Radio Physics and Radio Astronomy, 2001, v. 6, No. 2, pp. S73–S77

ШИРОКИЙ КЛАСС МОДЕЛЕЙ СТАТИЧЕСКИХ ЗВЕЗД В РАМКАХ ОДНОГО ПОДХОДА

А. М. Баранов [1], М. В. Луконенко [2]

Красноярский государственный университет, кафедра теоретической физики, физический факультет, проспект Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия

Рассматривается класс статических сферически-симметричных звезд. Решается система уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса в приближении идеальной жидкости и с законом распределения плотности массы $\mu(x) = \mu_0(1-x^{2\nu})^n$ (μ_0 – центральная плотность, $x = r/R$, R — радиус звезды). С помощью метода последовательных приближений по малому параметру компактности $\eta = 2M/R$ (M — масса звезды) получено аналитическое решение приближенных уравнений Эйнштейна для целых значений параметра *n*. Рассмотрены модели трех фундаментально различных астрофизических объектов: нейтронная звезда ($n = 1$, $\nu = 1$, $\eta = 0.147$), белый карлик Сириус В ($n = 5$, $\nu = 1$, $\eta = 1.3 \cdot 10^{-4}$), звезды главной последовательности такие, как Солнце ($n = 1$, $\nu = 1$, $\eta = 4.2 \cdot 10^{-6}$). Проведен анализ стабильности заданных моделей звезд. Определены такие критические параметры рассмотренных звездных моделей, как максимально возможная масса, минимальный радиус звезды, максимально возможная компактность. Результаты вычислений согласуются с известными наблюдаемыми данными.

1. Введение

При моделировании таких астрофизических объектов, как звезды, зачастую можно не учитывать динамические процессы, протекающие в них. Необходимость учета динамики возникает тогда, когда звезда либо вращается, либо быстро теряет свою массу за счет радиационной сублимации вещества [1] и излучения. В остальных случаях допустимо корректное описание физики звезд в предположении их статичности понимаемой как квазистатичность. В настоящей статье делается попытка описания физических свойств звезд принципиально различных типов в рамках одного подхода. При моделировании, кроме статичности звезды, делается предположение о ее сферической симметрии. Геометрия пространства такого объекта в общей теории относительности описывается 4-интервалом

$$ds^2 = F(r)dt^2 + 2L(r)dtdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi), \qquad (1)$$

где функции $F(r)$ и $L(r)$ – метрические коэффициенты, подлежащие определению. В данной работе используется геометрическая система единиц, в которой скорость света и гравитационная постоянная равны 1. В качестве правой части системы уравнений Эйнштейна взят тензор энергии-импульса идеальной невязкой жидкости. Так же предполагается заданным распределение плотности энергии внутри звезды:

$$\mu(x) = \mu_0(1-x^{2\nu})^n, \qquad (2)$$

где μ_0 — плотность энергии в центре звезды; $x = r/R$; R — радиус звезды; n, ν — управляющие параметры. Данный выбор вида распределения плотности энергии не случайный: для $n = 0$ и $\{\nu = 1, n = 1\}$ система уравнений Эйнштейна решается аналитически. При $n = 0$ мы получаем внутреннее решение Шварцшильда [2], а при $\{\nu = 1, n = 1\}$ – решение для параболического распределения плотности энергии [3].

2. Математическая модель

Для 4-интервала (1) и тензора энергии импульса идеальной невязкой жидкости с распределением (2) плотности энергии внутри звезды, система уравнений Эйнштейна будет выглядеть следующим образом:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\chi}{x}\int \mu(x)x^2\,dx, \qquad (3.a)$$

$$G'' + \frac{d}{dx}\left(\ln\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right)G' + \frac{\varepsilon' x + 2(1-\varepsilon)}{2x^2\varepsilon}, \qquad (3.b)$$

[1] e-mail: bam@lan.krasu.ru
[2] e-mail: mvl@krw.ru

$$\widetilde{p}' = -\widetilde{p}^2\frac{x}{2\varepsilon} + \widetilde{p}\cdot\left(\frac{\varepsilon-1-\widetilde{\mu}x^2}{2x\varepsilon}\right) + \frac{\widetilde{\mu}(\varepsilon-1)}{2x\varepsilon}, \quad (3.c)$$

где $\varepsilon = F/L^2$, $G = \sqrt{F}$, $\widetilde{p} = \chi p$, $\widetilde{\mu} = \chi\mu$, $\chi = 8\pi R^2$, $p(x)$ – давление, штрих означает производную по переменной x. Центральная плотность энергии μ_0 связывается с центральным давлением p_0 уравнением состояния вырожденного релятивистского ферми-газа. Сшивки гравитационного поля звезды с полем внешнего решения Шварцшильда дают следующие соотношения:

$$\varepsilon(x=1) = 1-\eta;\ p(x=0) = 0, \quad (4.a)$$

$$G(x=1) = \sqrt{1-\eta};\ G'(x=1) = \frac{\eta}{2\sqrt{1-\eta}}, \quad (4.b)$$

где $\eta = 2M/R$ – компактность звезды; M – масса звезды.

