Радиофизика и радиоастрономия, 2000, т. 5, №2, стр. 206-210

УДК 621.396.96

Текущее оценивание информативных параметров сигнала со случайными начальной фазой и амплитудой на фоне помех

В. П. Рябуха, В. А. Таршин

Харьковский военный университет
310043, г. Харьков, пл. Свободы, 6

Статья поступила в редакцию 15 июля 1999 г., после переработки 13 декабря 1999 г.

Рассматриваются два алгоритма текущего оценивания информативных параметров сигнала, основанные на усреднении отношения правдоподобия по неинформативным параметрам и предварительной максимизации отношения правдоподобия по этим параметрам. Сравнивается эффективность алгоритмов в условиях помех.

Розглядаються два алгоритми текучого оцінювання інформативних параметрів сигналу, що грунтуються на усередненні відношення правдоподібності за неінформативними параметрами та попередній максимізації відношення правдоподібності за цими параметрами. Порівнюється ефективність алгоритмів в умовах завад.

Задача практической обработки принимаемых сигналов в полном пространстве параметров довольно сложна. Для этого стараются получить достаточную статистику малой размерности, зависящую только от основных (информативных) параметров сигналов. Ниже рассмотрены пути получения отношений правдоподобия и их логарифмов, используемых для текущего оценивания информативных параметров сигналов со случайными амплитудой и начальной фазой на фоне помех. Целью данной статьи является проведение сравнительной оценки эффективности алгоритмов измерения информативных параметров, полученных путем усреднения по случайным амплитуде и начальной фазе, а также путем максимизации отношения правдоподобия по этим параметрам.

Для активной РЛС с антенной решеткой (АР) в вектор-столбец параметров сигнала $\vec{\lambda} = \|b \quad \beta \quad t_з \quad F_д \quad \Theta\|^{\mathrm{T}}$ входят следующие составляющие: b – амплитуда, β – начальная фаза, $t_з$ – время запаздывания, $F_д$ – доплеровское смещение частоты, Θ – сдвиг фаз сигнала в соседних элементах АР (т – знак транспонирования матрицы).

Оптимальная точечная оценка $\hat{\vec{\lambda}}$ (знак ^ означает оценку) соответствует максимуму послеопытной плотности вероятности [1].

Если априорные данные отсутствуют, то оптимальная оценка может быть найдена из условия максимума отношения правдоподобия (ОП) [1]:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} L(\vec{\lambda}) = 0 \qquad \text{при} \qquad \vec{\lambda} = \hat{\vec{\lambda}}, \tag{1}$$

где λ_i – i -й элемент вектора параметров сигнала $\vec{\lambda}$ или логарифма отношения правдоподобия (ЛОП) $\ln L(\vec{\lambda})$:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \ln L(\vec{\lambda}) = 0 \qquad \text{при} \qquad \vec{\lambda} = \hat{\vec{\lambda}}. \tag{2}$$

Оценки $\hat{\vec{\lambda}}$, определяемые в соответствии с (1) или (2), называют оценками максимального правдоподобия (МП), а оценивание вида (1) или (2) – текущим оцениванием (измерением).

Отношение правдоподобия $L(\vec{\lambda}) = L(\vec{\alpha}, b, \beta)$ определяется следующим равенством [1]:

$$L(\vec{\alpha}, b, \beta) = \exp\left[-b^2 \frac{q^2(\vec{\alpha})}{2}\right] \times$$
$$\times \exp\left[bq(\vec{\alpha})\left|\dot{Z}_н(\vec{\alpha})\right| \cos\left(\beta - \arg \dot{Z}_н(\vec{\alpha})\right)\right], \tag{3}$$

где $\left|\dot{Z}_н(\vec{\alpha})\right| = \left|\dfrac{\dot{Z}(\vec{\alpha})}{q(\vec{\alpha})}\right|$ – модуль нормированного комплексного весового интеграла;

$\dot{Z}(\vec{\alpha}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{Y}}^{\mathrm{T}}(t) \vec{R}^*(t, \vec{\alpha}) \mathrm{d}t$ – комплексный весовой интеграл;

© В. П. Рябуха, В. А. Таршин, 2000

$q^2(\vec{\alpha})=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{\vec{X}}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\vec{R}}^{*}(t,\vec{\alpha})\mathrm{d}t$ – энергетический параметр ожидаемого сигнала; $\dot{\vec{R}}(t,\vec{\alpha})$ – весовой вектор, определяемый из интегрально-матричного уравнения

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{\vec{\Phi}}(t-s)\dot{\vec{R}}^{*}(t,\vec{\alpha})\mathrm{d}t=\dot{\vec{X}}(t,\vec{\alpha})$, $\dot{\vec{\Phi}}(t-s)$ – корреляционная матрица-функция комплексных амплитуд помех; $\dot{\vec{Y}}(t),\dot{\vec{X}}(t,\vec{\alpha})$ – вектор-столбцы комплексных амплитуд принимаемой реализации и ожидаемого сигнала соответственно.

