

## **Фокусировка излучения протяженного нестационарного источника гравитационной линзой с произвольным распределением массы**

А. А. Минаков, С. А. Васильев, Л. М. Рабинович

*Радиоастрономический институт НАН Украины,  
Украина, 61002, г. Харьков, ул. Краснознаменная, 4  
minakov@ira.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 7 мая 2001 г.*

В работе рассмотрена фокусировка излучения протяженного нестационарного источника полем тяготения галактики с произвольным распределением массы. Показано, что в результате линзового эффекта происходит сложная деформация кривых блеска изображений источника, формируемых гравитационной линзой. Величина деформаций зависит как от характерных параметров распределения массы внутри линзы, так и от параметров источника излучения (линейный размер излучающей области и ее положение относительно критических кривых линзы, длительность импульса). Для получения численных оценок, в качестве примера, была рассмотрена модель гравитационной линзы Q2237+0305, состоящая из компактного массивного ядра и протяженного дискового компонента.

У роботі розглянуто фокусування випромінювання подовженого нестационарного джерела полем тяжіння галактики з довільним розподілом маси. Показано, що у результаті лінзового ефекту відбувається складна деформація кривих блиску зображень джерела, які формуються гравітаційною лінзою. Величина деформацій залежить як від характерних параметрів розподілу маси усередині лінзи, так і від параметрів джерела випромінювання (лінійний розмір ділянки, яка випромінює, та її розташування відносно критичних кривих лінзи, тривалість імпульсу). Для одержання кількісних оцінок, як приклад розглянута модель гравітаційної лінзи Q2237-0305, яка складається із компактного масивного ядра та подовженого дискового компонента.

### **Введение**

При гравитационной фокусировке излучения переменных во времени и протяженных в пространстве источников происходит сложная деформация кривых блеска изображений источника, формируемых гравитационной линзой. Величина деформаций кривых блеска зависит как от параметров гравитационной линзы (ГЛ), характеризующих распределение массы внутри линзы, так и от параметров источника излучения (линейный размер излучающей области и ее положение

относительно критических кривых линзы, длительность импульса). Проведенный на примере точечной ГЛ анализ [1] показал, что ГЛ действует подобно низкочастотному фильтру, пропуская без искажения медленные временные вариации яркости источника и сглаживая быстрые.

Целью настоящей работы является рассмотрение фокусировки излучения переменного во времени источника полем тяготения галактики с произвольным распределением массы. Для получения численных оценок

в качестве примера была рассмотрена ГЛ Q2237+0305 (“крест Эйнштейна”).

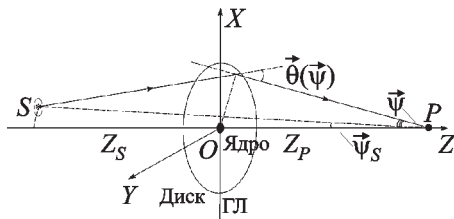
### Основные уравнения

Основным уравнением анализа эффекта гравитационной фокусировки в оптическом и радиодиапазоне является уравнение ГЛ, определяющее связь между истинным угловым положением “точечного” элемента поверхности источника  $\vec{\psi}_s$  и наблюдаемым –  $\vec{\psi}$ . При этом учитывается, что под действием линзового эффекта поля тяготения близлежащей галактики в плоскости линзы происходит преломление лучей на угол  $\vec{\theta}(\vec{\psi})$  [2]. Согласно рис. 1 в системе координат, в которой ось Z соединяет центр масс ГЛ и точку наблюдения P, в приближении парааксиальной оптики и тонкой линзы можно записать следующее равенство:

$$\vec{\psi}_s = \vec{\psi} + \frac{\tilde{z}}{z_p} \vec{\theta}(\vec{\psi}) = \vec{F}(\vec{\psi}), \quad (1)$$

где  $\tilde{z} = z_p z_s / (z_p + z_s)$ ,  $z_p$  и  $z_s$  – соответственно расстояния от наблюдателя (P) и источника (S) до ГЛ. Для упрощения рассматривалась гравитационная фокусировка на фоне плоского пространства-времени, хотя не составляет труда обобщить результаты на случай космологических расстояний.

При фокусировке происходит сложное перераспределение яркости внутри наблюдаемого



**Рис. 1.** Взаимное расположение источника излучения S, наблюдателя P и гравитационной линзы ГЛ:  $\vec{\psi} = (\psi_x, \psi_y)$  – двумерный угол наблюдения;  $\vec{\psi}_s = (\psi_{sx}, \psi_{sy})$  – угол, задающий истинное положение элемента поверхности источника

изображения. Если параметры источника и ГЛ не изменяются во времени, то наблюдаемое через ГЛ распределение яркости  $I_p(\vec{\psi})$  связано с истинным распределением яркости источника  $I_s(\vec{\psi}_s)$  выражением типа свертки [2]:

$$I_p(\vec{\psi}) = \int_{-\infty}^{\infty} I_s(\vec{\psi}_s) \delta[\vec{\psi}_s - \vec{F}(\vec{\psi})] d\vec{\psi}_s. \quad (2)$$

Здесь  $\delta[...]$  – дельта-функция. Формула (2) математически отображает присущее всем непоглощающим линзам свойство неизменности яркости вдоль луча.

Данные наблюдений ГЛ показывают, что распределение яркости в деформированном изображении источника  $I_p(\vec{\psi})$  очень неоднородно. Как правило, регистрируются несколько компактных ярких областей (макроизображений), которые отстоят друг от друга на несколько угловых секунд. Сами макроизображения имеют размеры, приблизительно совпадающие с размерами излучающих областей источника. Например, для квазаров эти величины в оптическом диапазоне составляют  $\sim 10^{-4} \div 10^{-6}$ ". Для радиоисточников угловые размеры макроизображений могут быть на несколько порядков больше. Современные инструменты (телескопы, радиотелескопы) не обладают достаточным разрешением, чтобы исследовать тонкую структуру распределения  $I_p(\vec{\psi})$  внутри таких макроизображений. Поэтому, в точке наблюдения будет регистрироваться интегральная по углам яркость (блеск) изображения:

$$J_p = \int_{-\infty}^{\infty} I_p(\vec{\psi}) d\vec{\psi}. \quad (3)$$

Изменение блеска стационарного источника, возникающее в результате гравитационной фокусировки, характеризуется коэффициентом усиления линзы q:

$$q = \frac{J_p}{J_p^{(0)}},$$

где  $J_p^{(0)}$  – блеск источника, который наблюдался бы в отсутствие ГЛ. Если  $J_p$  определяет суммарный блеск всего деформированного изображения источника, то  $q$  представляет собой суммарный коэффициент усиления линзы  $q_\Sigma$ . Если же  $J_p$  есть блеск  $i$ -го макроизображения  $J_{pi}$ , то  $q$  – коэффициент усиления  $i$ -го макроизображения  $q_i$ . При этом коэффициенты усиления  $q_\Sigma$  и  $q_i$  связаны простым соотношением:

$$q_\Sigma = \sum_i q_i,$$

где суммирование ведется по всем наблюдаемым макроизображениям.

