВР такого же типа, что и в случае ИР:

$$\begin{cases} \gamma_{21}L = 2g\pi + 2\operatorname{arccctg}(P'_{11}), \\ Y_1 = 0, \end{cases}$$

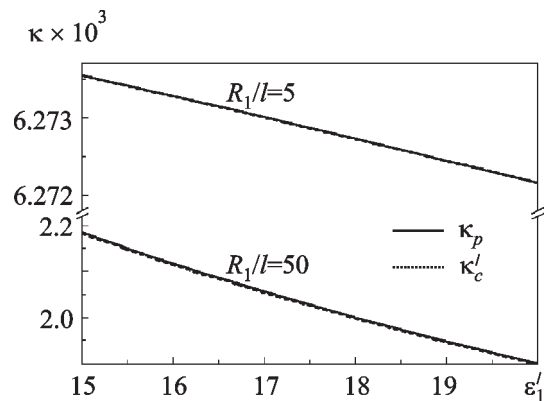
$$\begin{cases} X_1 = 0, \\ \gamma_{21}L = (2g + 1)\pi + 2\operatorname{arccctg}(Q'_{11}), \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} P'_{11} \\ G'_{11} \end{cases} = \left( \begin{cases} i \\ -i \end{cases} \right) - 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\gamma_{2m}}{\gamma_{11}} \frac{(k_{m1}R_1)^2 \mu_1^2 v_{11}^2}{((k_{m1}R_1)^2 - v_{11}^2)^2 N r_m} \begin{cases} \operatorname{ctg}(\gamma_{2m} L/2) \\ \operatorname{tg}(\gamma_{2m} L/2) \end{cases} \times \left( \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}} \right) \frac{(v_{11}^2 - (k_{11}R_1)^2)^2 N r_1}{(k_{11}R_1)^2 \mu_1^2 v_{11}^2} \frac{1}{2}.$$

Эти соотношения показывают, что с уменьшением  $(v_{11}^2 - (k_{11}R_1)^2)^2$  увеличивается разность между собственными частотами ПВР и ИР.

На рис. 6 представлены характерные зависимости реальной части собственной частоты ПВР для различных радиусов стержня. Кроме того, на этих же графиках для сравнения приведены зависимости резонансной частоты ИР. Видно, что для используемых нами параметров структуры (см. подпись к рис. 6) зависимости  $\kappa'_c(\epsilon_1)$  и  $\kappa_p(\epsilon_1)$  практически совпадают. Таким образом, все вышеприведенные данные для закрытого волновода будут с достаточной степенью точности верны и для ПВР. Заметное отличие зависимостей  $\kappa'_c(\epsilon_1)$  и



**Рис. 6.** Зависимость вещественной части собственных частот  $TE_{013}$ -колебаний ПВР  $\kappa'_c$  и ИР  $\kappa_p$  от диэлектрической проницаемости стержня при  $\epsilon'_1 = 0.01$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $R_2/l = 100$ ,  $R_3/l = 102$ ,  $u = 0$ ,  $L/l = 1000$



$\kappa_p(\epsilon_1)$  наблюдается, если только радиус стержня во много раз превышает значение, при котором в структуре проявляется диэлектрический эффект.

## 6. Заключение

Из строгих и эквивалентных граничных условий определены как обобщенная матрица передачи, так и комплексные собственные частоты проходного цилиндрического  $TE_{01p}$ -резонатора с аксиально-симметричным заполнением, содержащего частую периодическую решетку из проводящих колец. На основе метода малых возмущений с использованием энергетических соотношений развита теория измерения комплексной диэлектрической проницаемости центрального стержня с учетом радиационных и резистивных потерь.

Показано, что производимое кольцевой решеткой “отжатие” поля от боковых стенок резонатора увеличивает его добротность. Концентрация поля в стержне (диэлектрический эффект) приводит к уменьшению добротности, а следовательно, к росту методической и технологической погрешностей измерения.

## Литература

1. В. К. Ткач, Л. Д. Степин, В. Б. Казанский. Радиотехника и электроника. 1960, **5**, №12, с. 2009-2014.
2. А. С. Ильинский, Г. Я. Слепян. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. Москва, Изд-во МГУ, 1983, 232 с.
3. В. Б. Казанский, В. В. Харди́ков. Вісник ХНУ. 2001, №513, с. 3-6.
4. Н. П. Яшина. Препринт ИРЭ АН УССР. Харьков, 1978, №98, 50 с.
5. В. В. Харди́ков. Вісник ХНУ. 2000, №467, с. 152-155.
6. В. П. Шесто́палов, Ю. К. Си́ренко. Динамическая теория решеток. Киев, Наукова думка, 1989, 216 с.
7. В. В. Никольский, Т. И. Никольская. Электродинамика и распространение радиоволн. Москва, Наука, 1989, 544 с.

## Theory of Transient Cylindrical $TE_{01p}$ -Resonator with Metal-Dielectric Filling

V. B. Kazanskij, V. V. Khardikov

The properties of transient piecewise uniform axially-symmetric  $TE_{01p}$ -resonator with a thick grating of conductive rings are investigated. Proceeding from the exact and equivalent boundary conditions, the dispersion equation, the generalized transfer matrix and the complex eigen frequencies are obtained. Based on the energy relations, the dissipative and radiation losses are estimated using the perturbation theory.

It is shown that in the absence of field concentration in the central core of a small radius the introducing of a ring grating to the periphery of resonator increases its Q-factor. The relationship between the resonance frequency, the Q-factor of the resonator and the complex permittivity of the central core is found. Taking into consideration the influence of the bringing waveguides on the resonator properties and increased resonator Q-factor decrease the technological and methodical errors in the measurement of the complex permittivity as compared to the model of the isolated resonator without a ring grating.

The structure under consideration is of a great interest for a dielectric spectroscopy of substances with large losses (for example, water solutions of biomolecules). It can also be used as mode and frequency selectors, basis element of multilink filters, discriminators, phase-shifting systems, etc.