В векторе параметров сигнала $\vec{\lambda}$ выделим вектор информативных параметров $\vec{\alpha}=\|\Theta \quad F_{\text{д}} \quad t_{\text{з}}\|^{\mathrm{T}}$ и вектор неинформативных параметров $\vec{\beta}=\|b \quad \beta\|^{\mathrm{T}}$. Заметим, однако, что амплитуда b может включаться и в вектор информативных параметров, поскольку косвенно определяет геометрические размеры цели. Кроме того, информация об амплитуде сигнала позволяет оценить отношение "сигнал/помеха" на выходе устройства оптимальной обработки и среднеквадратичную ошибку измерения информативных параметров $\vec{\alpha}$.

Рассмотрим задачу текущего оценивания информативных параметров отраженного квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовых помех с произвольной функцией корреляции.

Оценка максимального правдоподобия, используемая при текущем измерении информативного векторного параметра $\vec{\alpha}$, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\ln L(\vec{\alpha})=0 \qquad \text{при} \qquad \vec{\alpha}=\hat{\vec{\alpha}}. \tag{4}$$

Здесь α_i – i-й элемент вектора информативных параметров сигнала $\vec{\alpha}$, а $L(\vec{\alpha})$ – отношение правдоподобия, зависящее от информативных параметров. Следовательно, необходимо от $L(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ (см. (3)) перейти к $L(\vec{\alpha})$, т. е. исключить зависимость ОП от b и β.

Для получения $L(\vec{\alpha})$ рассмотрим два подхода. Первый подход основан на знании априорного распределения вектора неинформативных параметров $p(\vec{\beta})$ и статистическом усреднении ОП $L(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ по случайным неинформативным параметрам [1]:

$$L(\vec{\alpha})=\int\limits_{\vec{\beta}}L(\vec{\alpha},\vec{\beta})p(\vec{\beta})\,\mathrm{d}\vec{\beta}. \tag{5}$$

Если $p(\vec{\beta})$ неизвестно, то усреднение (5) может быть заменено интегрированием $L(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ по параметру $\vec{\beta}$ [2].

Второй подход не требует знания априорной плотности вероятности $p(\vec{\beta})$. Он основан на нахождении таких значений β и b, при которых ОП или ЛОП как функции от β и b достигают максимума, и подстановке этих значений в $L(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ или $\ln L(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ [3,4]. При этом зависимость ОП от β и b исключается. Отметим, что этот подход эквивалентен получению совместных оценок параметров $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ методом максимального правдоподобия [3], но его реализация проще, чем реализация совместного оценивания.

Проведем сравнение двух подходов при измерении на фоне помех информативных параметров сигнала с равновероятным распределением фазы

$$p(\beta)=1/2\pi, \qquad \beta=\overline{0,2\pi} \tag{6}$$

и рэлеевским распределением амплитуды

$$p(b)=2b\exp\{-b^2\} \tag{7}$$

Вначале получим ОП $L(\vec{\alpha})$ при усреднении $L(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ по параметрам β и b. Для этого воспользуемся результатами работы [1]. Предположение независимого распределения начальной фазы β и амплитуды b позволяет провести в (5) интегрирование сначала по β, затем по b.

Для этого подставим уравнения (3) и (6) в (5) и получим:

$$L(\vec{\alpha},b)=\exp\left(-b^2\frac{q^2(\vec{\alpha})}{2}\right)I_0\left(bq(\vec{\alpha})\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|\right). \tag{8}$$

Здесь $I_0\left(bq(\vec{\alpha})\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|\right)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Используя выражения (5), (7), (8), усредним $L(\vec{\alpha},b)$ по случайному параметру b и перейдем к $L(\vec{\alpha})$:

$$L(\vec{\alpha})=\frac{1}{1+q^2(\vec{\alpha})/2}\exp\left[\frac{q^2(\vec{\alpha})\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|^2}{4\left(1+q^2(\vec{\alpha})/2\right)}\right], \qquad (9)$$

а также к логарифму ОП:

$$\ln L(\vec{\alpha})=\frac{q^2(\vec{\alpha})\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|^2}{4\left(1+\frac{q^2(\vec{\alpha})}{2}\right)}-\ln\left(1+\frac{q^2(\vec{\alpha})}{2}\right). \qquad (10)$$

Заметим, что при усреднении информация об амплитуде b теряется. В то же время, как отмечалось ранее, параметр b может быть отнесен к информативным.