В более общем случае, когда яркость источника  $I_s$  изменяется не только по углам, но и во времени –  $I_s = I_s(\bar{\psi}_s, t)$ , а параметры ГЛ практически сохраняют свои значения, формулы (2), (3) обобщаются и принимают следующий вид [1]:

$$I_p(\bar{\psi}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} I_s[\bar{\psi}_s, t - t_p(\bar{\psi}, \bar{\psi}_s)] \delta[\bar{\psi}_s - \bar{F}(\bar{\psi})] d\bar{\psi}_s, \quad (4)$$

$$J_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I_p(\bar{\psi}, t) d\bar{\psi}.$$

Здесь  $t_p(\bar{\psi}, \bar{\psi}_s)$  – время распространения сигнала вдоль виртуального луча, соединяющего произвольную точку источника ( $\bar{\psi}_s$ ) с произвольной точкой в плоскости  $z = 0$  ( $\bar{\psi}$ ) и далее с наблюдателем ( $P$ ).

С учетом того, что локальная скорость распространения сигнала в слабом поле тяготения с потенциалом  $\Phi$  ( $|\Phi|/c^2 \ll 1$ ) равна  $c/n(\bar{r})$ , где  $c$  – скорость света в вакууме, а

$$\bar{n}(\bar{r}) = 1 - \frac{2}{c^2} \Phi(\bar{r}) -$$

показатель преломления эффективной “среды” [2]. Время  $t_p(\bar{\psi}, \bar{\psi}_s)$  можно определить путем интегрирования показателя преломления  $n(\bar{r})$  вдоль криволинейного луча  $L$ , соединяющего произвольные точки источника, экрана и наблюдателя:

$$t_p(\bar{\psi}, \bar{\psi}_s) = c^{-1} \int_L n(\bar{r}) dl. \quad (5)$$

В приближениях параксиальной оптики и тонкой линзы интегрирование по криволинейному лучу в (5) можно заменить на интегрирование вдоль прямолинейных отрезков, соединяющих элемент поверхности источника с точкой экрана и точку экрана с наблюдателем. В результате несложных вычислений получим:

$$t_p(\bar{\psi}, \bar{\psi}_s) = c^{-1} \left[ z_p + z_s + \frac{z_p(z_p + z_s)}{z_s} \times \left( \frac{1}{2} \frac{z_p + z_s}{z_p} \psi_s^2 + \frac{1}{2} \psi^2 - \bar{\psi} \bar{\psi}_s \right) \right] + t_{\text{тр}}(\bar{\psi}). \quad (6)$$

Первое слагаемое в формуле (6) соответствует времени распространения сигнала в пустом пространстве вдоль ломаного луча “источник – линза – наблюдатель” (см. рис. 1). Второе слагаемое  $t_{\text{тр}}$  соответствует времени распространения, связанному с присутствием гравитационного поля. Для слабого поля тяготения  $t_{\text{тр}}(\bar{\psi})$  может быть приближенно вычислено путем интегрирования гравитационной добавки  $2\Phi/c^2$  в выражении (5) вдоль прямолинейных лучей. При этом нетрудно показать, что выражение для  $t_{\text{тр}}(\bar{\psi})$  может быть приведено к следующему виду [3]:

$$t_{\text{тр}}(\bar{\psi}) = \frac{2G}{c^3} \int_W d\bar{\psi}' \sigma(\bar{\psi}) \ln \frac{4z_s}{z_p(\bar{\psi}' - \bar{\psi})^2} + \text{const.}$$

Здесь  $G$  – постоянная тяготения;  $\sigma(\bar{\Psi})$  – заданное распределение поверхностной плотности массы линзы, кг/рад<sup>2</sup>; const – несущественная постоянная добавка времени, влияющая только на начало отсчета времени; интегрирование ведется по всей поверхности  $W$  ГЛ, проектируемой на небесную сферу.

Выражение (4) имеет простой физический смысл. Каждому выбранному углу наблюдения  $\bar{\Psi}$  аппаратная функция линзы  $\delta[\bar{\Psi}_s - \bar{F}(\bar{\Psi})]$  ставит в соответствие “точечный” элемент поверхности источника с истинным углом  $\bar{\Psi}_s = \bar{F}(\bar{\Psi})$  и поверхностной яркостью  $I_s(\bar{\Psi}_s, t)$ . Временные изменения  $I_s(\bar{\Psi}_s, t)$  будут регистрироваться наблюдателем под углом  $\bar{\Psi}$  с временной задержкой  $t_p(\bar{\Psi}) = t_p(\bar{\Psi}, \bar{\Psi}_s = \bar{F}(\bar{\Psi}))$ . Видно, что точное совпадение временных зависимостей блеска источника и его изображений происходит только для точечных источников. При фокусировке протяженных источников возникают различия в формах временных кривых.