Система уравнений (3.a) – (3.c) содержит три уравнения и четыре неизвестные функции: $\mu(x)$, $p(x)$, $\varepsilon(x)$, $G(x)$. Для замыкания данной системы, добавим к ней явный вид функции распределения плотности энергии (2). Таким образом, соотношения (2) – (4) являются математической моделью нашей задачи. Необходимо отметить, что рассматриваемая модель не имеет аналитических решений для целочисленных значений параметра $n > 1$.

3. Интегрирование уравнений Эйнштейна

При целых значениях параметра n скобки в выражении (2) раскрываются по формуле бинома Ньютона, и уравнение (3.a) интегрируется:

$$\varepsilon(x) = 1-\eta\cdot\sigma(x)/\sigma(1), \quad (5.a)$$

где

$$\sigma(x) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j\frac{(-1)^j}{2j\nu+3}x^{2j\nu+2} \quad (5.b)$$

и имеет место следующее равенство:

$$\eta = \chi\mu_0\sigma(1) \quad (6)$$

Константа интегрирования в выражении (5.a) выбрана равной нулю для обеспечения ограниченности функции $\varepsilon(x)$ в центре звезды. Равенство (6) позволяет нам в явном виде внести параметр η в систему (2) – (4). То обстоятельство, что для реальных звезд $\eta \ll 1$ (например, для Солнца $\eta_\odot = 4\cdot 10^{-6}$), оправдывает использование нами метода последовательных приближений для построения аналитического приближенного решения системы (2) – (4).

Для удобства последующих вычислений введем функцию $\psi(x) = \sigma(x)/\left[x^2\sigma(1)\right]$. Таким образом,

$$\varepsilon(x) = 1-\eta\cdot x^2\psi(x). \quad (7)$$

По физическому смыслу функция ψ есть отношение средней плотности энергии внутренней части звезды радиуса x к средней плотности энергии всей звезды.

Подстановка равенства (7) в уравнение (3.b) дает

$$(G'/x)' = \eta Q(x), \quad (8)$$

где $Q(x) = x\psi(x)G''(x) + x\psi'(x)G'(x)/2 + \psi'(x)G(x)/2$.

Решение уравнения (8) будем искать в виде ряда по компактности: $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\eta^k G_k(x)$. Используя метод математической индукции, можно доказать справедливость следующей формулы, связывающей последующее приближение $G_{k+1}(x)$ с предыдущим $G_k(x)$:

$$(G'_{k+1}/x)' = \eta Q_k(x), \quad (10.a)$$

$$G_0 = 1, \quad (10.b)$$

где

$$Q_k(x) = x\psi(x)G''_k(x) + x\psi'(x)G'_k(x)/2 + \psi'(x)G_k(x)/2. \quad (10.c)$$

Выражение для Функция $F(x)$ записывается в следующим образом:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\eta^k F_k(x) = G^2(x), \quad (11.a)$$

где

$$G^2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\eta^k\cdot\sum_{j=0}^{k}G_jG_{k-j}\right). \quad (11.b)$$

Дважды проинтегрировав (10.a), окончательно получаем

$$F_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\left[\widetilde{Q}_j(x) + C_1^{(j)}x^2/2 + C_2^{(j)}\right] \times\left[\widetilde{Q}_{k-j}(x) + C_1^{(k-j)}x^2/2 + C_2^{(k-j)}\right], \quad (12.a)$$

$$F_0 = 1, \quad (12.b)$$

где

$$\widetilde{Q}_j(x) = \int x\left(\int Q_j(x)\,dx\right)dx, \quad (12.c)$$

$C_1^{(j)}$ и $C_2^{(j)}$ — постоянные интегрирования, определяемые на каждом шаге итераций по k из сшивки функций $F_k(x)$ с полем внешнего решения Шварцшильда:

$$F(x=1) = 1 - \eta \Rightarrow F_k(x=1) = \delta_k^0 - \delta_k^1, \quad (13.a)$$

$$F'(x=1) = \eta \Rightarrow F_k'(x=1) = \delta_k^1, \quad (13.b)$$

где δ_k^j – символ Кронекера.

