Radio Physics and Radio Astronomy, 2001, v. 6, No. 2, pp. S49–S52

СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗВЕЗДЫ И ФУНКЦИИ МАТЬЕ

А. М. Баранов,[1] Д. А. Баранов[2]

Красноярский государственный университет, кафедра теоретической физики, физический факультет, проспект Свободный, 79, 660041, Красноярск, Россия

Уравнения Эйнштейна для метрики Бонди в радиационных координатах и с тензором энергии-импульса идеальной паскалевой жидкости преобразуются в систему трех дифференциальных уравнений, одно из которых может быть переписано через новую переменную как уравнение нелинейного осциллятора. Дальнейшее требование совпадения этого уравнения с уравнением Матье на конечном интервале приводит к описанию модели звезды функциями Матье и нелинейному уравнению согласования. Плотность массы внутри звезды оказывается обобщением параболического распределения плотности массы, справедливого только для уравнения линейного осциллятора. Получены оценки в линейном приближении. Полученная статическая модель звезды описывает компактный астрофизический объект.

1. Введение

Нахождение точных решений уравнений Эйнштейна как для внешних, так и для внутренних источников гравитационных полей, является непростой проблемой сегодня даже в статическом случае из-за нелинейности гравитационных уравнений. Поэтому можно попытаться заменить исходную задачу другой задачей, имеющей решение.

Для решения проблемы внутреннего описания сферически-симметричной звезды в рамках общей теории относительности (ОТО) запишем уравнения Эйнштейна в виде

$$G_{\alpha\beta} = \varkappa T_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

где $G_{\alpha\beta}$ — тензор Эйнштейна, $T_{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса, скорость света и ньютоновская гравитационная постоянная равны единице, $\varkappa = 8\pi$ — гравитационная постоянная Эйнштейна.

В данной работе будем пользоваться метрикой в радиационных координатах Бонди

$$ds^2 = F(r)dt^2 + 2L(r)dtdr - r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\varphi^2), \tag{2}$$

где r — радиальная переменная, θ и φ — угловые переменные.

Тензор энергии-импульса мы выберем в приближении паскалевой идеальной жидкости

$$T_{\alpha\beta} = (\mu + p)u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

где μ — плотность массы, p — давление, $u^\alpha = dx^\alpha/ds$ — 4-скорость.

[1]e-mail: bam@lan.krasu.ru

[2]e-mail: dmitri@krasu.ru

В дальнейшем будем считать, что все функции зависят только от радиальной переменной.

Заменой $\varepsilon = F/L^2$ уравнения Эйнштейна (1) преобразуются в систему дифференциальных уравнений

$$\varkappa\mu(x) = -\varepsilon'/x + (1-\varepsilon)/x^2, \tag{4}$$

$$\varkappa p(x) = F'/(xL^2) - (1-\varepsilon)/x^2, \tag{5}$$

$$(1/2L)(F'/L)' + (1-\varepsilon)/x^2 - \varepsilon L'/(xL) = 0, \tag{6}$$

где штрихом обозначена производная по безразмерной переменной $x = r/R$, $0 \le x \le 1$, R — внешний радиус звезды, $F(x)$ и $L(x)$ суть искомые метрические функции.

Последнее уравнение (6) с помощью замены $F = G^2$ превращается в линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$G'' + f(x)C' + g(x)G = 0, \tag{7}$$

где

$$f(x) = (ln\varphi)', \quad \varphi = \sqrt{\varepsilon}/x,$$

$$g(x) = f(x)/x + 1/(x^4\varphi).$$

Далее, переходом к новой переменной ζ,

$$d\zeta = xdx/\sqrt{\varepsilon}, \tag{8}$$

получаем уравнение нелинейного осциллятора

$$G''_{\zeta\zeta} + \Omega^2\zeta(x)G = 0, \tag{9}$$

где

$$\Omega^2 = \varphi^2 g(x) = [(1-\varepsilon)/y]'_y; \quad y = x^2.$$

Связь функций ε и μ, найденная из уравнения (4) путем интегрирования,

$$\varepsilon = 1 - (\chi/x) \int \mu(x) x^2 dx, \qquad (10)$$

указывает на необходимость введения функции

$$\Phi(x) = 1 - \varepsilon(x), \qquad (11)$$

играющей роль ньютоновского гравитационного потенциала внутри звезды ($\chi = \varkappa R^2$). Тогда функция Ω^2 может быть записана как

$$\Omega^2 = -(\Phi/y)'_y. \qquad (12)$$

Для случая, когда $\Omega^2 = 0$, мы имеем внутреннее решение Шварцшильда с постоянной плотностью массы [1], а при $\Omega^2 = const$ получается известное точное решение гравитационных уравнений с параболическим законом распределения плотности массы [2], которое соответствует линейному уравнению осциллятора.