### Модельные представления

Для упрощения дальнейшего анализа в качестве протяженного в пространстве и переменного во времени источника излучения рассматривался гауссов источник излучения:

$$I_s(\bar{\Psi}_s, t) = \frac{\tilde{J}_0}{2\pi\Psi_0^2} \exp\left\{-\frac{(\bar{\Psi}_s - \bar{\Psi}_s)^2}{2\Psi_0^2}\right\} f(t, \bar{\Psi}_s). \quad (7)$$

Здесь  $\Psi_0$  и  $\bar{\Psi}_s$  – соответственно угловой размер и угловая координата максимума излучения источника, а  $f(t, \bar{\Psi}_s)$  – безразмерная функция (порядка единицы), учитывающая временные изменения яркости. Далее предполагалось, что источник изменяется во времени как целое по закону:

$$f(t, \bar{\Psi}_s) = \frac{t}{T_s} \exp\left(-\frac{t^2}{2T_s^2}\right) h(t),$$

где  $T_s$  – характерная длительность вспышки, а

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Данная модель соответствует вспыхнувшему в момент времени  $t = 0$ , а затем постепенно угасающему источнику излучения. Введенная в формуле (11) величина  $\tilde{J}_0$  соответствует полной энергии, излучаемой источником:

$$\tilde{J}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\Psi}_s \int_{-\infty}^{\infty} dt I_s(\bar{\Psi}_s, t). \quad (8)$$

Для модельного представления (7) согласно формуле (4) распределение яркости в точке наблюдения определяется следующим выражением:

$$I_p(\bar{\Psi}, t) = \frac{\tilde{J}_0}{2\pi\Psi_0^2 T_s} \exp\left\{-\frac{[\bar{\Psi}_s - \bar{F}(\bar{\Psi})]^2}{2\Psi_0^2}\right\} \times \\ \times h[t - t_p(\bar{\Psi})][t - t_p(\bar{\Psi})] \exp\left\{-\frac{1}{2T_s^2}[t - t_p(\bar{\Psi})]^2\right\}, \quad (9)$$

где  $t_p(\bar{\Psi}) = t_p(\bar{\Psi}, \bar{\Psi}_s = \bar{F}(\bar{\Psi}))$ .

Анализ эффекта гравитационной фокусировки удобнее проводить в нормированных величинах  $\bar{v} = \bar{\Psi}/\psi_l$ ,  $\bar{v}_s = \bar{\Psi}_s/\psi_l$ ,  $v_0 = \Psi_0/\psi_l$ ,  $\bar{F}_1(\bar{v}) = \bar{F}(\psi_l \bar{v})/\psi_l$ , а также с использованием нормированных времен  $\tau = t/T_s$  и  $\tau_p(\bar{v}) = t_p(\psi_l \bar{v}, \psi_l \bar{F}_1(\bar{v}))/T_s$ . В качестве характерного масштаба нормировки  $\psi_l$ , как правило, выбирают угловой радиус кольца

Эйнштейна, характерный для исследуемой ГЛ. Для известных к настоящему времени кандидатов в ГЛ величину  $\psi_l$  можно оценить как  $\psi_l \sim 1''$ .

В нормированных координатах уравнение линзы (1) записывается как

$$\vec{v}_s = \vec{F}_1(\vec{v}), \quad (10)$$

а видимое распределение яркости источника (9) приводится к следующему виду:

$$I_p(\vec{v}, \tau) = \frac{\tilde{J}_0}{2\pi v_0^2} h[\tau - \tau_p(\vec{v})][\tau - \tau_p(\vec{v})] \times \exp\left\{-\frac{1}{2v_0^2}[\vec{v}_s - \vec{F}_1(\vec{v})]^2 - \frac{1}{2}[\tau - \tau_p(\vec{v})]^2\right\}. \quad (11)$$

Кривую блеска наблюдаемого изображения  $J_p(\tau)$  получим, проинтегрировав (11) по всем возможным углам наблюдения:

$$J_p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I_p(\vec{v}, \tau) d\vec{v}. \quad (12)$$

Полную энергию принимаемого импульса, аналогично (8), определим как

$$\tilde{J}_p = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau J_p(\tau).$$

### Вычисление кривых блеска

Для наблюдаемых в оптическом диапазоне длин волн кандидатов в ГЛ, как правило, величина  $v_0 \ll 1$ . Исключение составляют лишь достаточно протяженные радиоисточники, для которых  $v_0$  может быть порядка или даже больше единицы. Из теории ГЛ известно, что

для источников с  $v_0 > 1$  фокусирующее действие поля тяготения практически не сказывается. Поэтому в дальнейшем случай  $v_0 > 1$  мы рассматривать не будем.

Согласно (11) при  $v_0 \ll 1$  излучение приходит в точку наблюдения лишь из небольших областей пространства, лежащих вблизи точек  $\vec{v} = \vec{v}_i$ , где показатель степени экспоненты обращается в нуль, т. е. когда  $\vec{v}_s = \vec{F}_1(\vec{v}_i)$ . Корни этого уравнения (уравнения линзы (10))  $\vec{v} = \vec{v}_i$  определяют координаты максимумов излучения изображений, формируемых ГЛ. Предположив, что в результате эффекта ГЛ наблюдаются  $N$  изолированных изображений источника ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), введем в рассмотрение небольшие отклонения  $\Delta\vec{v}$  от положений максимумов излучения  $\vec{v}_i$  ( $\vec{v} = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$ ) и произведем следующие упрощения в (11):

$$\vec{v}_s - \vec{F}_1(\vec{v}_i + \Delta\vec{v}) \approx (\Delta\vec{v}\vec{\nabla})\vec{F}_1(\vec{v}_i), \quad (13)$$

$$\tau - \tau_p(\vec{v}_i + \Delta\vec{v}) \approx \tau'_i - (\Delta\vec{v}\vec{\nabla})\tau_p(\vec{v}_i).$$

Здесь  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial v_x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_y}\vec{e}_y$ ;  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$  – орты

декартовой системы координат (см. рис. 1);  $\tau'_i = \tau - \tau_p(\vec{v}_i)$ . С учетом (13) распределение яркости (11) вблизи максимума  $i$ -го изображения представляется как

$$I_{pi}(\Delta\vec{v}, \tau'_i) \approx \frac{\tilde{J}_0}{2\pi v_0^2} h(\tau'_i - \tilde{A}_i\Delta v_x - \tilde{B}_i\Delta v_y) \times$$

$$\times (\tau'_i - \tilde{A}_i\Delta v_x - \tilde{B}_i\Delta v_y) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tau'_i - \tilde{A}_i\Delta v_x - \tilde{B}_i\Delta v_y)^2 -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2v_0^2}[(\tilde{C}_i\Delta v_x + \tilde{D}_i\Delta v_y)\vec{e}_x +\right.$$

$$+ \left( \tilde{D}_i \Delta v_x + \tilde{E}_i \Delta v_y \right) \tilde{e}_y \left. \right]^2 \},$$