Таким образом, выражения (12) есть формула последовательного приближения функции $F(x)$ по малому параметру η. В связи с тем, что подынтегральные функции в (12.c) представляют собой суммы различных действительных степеней x, проблем с получением по формуле (12.a) аналитического выражения для k-ого приближения функции $F(x)$ не возникает. Приближенное выражение для второго метрического коэффициента $L(x)$ найдем, пользуясь соотношением $\varepsilon(x) = F(x)/L^2(x)$ и равенством (7). Особо отметим, что функция

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x) \quad (13.c)$$

является точным решением системы (2) – (4) при выборе плотности энергии в виде (2). Приближенный характер данное решение приобретает тогда, когда суммирование по k в (13.c) производится до фиксированного значения.

4. Моделирование реальных звезд

Граничное условие (4.a) на функцию и равенство (6) влечет соотношение

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{2j\nu + 3} = \frac{2M}{8\pi\mu_0 R^3}. \quad (14)$$

Данное равенство позволяет увязывать параметры n и ν, стоящие в левой части с физическими характеристиками конкретной звезды.

Были получены следующие значения параметра n (при $\nu = 1$) для трех различных типов звезд, обозначенных в приведенных таблицах как **A**, **B**, **C**. Тип **A** отвечает нейтронной звезде, тип **B** — белому карлику (Сириус В) и тип **C** соответствует звезде главной последовательности (Солнце).

Значения параметра n, приведенные в табл.1, имеют некоторую неточность, связанную с особенностью равенства (15). Левая часть этого равенства дискретна, а правая — непрерывна. Поэтому не всегда существует возможность подобрать для конкретной звезды целочисленное значение параметра n, удовлетворяющее (15). По формуле (12)

Таблица 1. *Параметры моделируемых звезд*

Тип звезды	R, см	M, $M_\odot$	μ_0, г/см^3	n
A	$1 \cdot 10^6$	1	$1 \cdot 10^{15}$	1
B	$2.02 \cdot 10^9$	0.89	$1.3 \cdot 10^{10}$	5
C	$6.96 \cdot 10^{10}$	1	142.54	25

было получено аналитическое выражение приближенного решения системы (2) – (4) для звезд трех типов, отмеченных табл.1. Ниже в табл.2 приводятся значения давления и скорости звука V_{sound} в центре звезды, полученные в результате моделирования.

Результаты расчетов были соотнесены с известны-

Таблица 2. *Результаты моделирования*

Тип звезды	p_0, дин/см^2	$V_{sound}(x=0)$, c
A	$5.84 \cdot 10^{33}$	0.21
B	$2.38 \cdot 10^{22}$	$6.68 \cdot 10^{-3}$
C	$3.46 \cdot 10^6$	$1.64 \cdot 10^{-3}$

ми наблюдательными данными. Так, например, для Солнца были получены следующие факты, описанные в [4]:

1. Значение p_0 из табл.2 отличается от известного на 2%;

2. Значение давления на границе солнечного ядра ($x = 0.25$) на порядок меньше значения в центре Солнца;

3. Значение плотности на границе солнечного ядра на порядок меньше значения в центре Солнца.

5. Устойчивость модели

Было произведено исследование области устойчивости в пространстве параметров $\{n, \eta, \nu\}$ с использованием следующих критериев:

1. Критерий Оппенгеймера–Волкова [5]: $dM/d\mu_0 < 0$;

2. Принцип энергодоминантности: $p/\mu < 1/3$;

3. Принцип причинности (скорость звука не должна превышать скорость света): $V_{sound} < 1$.

На основе этих критериев были получены ограничения на максимальные значения компактности η_{max} для фиксированных значений параметров n и ν. Эти результаты приведены в табл.3. $\{\nu = 1, 0 \leq n \leq 5\}$.

Таблица 3. *Ограничения на значения компактности*

n	0	1	2	3	4	5
η_{max}	0.14	0.21	0.20	0.18	0.16	0.14

Критерий $dM/dR < 0$ эквивалентен критерию Оппенгеймера–Волкова. Он позволяет находить максимальные массы M^* и минимальные радиусы R^* звезд, которые определяются фиксированными значениями параметров ν and n. Такие ограничения для $\{\nu = 1, 0 \leq n \leq 5\}$ и $\{n = 1, 0.2 \leq \nu \leq 20\}$ помещены в табл.4.