Далее рассмотрим второй подход. Логарифмируя (3), перейдем к ЛОП:

$$\ln L(\vec{\alpha},\vec{\beta})=$$
$$=\left[bq(\vec{\alpha})\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|\cos\left(\beta-\arg\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right)\right]-b^2\frac{q^2(\vec{\alpha})}{2}. \qquad (11)$$

Из уравнения максимального правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln L(\vec{\alpha},\vec{\beta})=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[bq(\vec{\alpha})\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|\cos\left(\beta-\arg\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right)\right]-b^2\frac{q^2(\vec{\alpha})}{2}=0, \qquad (12)$$

найдем значение β, при котором ЛОП достигает максимума,

$$\beta=\arg\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha}). \qquad (13)$$

Подставим это значение в (11) и получим:

$$\ln L(\vec{\alpha},b)=bq(\vec{\alpha})\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|-b^2\frac{q^2(\vec{\alpha})}{2}. \qquad (14)$$

Теперь перейдем от $L(\vec{\alpha},b)$, определяемого выражением (14), к $L(\vec{\alpha})$. Значение b, при котором $\ln L(\vec{\alpha},b)$ достигает максимума, определяется путем решения уравнения максимального правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial b}\ln L(\vec{\alpha},b)=\frac{\partial}{\partial b}\left\{\left[bq(\vec{\alpha})\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|\right]-b^2\frac{q^2(\vec{\alpha})}{2}\right\}=0 \qquad (15)$$

и равняется

$$b=\left|\dot{Z}(\vec{\alpha})\right|/q^2(\vec{\alpha}). \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (14), получим выражение для ЛОП:

$$\ln L(\vec{\alpha})=\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|/2. \qquad (17)$$

Текущая оценка $\hat{\vec{\alpha}}$ определяется аргументом максимума логарифма ОП (модуля нормированного весового интеграла). При этом может оцениваться и амплитудный множитель b, который принимает значение (см. (16))

$$\hat{b}=\left|\dot{Z}\left(\hat{\vec{\alpha}}\right)\right|/q^2\left(\hat{\vec{\alpha}}\right), \qquad (18)$$

т. е. при втором подходе информация о параметре b сохраняется, а ожидаемый сигнал по параметру b не варьируется.

Таким образом, при усреднении ОП по неинформативным параметрам β ЛОП имеет вид (см. (10)):

$$\ln L_1(\vec{\alpha})=\frac{q^2(\vec{\alpha})\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|^2}{4\left(1+\frac{q^2(\vec{\alpha})}{2}\right)}-\ln\left(1+\frac{q^2(\vec{\alpha})}{2}\right), \qquad (19а)$$

а при предварительной максимизации ОП по параметрам β выражение для ЛОП записывается следующим образом (см. (17)):

$$\ln L_2(\vec{\alpha})=\frac{\left|\dot{Z}_{\text{н}}(\vec{\alpha})\right|^2}{2}. \qquad (20а)$$

В свою очередь, алгоритмы текущего оценивания информативных параметров определяются соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\ln L_1(\vec{\alpha})=0, \qquad \vec{\alpha}=\hat{\vec{\alpha}}; \qquad (19б)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\ln L_2(\vec{\alpha})=0, \qquad \vec{\alpha}=\hat{\vec{\alpha}}. \qquad (20б)$$

Сравнение алгоритмов проведем на примере текущего измерения только угловой координаты цели в условиях воздействия активных шумовых помех (АШП).

Пусть цель и один источник АШП имеют малые угловые различия, т. е. одновременно находятся в главном лепестке диаграммы направленности (ДН) приемной линейной эквидистантной АР с числом элементов $M=10$. Ожидаемый угловой параметр сигнала обозначим $\psi = \frac{M\Theta}{2\pi}$ и выразим в долях полуширины ДН АР по нулевому уровню.

На рис. 1 приведены усредненные по $N=75$ реализациям зависимости ЛОП от ψ (кривая 1 – для (19а), кривая 2 – для (20а)). Стрелками показаны направления прихода сигнала $(\psi = 0)$ и помехи $(\psi_п = 0.5)$ и представлено значение "сигнал/помеха" по напряжению $\tilde{q}$ на выходе устройства оптимальной обработки.