где

$$\tilde{A}_i = \frac{\partial \tau_p}{\partial v_x}, \quad \tilde{B}_i = \frac{\partial \tau_p}{\partial v_y}, \quad \tilde{C}_i = \frac{\partial F_{1x}}{\partial v_x}, \quad (14)$$

$$\tilde{D}_i = \frac{\partial F_{1y}}{\partial v_y}, \quad \tilde{E}_i = \frac{\partial F_{1x}}{\partial v_y} = \frac{\partial F_{1y}}{\partial v_x}.$$

Все производные в (14) вычисляются в точке  $\tilde{v} = \tilde{v}_i$ . С учетом проделанных упрощений, согласно формуле (12), можно получить следующее асимптотическое приближение для кривой блеска  $i$ -го изображения:

$$J_{pi}(\tau'_i) \approx \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta \tilde{v}) I_{pi}(\Delta \tilde{v}, \tau'_i) = \frac{q_i \tilde{J}_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{R_i}}{1 + R_i} \times \\ \times \exp\left(-\frac{R_i}{2} \tau'^2_i\right) \left[ 1 + \sqrt{\pi} \frac{R_i \tau'_i}{\sqrt{2(1 + R_i)}} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(\frac{R_i^2 \tau'^2_i}{2(1 + R_i)}\right) \left( 1 + \Phi\left(\frac{R_i \tau'_i}{\sqrt{2(1 + R_i)}}\right) \right) \right]. \quad (15)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$R_i = \frac{1}{v_0^2 q_i^2 H_i}, \quad (16)$$

$$H_i = (\tilde{C}_i^2 + \tilde{D}_i^2) \tilde{B}_i^2 + \\ + (\tilde{D}_i^2 + \tilde{E}_i^2) \tilde{A}_i^2 - 2\tilde{A}_i \tilde{B}_i \tilde{D}_i (\tilde{C}_i + \tilde{E}_i),$$

$$q_i = \frac{1}{|\tilde{C}_i \tilde{E}_i - \tilde{D}_i^2|},$$

$\Phi(x)$  – интеграл вероятности. Легко показать, что введенная здесь величина  $q_i$  есть коэффициент усиления  $i$ -го изображения стационарного источника.

Из простых физических соображений следует, что в результате эффекта фокусировки усиление энергии невозмущенного импульса  $\tilde{J}_0$  происходит только из-за пространственного перераспределения яркости. Возрастание яркости определяется коэффициентом усиления линзы  $q$ . Таким образом, должно выполняться условие  $\tilde{J}_{pi} = q_i \tilde{J}_0$ . Действительно, проинтегрировав (15) по всей области изменения  $\tau'_i$  ( $-\infty < \tau'_i < \infty$ ), получим полную энергию сфокусированного импульса, приходящего в точку наблюдения от  $i$ -го изображения:

$$\tilde{J}_{pi} = \int_{-\infty}^{\infty} J_{pi}(\tau'_i) d\tau'_i = q_i \tilde{J}_0.$$

Для значений параметра  $R_i \gg 1$ , воспользовавшись асимптотическим представлением  $\Phi(x)$  при больших значениях аргумента,

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp(-x^2),$$

получим следующее приближенное выражение для  $J_{pi}(\tau'_i)$ :

$$J_{pi}(\tau'_i) = q_i \tilde{J}_0 \tau'_i \exp\left(-\frac{\tau'^2_i}{2}\right), \quad \tau'_i > 0. \quad (17)$$

Сравним найденную зависимость с кривой блеска источника (7) в случае отсутствия ГЛ. Положив в формуле (4)  $\tilde{F}(\tilde{\psi}) = \tilde{\psi}$ , согласно (6) для  $t_{\text{тр}}(\tilde{\psi}) \equiv 0$  получим:

$$\tau_p(\bar{\Psi}) = \tau_p(\bar{\Psi}, \bar{\Psi}_s = \bar{\Psi}) = \tau_0(1 + \Psi^2/2). \quad (18)$$

Здесь  $\tau_0 = \frac{z_s + z_p}{cT_s}$  – безразмерное время распространения сигнала между плоскостями источника и наблюдателя. Предположив, что источник в общем случае смещен на небольшие расстояния от оси линзы ( $\Psi_s > \Psi_0$ ), аналогично (13) разложим (18) в ряд Тейлора в точке  $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_s$  (угловая координата максимума излучения, приходящего в точку наблюдения):

$$\begin{aligned} \tau_p(\bar{\Psi}_s + \Delta\bar{\Psi}) &\approx \tau_p(\bar{\Psi}_s) + (\Delta\bar{\Psi}\bar{V})\tau_p(\bar{\Psi}_s) = \\ &= \tau_0\left(1 + \frac{1}{2}\Psi_s^2\right) + \tau_0\bar{\Psi}_s\Delta\bar{\Psi}, \end{aligned}$$

где  $\Delta\bar{\Psi} = \bar{\Psi} - \bar{\Psi}_s$ . После упрощений получим следующее пространственно-временное распределение яркости источника:

$$\begin{aligned} I_p^{(0)}(\Delta\bar{\Psi}, \tau') &\approx \frac{\tilde{J}_0}{2\pi\Psi_0^2} h(\tau' - \tau_0\bar{\Psi}_s\Delta\bar{\Psi})(\tau' - \tau_0\bar{\Psi}_s\Delta\bar{\Psi}) \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{\Delta\Psi^2}{2\Psi_0^2} - \frac{1}{2}(\tau' - \tau_0\bar{\Psi}_s\Delta\bar{\Psi})^2\right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $\tau' = \tau - \tau_0(1 + 1/2\Psi_s^2)$ . Проинтегрировав (19) по  $\Delta\bar{\Psi}$  в бесконечных пределах, найдем невозмущенную кривую блеска источника:

$$\begin{aligned} J_p^{(0)} &\approx \frac{\tilde{J}_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\eta}{1 + \eta^2} \exp\left(-\frac{\tau'^2}{2\eta^2}\right) \left\{1 + \frac{\sqrt{\pi}\tau'}{\eta\sqrt{2(1 + \eta^2)}} \times \right. \\ &\times \exp\left(\frac{\tau'^2}{2\eta^2(1 + \eta^2)}\right) \left. \left[1 + \Phi\left(\frac{\tau'}{\eta\sqrt{2(1 + \eta^2)}}\right)\right]\right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