Таблица 4. *Критические параметры звезд*

$\{n, \nu\}$	M^*, $M_\odot$	R^*, км
$\{0.2, 1\}$	1.65	16.69
$\{1.4, 1\}$	0.85	9.58
$\{2.6, 1\}$	0.62	7.43
$\{3.8, 1\}$	0.52	6.39
$\{1.0, 1\}$	0.46	5.78
$\{20, 1\}$	0.30	3.66
$\{1, 0.2\}$	1.65	16.69
$\{1, 1.4\}$	0.85	9.58
$\{1, 2.6\}$	0.62	7.43
$\{1, 3.8\}$	0.46	6.39
$\{1, 1.0\}$	0.42	5.78
$\{1, 20\}$	0.30	3.66

Сопоставляя данные моделирования (табл.1, 2) и ограничения на использование модели (табл. 3, 4, 5) можно сделать вывод о применимости данного подхода к широкому классу звезд — от нейтронных звезд и белых карликов до звезд главной последовательности.

Следует отметить, что в работе [6] рассматривались модели звезд с распределением плотности энергии типа (2), однако, исследование было ограничено случаями $\{\nu = 1, n = 1, 2, 3\}$.

6. Заключение

Суммируя выше изложенное, необходимо подчеркнуть, что выбор распределения плотности массы в виде (2) не ограничивает применение нашего подхода. Для успешной реализации такого метода моделирования необходимо просто проинтегрировать выражения (3.а) и (12.с).

Работа выполнена в рамках Федеральной программы России "Астрономия".

Список литературы

[1] А. М. Баранов, Н. Н. Паклин, *Изв. Вузов.(Физика)*, 10, 13 (1994)

[2] Дж. Синг. Общая теория относительности. М.: ИИЛ, 244 (1963)

[3] А. М. Баранов *Деп. ВИНИТИ* 13.07.76, No 2626-76

[4] "Физический энциклопедический словарь" под ред. А. М. Попова, *Советская энциклопедия*, Москва (1983)

[5] Ю. Оппенгеймер, Г. Волков в: "Альберт Эйнштейн и общая теория относительности", Мир, Москва, 337 (1979)

[6] H. Knutsen *Gen. Rel. and Grav.*, **22**, 925 (1967)

[7] А. М. Баранов, М. В. Луконенко, С. Ф. Тегай *Тезисы Международной конфер. "Геометризация физики III", "Хатер"*, Казань, 6 (1997)

BROAD STATIC STAR CLASS MODELING WITHIN SINGLE APPROACH

A. Baranov and M. Lukonenko

A class of static spherical stars is considered. The Einstein equations with energy-momentum tensor in perfect fluid approximation and with the mass density distribution $\mu(x) = \mu_0(1 - x^{2\nu})^n$ are solved (μ_0 is the center density, $x = r/R$, R is the star radius). By means of the method of successive approximations with a small compactness parameter $\eta = 2M/R$ (M is the mass of a star) an analytical solution of approximative Einstein's equations for integer value of n parameter is obtained. The models of three fundamentally different astrophysical objects are considered. These are a neutron star ($n = 1$, $\nu = 1$, $\eta = 0.147$), the white dwarf Sirius B ($n = 5$, $\nu = 1$, $\eta = 1.3 \cdot 10^{-4}$), stars of main sequence such as the Sun ($n = 1$, $\nu = 1$, $\eta = 4.2 \cdot 10^{-6}$). The stability of the given models is analyzed. Such critical parameters of considered star models as the maximum mass, minimum star radius, maximum possible compactness are determined. The results of calculations with known observation data were correlated.

ШИРОКИЙ КЛАС МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ ЗІРОК У РАМКАХ ЄДИНОГО ПІДХОДУ

А. М. Баранов и М. В. Луконенко

Розглядається клас статичних сферично-симетричних зірок. Розв'язується система рівнянь Ейнштейна з тензором енергії-імпульсу в наближенні ідеальної рідини та з законом розподілу густини маси $\mu(x) = \mu_0(1 - x^{2\nu})^n$, де μ_0 – центральна густина, $x = r/R$, R – радіус зірки. За допомогою метода послідовних наближень по малому параметру $\eta = 2M/R$ (M – маса зірки) одержано аналітичне рішення рівнянь Ейнштейна для цілих значень параметра n. Розглянуто моделі трьох різних астрофізичних об'єктів: нейтронна зірка ($n = 1$, $\nu = 1$, $\eta = 0.147$), білий карлик Сіріус В ($n = 5$, $\nu = 1$, $\eta = 1.3 \cdot 10^{-4}$), зірки головної послідовності такі як Сонце ($n = 1$, $\nu = 1$, $\eta = 4.2 \cdot 10^{-6}$). Проведено аналіз стабільності заданих моделей зірок. Знайдені такі критичні параметри моделей як максимально можлива маса, мінімальний радіус зірки, максимально можлива компактність. Результати розрахунків узгоджуються з відомими даними спостережень.