2. Моделирование звезды и уравнение Матье

В более общем случае ($\Omega^2 \neq const$) решение этой проблемы находится путем преобразования исходного нелинейного осцилляторного уравнения (9) в уравнение Матье на интервале $0 \leq x \leq 1$,

$$G''_{\zeta\zeta} + \left[A + B \sin^2(\zeta)\right] G = 0 \qquad (13)$$

с переменной

$$\zeta(x) = \int \frac{x dx}{\sqrt{\varepsilon(x)}}.$$

Как показано в [3], это достигается, например, выбором функции $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = b^2 \sin^2(ax) + cx^6 + ex^{10} + fx^{12}, \qquad (14)$$

где a, b, c, e, f, A, B суть управляющие параметры, с помощью которых достигается согласование коэффициентов обоих уравнений на указанном промежутке и физического поведения плотности массы и давления звезды. В этом случае плотность массы оказывается регулярной функцией внутри звезды и принимает вид

$$\chi\mu(x) = \frac{1}{x^2}\Big\{ b^2 \sin^2(ax) - cx^6$$

$$-ex^{10} - fx^{12} + x\left[2ab^2 \sin(ax)\cos(ax)\right.$$

$$\left.-6cx^5 - 10ex^9 - 12fx^{11}\right]\Big\}. \qquad (15)$$

Функция $\chi\mu(x)$ в центре звезды достигает конечной величины, уменьшаясь к поверхности, и, в зависимости от величин параметров, может быть равна нулю или ступенчатой функции на границе звезды.

В частности, для $c = e = f = 0$ подбором параметров a и b достигается лишь совпадение коэффициентов обоих уравнений на концах указанного интервала, так как соответствующие функции внутри промежутка ведут себя как $\sim x^2$ и $\sim x^4$. Следовательно, при ненулевых значениях параметров c, e, f путем приравнивания коэффициентов при степенях x в разложениях функций $\Omega^2(\zeta) - A$ and $B\sin^2(\zeta)$ в ряды, можно добиться сближения (с большой степенью точности) графиков этих функций на указанном промежутке изменения x. Таким образом, параметры c, e, f, A и B выражаются только через параметры a и b следующим образом:

$$c = \frac{1}{45} 2b^2 a^6; \; A = \frac{1}{3} b^2 a^4; \; B = \frac{4}{105} b^2 a^8;$$

$$e = \frac{2}{14175} b^2 a^{10} + \frac{1}{840} b^4 a^{10};$$

$$f = -\frac{1}{6300} b^2 a^8 + \frac{1}{1680} b^6 a^{12}$$

$$\frac{2}{467775} b^2 a^{12} - \frac{1}{4725} b^4 a^{12}.$$

Варьированием параметров a и b можно влиять на поведение плотности массы как внутри звезды, так и на ее границе. Например, для значений $a = 0.5070$ и $b = 0.4661$ расхождение для коэффициентов исходного уравнения (9) и уравнения Матье (13) оказывается менее 0.1%. Условия сшивки со внешним решением Шварцшильда при $x = 1$ гарантируют равенство нулю давления на поверхности звезды.

Оценки показывают, что использованное здесь приближение описывает модель статической нейтронной звезды с центральной плотностью массы $\mu(0) = 9 \cdot 10^{13}$ г/см^3 и радиусом $R = 10$ км.

3. Уравнение самосогласования и функции Матье

Однако, возможен более общий подход, приводящий к уравнению самосогласования. Потребуем точного совпадения уравнения нелинейного осциллятора на промежутке $0 \leq x \leq 1$ с уравнением

Матье, взятого теперь в виде,

$$G''_{\zeta\zeta} + [A_1 - B_1 \cdot \cos(2\zeta)]\, G = 0. \qquad (16)$$

Это, естественно, влечет за собой ограничения на физическую интерпретацию рассматриваемой проблемы. В этом случае получаем, $\Omega^2 = A_1 - B_1 \cdot \cos(2\zeta)$ или, используя связь Ω^2 с функцией Φ, после интегрирования находим

$$\Phi(y) = Cy - A_1 y^2 + B_1 y \int_0^y \cos(2\zeta) dy$$

$$= Cy - A_1 y^2 + B_1 y \cdot f(y), \qquad (17)$$

с постоянными A_1, B_1, C, которые могут быть найдены из условия сшивки со внешним решением Шварцшильда на поверхности звезды. Для параболического закона распределения плотности массы параметр B_1 равен нулю ($B_1 = 0$), а уравнение Матье тогда превращается в уравнение гармонического осциллятора и

$$\varepsilon_0(y) = 1 - Cy + A_1 y^2, \qquad (18)$$

$$G \equiv G_0(\zeta) = \beta_0 \cdot \cos(\zeta + \alpha_0), \qquad (19)$$

где функции $\varepsilon_0(y)$ и $G_0(\zeta)$ теперь рассматриваются как исходное приближение; β_0 and α_0 — постоянные интегрирования. Если еще $A_1 = 0$, то получаемая функция $\varepsilon(y)$ соответствует известному случаю однородного распределения массы (внутреннее решение Шварцшильда) [1].