где  $\eta = \Psi_0\Psi_s\tau_0$ . Из сравнения распределений (15) и (20) видно, что действие эффекта ГЛ сводится к следующему. Кривая блеска наблюдаемого  $i$ -го изображения (15) формируется из невозмущенной  $J_p^{(0)}(\tau')$  умножением последней на фактор усиления  $q_i$ , а также путем замен: параметра  $\eta$  на  $1/\sqrt{R_i}$  ( $\eta \rightarrow 1/\sqrt{R_i}$ ) и безразмерного времени  $\tau$  на  $\tau'_i$  ( $\tau \rightarrow \tau'_i$ ). Большим значениям параметра  $R_i$  ( $R_i \gg 1$ ) соответствуют малые величины  $\eta$  ( $\eta \ll 1$ ). В этом случае формула (20) упрощается и принимает следующий вид:

$$J_p^{(0)}(\tau') \approx \tilde{J}_0\tau' \exp\left(-\frac{1}{2}\tau'^2\right), \quad \tau' > 0. \quad (21)$$

Из сравнения (21) с ранее найденным асимптотическим представлением (17) видно, что в случае  $R_i \gg 1$  кривые блеска изображений отличаются от невозмущенной кривой источника (21) лишь множителями  $q_i$  и соответствующей сдвижкой во времени ( $\tau' \rightarrow \tau'_i$ ). Однако следует заметить, что такое простое действие эффекта ГЛ наблюдается лишь при условии  $R_i \gg 1$ . При небольших значениях  $R_i$  ( $R_i < 1$ ) линза будет деформировать невозмущенную кривую блеска источника. Кроме того, из-за существующих различий между  $R_i$  величины деформаций будут различными для разных изображений. Более существенные деформации наблюдаются в том случае, когда изображения источника располагаются вблизи критических кривых линзы. На рис. 2 приведены зависимости  $Q(\tau') = \sqrt{2\pi}J_p(\tau')/\tilde{J}_0q$  при различных значениях параметра  $R$ .

В качестве примера в работе рассматривалась фокусировка излучения квазара гравитационной линзой Q2237+0305. Для данной ГЛ вблизи ядра спиральной галактики ( $Z_L \approx 0.04$ ) в пределах круга диаметром  $\approx 2''$  наблюдаются четыре изображения квазара ( $Z_S \approx 1.7$ ), расположенных в виде креста (“крест Эйнштейна”). Согласно наблюдениям галактику можно представить в виде суммы двух составляющих, одна из которых является компактным массивным ядром, а вторая – протя-

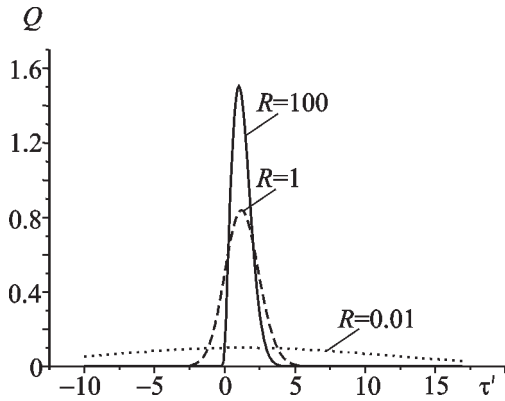


Рис. 2. График зависимости  $Q(\tau') = \sqrt{2\pi} J_p(\tau') / \tilde{J}_0 q$  при различных значениях параметра  $R$

женным диском [4]. Для получения численных оценок модель регулярной составляющей ГЛ рассматривалась в виде суммы “точечной” массы (ядра галактики) и протяженного дискового компонента, центры которых совмещены. В системе координат, начало которой помещено в совмещенные центры масс ядра и диска, а оси  $OX$  и  $OY$  совпадают с главными осями симметрии дискового компонента, уравнение линзы вблизи центра галактики может быть записано в следующем виде [5]:

$$\vec{v}_s = \vec{v} \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right) + \alpha v_x \vec{e}_x - \alpha v_y \vec{e}_y = \vec{F}_1(\vec{v}). \quad (22)$$

Здесь безразмерные координаты  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_s$  определяются в единицах нормировочного угла  $\psi_l \approx 0,88$  (угловой радиус “кольца Эйнштейна” для ГЛ Q2237+0305),  $a \approx 0.138$  – параметр асимметрии, вносимой вблизи центра галактики дисковым компонентом.

Согласно теории ГЛ уравнение критической кривой линзы  $\vec{v} = \vec{v}_{cr}$  определяется из условия равенства нулю якобиана преобразования от переменных  $\vec{v}_s$  к переменным  $\vec{v}$  (см., например, [2]):

$$\left| \frac{\partial(v_{sx}, v_{sy})}{\partial(v_x, v_y)} \right| = 0.$$

С учетом уравнения линзы (22), в полярных координатах  $\vec{v}_{cr} = (v_{cr}, \varphi)$ , где азимутальный

угол  $\varphi$  отсчитывается от положительного направления оси  $OX$ , получим [5]:

$$v_{cr}(\varphi) = \left( \frac{\alpha \cos 2\varphi + \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 2\varphi}}{1 - \alpha^2} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Вид критической кривой (23) приведен на рис. 3. Там же показаны положения четырех изображений квазара, обозначенных как  $A, B, C, D$ . Нормированные на величину  $\psi_l$  координаты компонентов  $A, B, C, D$ , полученные по результатам наблюдений Q2237+0305 [6], приведены в табл. 1.

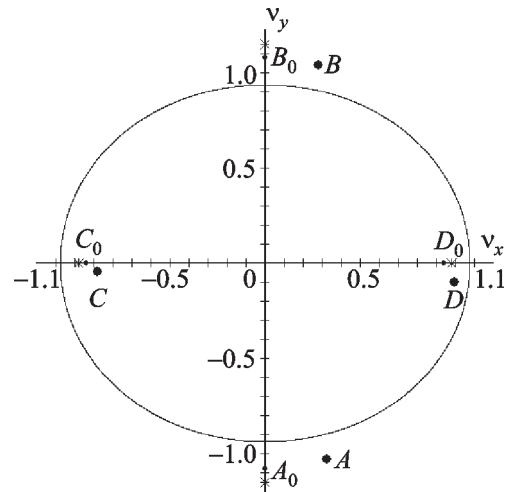


Рис. 3. Вид критической кривой ГЛ (сплошная линия) и положение четырех наблюдаемых изображений источника  $A, B, C, D$  (•) для выбранной модели ГЛ Q2237+0305:

• – положения компонентов  $A_0, B_0, C_0, D_0$  при центральном расположении источника ( $\vec{v}_s = 0$ );  
 × – координаты точек с минимальным временем запаздывания  $\tau_p(\vec{v})$

Таблица 1

Наблюдаемое изображение	$v_x$	$v_y$
A	0.325	-1.031
B	0.279	1.041
C	-0.880	-0.044
D	0.994	-0.099
Ядро	0.000	0.000



Время задержки сигнала  $\tau_p(\vec{v})$  для выбранной модели ГЛ, с точностью до несущественной аддитивной добавки:

$$\tau_p(\vec{v}) = \tau_0 + \tau_g \left\{ \frac{z_s}{2\tilde{z}} \left[ (1 + \alpha^2) v^2 - 2 + \frac{1}{v^2} + 2\alpha \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right) (v_x^2 - v_y^2) \right] - \frac{v^2}{2} + 1 - \ln v - \frac{\alpha}{2} (v_x^2 - v_y^2) \right\}, \quad (24)$$

где  $\tau_g = 2r_g/cT_s$ ,  $r_g \sim 3 \cdot 10^9 \div 3 \cdot 10^{10}$  км – гравитационный радиус ядра галактики, а  $z_s/\tilde{z} \approx 10$  – относительное расстояние [7]. Легко показать, что в распределении (24) имеются четыре точки, в которых  $\tau_p(\vec{v})$  принимает минимальные значения. Для параметров  $\alpha = 0.138$  и  $z_s/\tilde{z} = 10$  координаты этих точек соответственно равны:

$$v_{1,3} = \sqrt{\frac{z_s}{z_s(1+\alpha) - \tilde{z}}} \approx 0.98, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_3 = \pi; \quad (25)$$

$$v_{2,4} = \sqrt{\frac{z_s}{z_s(1-\alpha) - \tilde{z}}} \approx 1.15, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Представляет интерес сопоставить полученные значения  $\vec{v}_i$  с положениями изображений “креста”  $A_0, B_0, C_0, D_0$  при центральном положении источника излучения ( $\vec{v}_s = 0$ ). Положив в (22)  $\vec{v}_s = 0$ , получим:

$$v_{A,B}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \approx 1.08, \quad \varphi_A^{(0)} = \frac{3\pi}{2}, \quad \varphi_B^{(0)} = \frac{\pi}{2};$$

$$v_{C,D}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \approx 0.94, \quad \varphi_C^{(0)} = \pi, \quad \varphi_D^{(0)} = 0.$$

Координаты точек минимумов функции  $\tau_p(\vec{v})$  и четырех изображений креста при центральном положении источника представлены на рис. 3. Наличие минимумов  $\tau_p(\vec{v})$  говорит о том, что временные изменения, происходящие в источнике, будут регистрироваться в наблюдаемых изображениях вначале в направлении точек (25), а затем уже и в самих изображениях  $A, B, C, D$ .

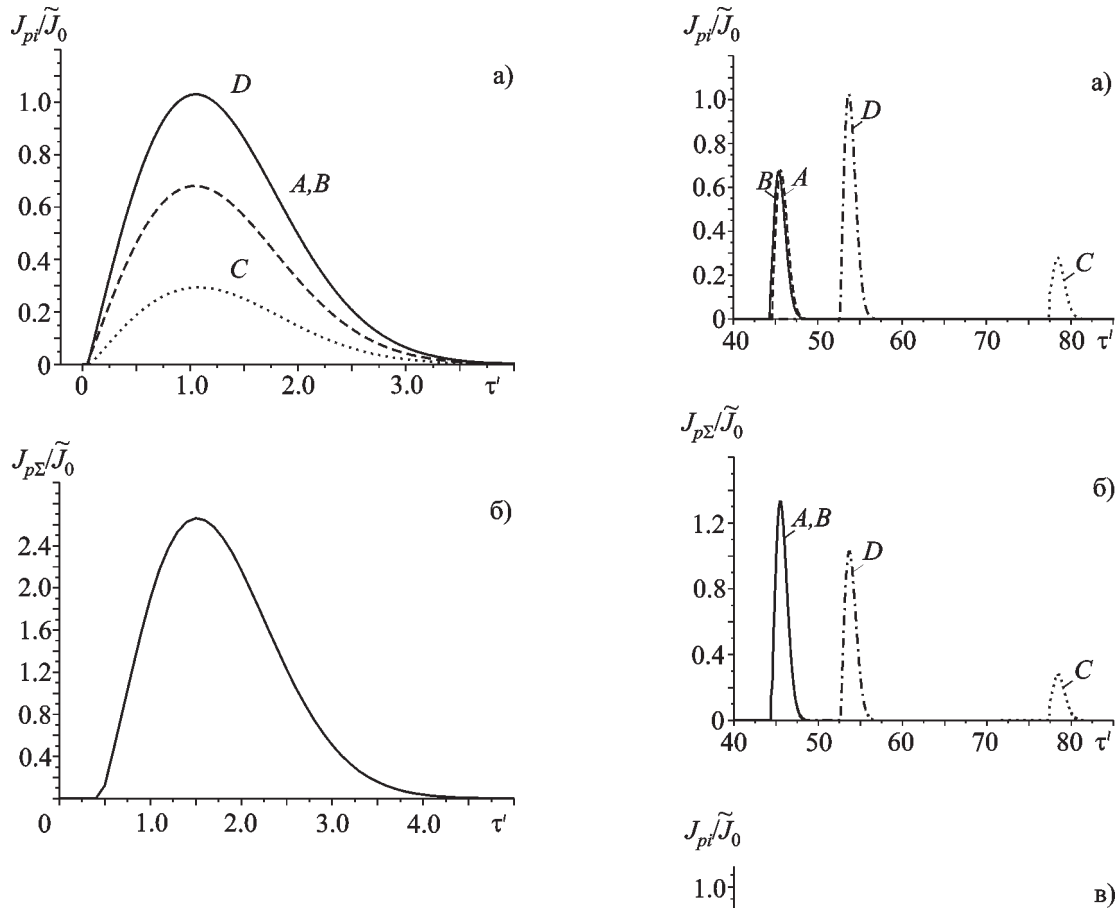
Для найденной зависимости  $\tau_p(\vec{v})$  (24) безразмерный параметр  $H_i$  (16) может быть представлен как  $H_i = \tau_g^2 \gamma(\vec{v}_i)$ , где  $\gamma(\vec{v}_i) = \gamma_i = H_i/\tau_g^2$  не зависит от  $\tau_g$  и определяется только величиной параметра  $\alpha$ , относительным расстоянием  $z_s/\tilde{z}$  и безразмерными координатами четырех изображений.

Для заданных положений четырех изображений были найдены соответствующие значения параметров  $q_i, \gamma_i$  и  $\beta_i = [\tau_p(\vec{v}_i) - \tau_0]/\tau_g$  ( $i = A, B, C, D$ ). Результаты вычислений представлены в табл. 2.

Таблица 2

Наблюдаемые изображения	$q_i$	$\gamma_i$	$\beta_i$
A	2.261	0.251	0.446
B	2.244	0.258	0.443
C	0.969	5.21	0.774
D	3.395	0.015	0.526

Дальнейшие расчеты проводились для значения относительного углового размера источника  $v_0 \approx 10^{-3}$  и трех значений параметра  $\tau_g = 0.1; 100; 600$ . На рис. 4 представлены отдельные  $J_{pi}(\tau'_i)$  (рис. 4, а) и суммарная  $J_{p\Sigma}(\tau) = \sum J_{pi}(\tau'_i)$  (рис. 4, б) кривые блеска изображений источника для случая  $\tau_g = 0.1$ . Видно, что при малых значениях  $\tau_g$  по суммарной кривой блеска невозможно обнаружить присутствие отдельных изображений. С ростом величины  $\tau_g$  ( $\tau_g = 100$ ,



**Рис. 4.** Раздельные (а) и суммарная (б) кривые блеска изображений источника, наблюдаемых через ГЛ при значении параметра  $\tau_g = 0.1$

рис. 5) в суммарной кривой блеска (рис. 5, б) уже различается присутствие компонентов  $AB$ ,  $D$  и  $C$ , однако компоненты  $A$  и  $B$  (рис. 5, в) еще не разделяются. Только при достаточно больших значениях  $\tau_g$  ( $\tau_g = 600$ , рис. 6, а) появляется возможность разделения компонентов  $A$  и  $B$  в суммарной кривой блеска (рис. 6, б).

Рассмотренные выше кривые блеска относились лишь к импульсной составляющей в излучении источника (квазара). В действительности излучение представляет собой сумму стационарной и импульсной составляющих. В этом случае, с учетом (21), невозмущенная кривая блеска источника, регистрируемая в точке наблюдения, имела бы следующий вид:

$$J_{p\Sigma}^{(0)}(\tau') = J_s + \tilde{J}_0 \tau' \exp\left(-\frac{1}{2} \tau'^2\right).$$

Здесь  $J_s = \text{const}$  – стационарная составляющая излучения источника. В результате фокусировки в точке наблюдения будет регистрироваться следующая зависимость сум-

**Рис. 5.** Раздельные (а, в) и суммарная (б) кривые блеска изображений источника, наблюдаемых через ГЛ при значении параметра  $\tau_g = 100$

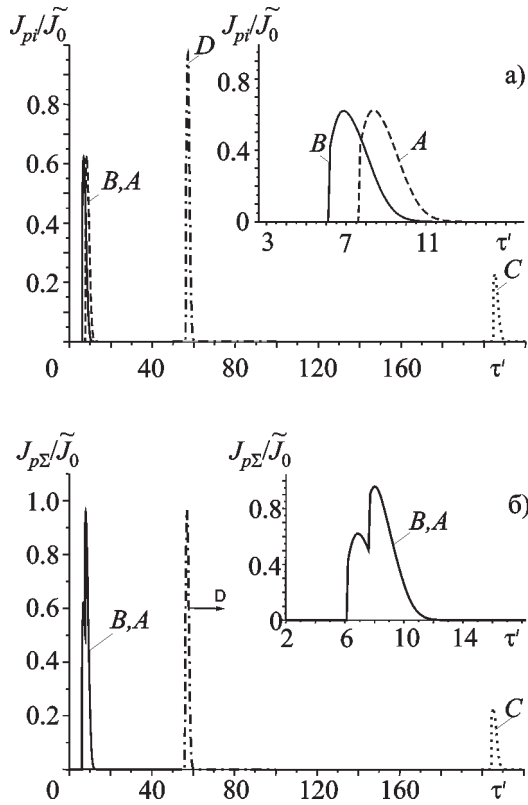


Рис. 6. Раздельные (а) и суммарные (б) кривые блеска изображений источника при значении параметра  $\tau_g = 600$

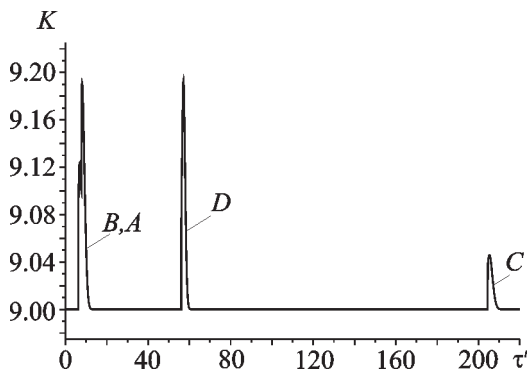


Рис. 7. Зависимость относительного изменения блеска  $K(\tau') = J_{p\Sigma}(\tau')/J_s$  при  $\tilde{J}_0/J_s = 0.2$  и  $\tau_g = 600$

марного блеска четырех изображений от времени:

$$J_{p\Sigma}(\tau') = q_\Sigma J_s + \tilde{J}_0 \sum_i q_i \tau'_i \exp\left(-\frac{1}{2} \tau'^2_i\right) = J_s \left[ q_\Sigma + \frac{\tilde{J}_0}{J_s} \sum_i q_i \tau'_i \exp\left\{-\frac{1}{2} \tau'^2_i\right\} \right],$$

где  $q_\Sigma = \sum q_i \approx 8.9$  – суммарный коэффициент усиления всех четырех изображений источника Q2237+0305. На рис. 7 представлена зависимость относительного изменения блеска  $J_{p\Sigma}(\tau')/J_s$  в предположении, что величина  $\tilde{J}_0/J_s = 0.2$ , и при значении параметра  $\tau_g = 600$ .