Возвращаясь к общему случаю и подставляя вместо функции $\Phi(y)$ ее ранее полученное выражение (17), приходим к проблеме решения уравнения самосогласования:

$$2\zeta(y) = \int_0^y \left[\varepsilon_0 - B_1 y f(y)\right]^{-1/2} dy$$

$$= \int_0^y \left\{ \varepsilon_0(y) - B_1 y \int_0^y \cos\left[2\zeta(y)\right] dy \right\}^{-1/2} dy, \qquad (20)$$

которое может быть переписано как

$$\zeta = \int_0^y \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 - B_1 y \int_0^y dy \cos Y \right)^{-1/2} dy, \qquad (21)$$

где

$$Y = \int_0^y \left[\varepsilon_0 - B_1 y \int_0^y dy \cos(...) \right] dy.$$

В результате, соответствующая плотность массы оказывается обобщением параболического распределения плотности массы внутри звезды

$$\chi\mu(y) = 3C - 5A_1 y + 3B_1 \cdot f(y) + 2B_1 y \cdot f'_y. \qquad (22)$$

Принимая во внимание (16) и записывая решение уравнения Матье как суперпозицию функций Матье, имеем

$$G(\zeta) = C_1 \cdot ce_1(\zeta, B_1) + C_2 \cdot se_1(\zeta, B_1), \qquad (23)$$

где функции $ce_1(\zeta, B_1)$ и $se_1(\zeta, B_1)$ представляют собой обобщения круговых косинуса и синуса соответственно.

Для случая $B_1/A_1 \ll 1$ получаем в линейном приближении по параметру B_1:

$$G(\zeta) \approx G_0(\zeta) - (B_1/16)\left[G_0(\zeta) \cdot \cos(2\zeta)\right.$$
$$\left. + G_0(\zeta + \pi/2) \cdot \sin(2\zeta)\right], \qquad (24)$$

где

$$G_0(\zeta + \pi/2) = dG_0(\zeta)/d\zeta = -\sqrt{\beta_0^2 - G_0^2(\zeta)}. \qquad (25)$$

Учет уравнения самосогласования (21) в рассматриваемом приближении приводит к

$$2\zeta \approx I(y) + (B_1/2) \int_0^y \frac{y \cdot dy}{\varepsilon_0^{3/2}(y)} \int_0^y \cos\left[I(y)\right] dy \qquad (26)$$

с

$$I(y) = \int_0^y \frac{dy}{\varepsilon_0(y)}, \qquad (27)$$

или принимая во внимание выражение (18), получаем

$$I(y) = (1/\sqrt{A_1}) \mathrm{arcsh}(Y/A_1)\big|_{y - C/2A_1}^{-C/2A_1},$$

$$C = \varkappa R^2 \mu(0), \qquad (28)$$

где $\mu(0)$ – плотность массы в центре звезды.

4. Заключение

При очень малых значениях B_1 полученная модель звезды близка к модели с параболическим законом распределения плотности массы [2] как это легко видеть из соотношений (22), (24). Последняя, как хорошо известно, является шварцшильдо-подобной моделью звезды, т.е. наша модель мало отличается от таких компактных астрофизических моделей, как нейтронная звезда.

Работа выполнена в рамках Федеральной программы России "Астрономия".

Список литературы

[1] Дж. Синг, Общая теория относительности. М.: ИИЛ, 244 (1963)

[2] А. М. Баранов. *Деп. ВИНИТИ* 13.07.76, No 2626-76

[3] А. М. Баранов, Д. А. Баранов, *Тезисы 10-й Российской гравитационной конференции (Россия, Владимир)*. Москва, 31(1999)

STATIC STAR MODEL AND MATHIEU FUNCTIONS

A. Baranov, D. Baranov

The Einstein equations with the metric in radiation coordinates of Bondi and energy-momentum tensor of the Pascal perfect fluid are reduced to three differential equations system, one of which can be written as the nonlinear oscillation equation through a new variable. We shall require concurrence of the obtained equation with the equation Mathieu in the finite interval and the star model is described by the Mathieu functions. It leads to a nonlinear equation of the concordance. Inside the star mass density there is a generalization of the parabolic mass density law, which is valid only for an equation of linear oscillator. In a linear approximation estimates are obtained. The star model describes a compact astrophysical object.

СТАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗІРКИ ТА ФУНКЦІЇ МАТЬЄ

А. М. Баранов, Д. А. Баранов

Рівняння Ейнштейна для метрики Бонді в радіаційних координатах та з тензором енергії-імпульсу ідеальної паскалевої рідини перетворюються на систему трьох диференційних рівнянь, одне з яких може бути записане за допомогою нової змінної як рівняння нелінійного осцилятора. Подальша умова збігу цього рівняння з рівнянням Матьє на скінченному інтервалі приводить до опису моделі зірки функціями Матьє та нелінійного рівняння узгодження. Густина маси всередині зірки виявляється узагальненням параболічного розподілу густини маси, яке має місце тільки для рівняння лінійного осцилятора. Одержані оцінки в лінійному наближенні. Одержана статична модель зірки описує компактний астрофізичний об'єкт.