### Обсуждение результатов и выводы

В результате рассмотрения фокусировки излучения протяженного в пространстве и переменного во времени источника гравитационной линзой с произвольным распределением массы можно сделать следующие выводы.

Для гауссова источника с характерным угловым размером  $\Psi_0$  и угловой координатой максимума излучения  $\tilde{\Psi}_s$ , излучающего импульс длительностью  $T_s$ , невозмущенная кривая блеска  $J_p^{(0)}(\tau)$  как функция безразмерного времени  $\tau = t/T_s$  зависит от величины параметра  $\eta = \Psi_0 \tilde{\Psi}_s \tau_0$ , где  $\tau_0$  – безразмерное время распространения сигнала между плоскостями источника и наблюдателя.

Если в результате эффекта фокусировки ГЛ наблюдаются несколько изолированных изображений источника, то вид кривой блеска отдельного изображения  $J_p(\tau')$  будет зависеть от величины параметра  $R$ , который одновременно учитывает геометрию задачи ( $z_p$  и  $z_s$  – расстояния от наблюдателя и источника до ГЛ соответственно), параметры ГЛ (суммарная масса и её распределение внутри линзы), а также параметры источника ( $\Psi_0, \tilde{\Psi}_s, T_s$ ). Кривая блеска изображения  $J_p(\tau', R)$  формируется из невозмущенной

кривой источника  $J_p^{(0)}(\tau, \eta)$  умножением последней на фактор усиления изображения  $q$ , а также заменой параметра  $\eta$  на  $1/\sqrt{R}$  ( $\eta \rightarrow 1/\sqrt{R}$ ) и безразмерного времени  $\tau$  на  $\tau'$  ( $\tau \rightarrow \tau'$ ), где  $\tau'$  учитывает запаздывание сигнала, приходящего от наблюдаемого изображения. Для рассмотренной модели ГЛ Q2237+0305 (линза с квадруполем) величину параметра  $R$  можно оценить как  $R \sim (v_0 \tau_g)^{-2}$ , где  $v_0 = \Psi_0/\Psi_l$  – угловой размер источника в единицах углового радиуса “кольца Эйнштейна”  $\Psi_l$ , а  $\tau_g = 2r_g/cT_s$  ( $r_g$  – гравитационный радиус ядра галактики).

В случае  $R \gg 1$  ( $v_0 \tau_g \ll 1$ , “маленький” источник излучения, “слабая” линза или “длинный” импульс) кривая блеска изображения  $J_p(\tau', R)$  перестает зависеть от  $R$  и отличается от невозмущенной кривой источника  $J_p^{(0)}(\tau)$  лишь множителем  $q$  при соответствующей сдвиге во времени ( $\tau \rightarrow \tau'$ ).

При небольших значениях  $R$ , когда  $R < 1$  ( $v_0 \tau_g > 1$ , “протяженный” источник излучения, “сильная” линза или “короткий” импульс), необходимо учитывать сглаживающее действие линзы. Из-за существующих отличий между  $R_i$  величины деформаций будут различными для наблюдаемых изображений.

Анализ эффекта фокусировки для ГЛ с произвольным распределением массы позволяет утверждать, что ГЛ работает подобно низкочастотному фильтру, пропуская без искажения низкие частоты (медленные вариации) и подавляя высокие частоты (быстрые вариации).

Характерные времена изменений яркости источника  $T_s$ , при которых необходимо учитывать сглаживающее действие ГЛ, можно

определить как  $T_s < \frac{r_g}{c} v_0$  ( $v_0 \tau_g < 1$ ). Например, для регулярной модели ГЛ Q2237+0305, считая, что масса ядра галактики  $M \sim 10^{10} M_\odot$  ( $r_g \sim 3 \cdot 10^{10}$  км) и характерный угловой размер источника (квазара) в оптическом диапазоне равен  $v_0 \sim 10^{-4}$ , получим оценку  $T_s < 10$ . Из наблюдений “креста Эйнштейна” в ИК диапазоне [8] величина  $v_0$

была оценена как  $10^{-5} < v_0 < 10^{-1}$ . Положив  $v_0 \sim 10^{-2}$ , получим оценку  $T_s < 10^3$  с.

Предварительный анализ показывает, что более существенные деформации кривых блеска будут наблюдаться для изображений, расположенных вблизи критических кривых линзы. В дальнейшем предполагается провести анализ этого явления для источника, расположенного вблизи гладкой каустики или ее “клюва”.

Авторы выражают благодарность В. Г. Вакулику за помощь, оказанную при подготовке рукописи.

## Литература

1. А. А. Минаков, Ю. И. Нечаев. Радиопизика и радиоастрономия. 1998, **3**, №3, с. 277-283.
2. П. В. Блюх, А. А. Минаков. Гравитационные линзы. Киев, Наукова думка, 1989, 240 с.
3. А. Ф. Захаров. Гравитационные линзы и микролинзы. Москва, Янус-К, 1997, 328 с.
4. J. Wambsganss, B. Paczynski. Astron. J. 1994, **108**, No. 4, pp. 1156-1162.
5. А. А. Минаков, В. Н. Шаляпин. Письма в АЖ. 1991, **17**, №4, с. 331-340.
6. P. Crane et al. Astrophys. J. 1991, **369**, No. 2, pp. L59-L61.
7. R. Kayser, S. Refsdal, R. Stabell. Astron. Astrophys. 1986, **166**, No. 1/2, pp. 36-52.
8. E. Agol, B. Jones, O. Blaes. Astrophys. J. 2000, **545**, No. 2, pp. 657-663.

## Radiation Focusing of a Source Extended in Space and Variable in Time by Gravitational Lens with Arbitrary Mass Distribution

A. A. Minakov, S. A. Vasylyev,  
L. M. Rabinowicz

Peculiarities of focusing the radiation of a source extended in space and variable in time, in the gravitational field of a galaxy with an arbitrary mass distribution are examined. The effect of lensing is shown to result in a complicated deformation of lightcurves of the source images, formed by the gravitational lens. The

amount of deformation depends both on the typical parameters of mass distribution inside the lens, and on the source parameters such as the linear dimension of the emitting region and its location with respect to the lens critical curves

as well as the impulse duration. To derive the numerical estimates, a model of Q2237+0305 has been investigated as an example consisting of a compact massive nucleus and an extended disc component.