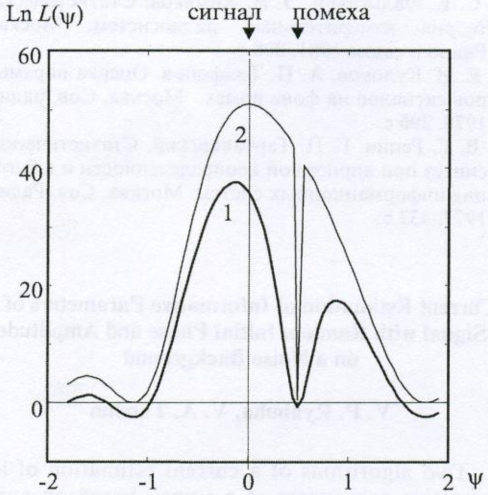

Рис. 1. *Зависимость логарифма отношения правдоподобия от ожидаемого углового параметра сигнала ψ при воздействии источника помех в направлении главного лепестка ДН, N=75, $\tilde{q}\,(\psi = 0) = 6.3$*

Из рис. 1 видно, что $\ln L(\psi)$ практически равен нулю в направлении на источник помехи. Это означает, что в этом направлении прием электромагнитных волн отсутствует, т. е. помеха подавлена. Однако максимум ЛОП для (19а), в отличие от (20а), не совпадает с направлением на цель. Это приводит к смещению оценки, т. е. к возникновению систематической ошибки измерения углового параметра. В связи с этим отметим, что смещение или несмещенность оценки – это один из критериев, по которому проверяются оценки максимального правдоподобия, используемые при текущем измерении [1,4]. Исследования показали, что такое смещение имеет место при разности угловых направлений на источник сигнала $(\psi = 0)$ и источник помехи $\Delta\psi \le 1$.

Наличие систематической ошибки измерения углового параметра для алгоритма (19а), (19б) характерно и для ситуаций, когда в области главного лепестка ДН АР источник помехи отсутствует, но в направлении боковых лепестков оказывают воздействие несколько источников помех. Так на рис. 2 показаны зависимости $\ln L(\psi)$ для случая, когда в области первого бокового лепестка ДН АР

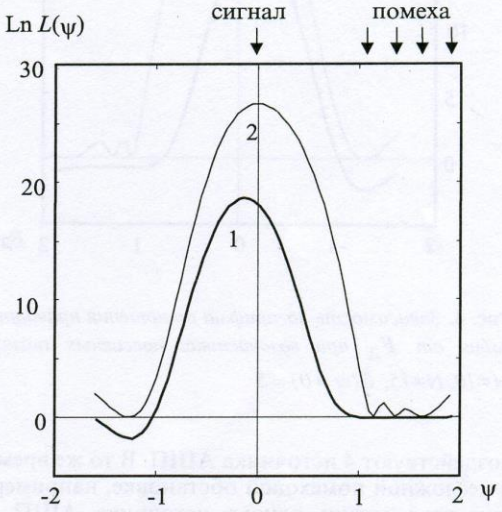

Рис. 2. *Зависимость логарифма отношения правдоподобия от ожидаемого углового параметра сигнала ψ в сложной помеховой обстановке. N=75, $\tilde{q}\,(\psi = 0) = 5.8$*

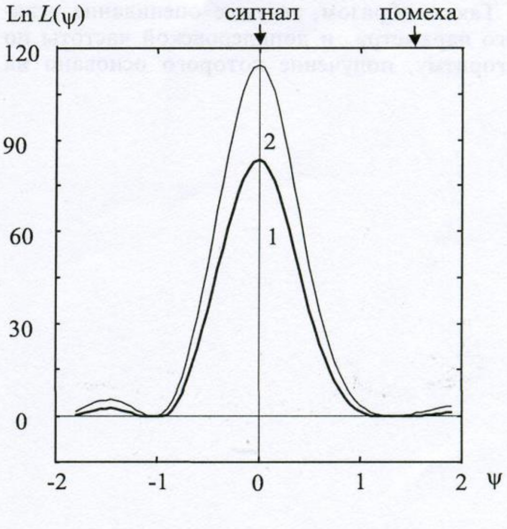

Рис. 3. *Зависимость логарифма отношения правдоподобия от ожидаемого углового параметра сигнала ψ при воздействии источника помех в направлении бокового лепестка ДН, N=75, $\tilde{q}\,(\psi = 0) = 9.6$*

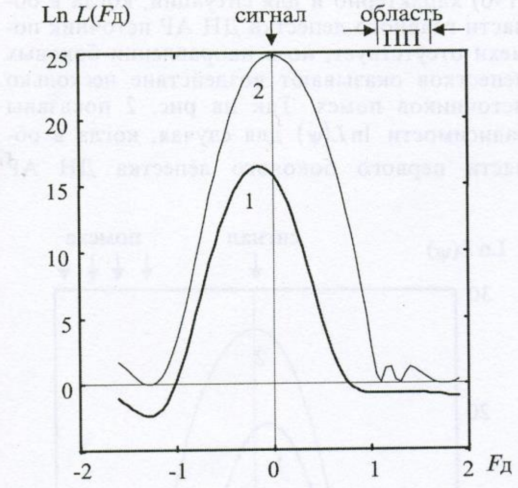

Рис. 4. *Зависимость логарифма отношения правдоподобия от $F_Д$ при воздействии пассивных помех, $M=10$, $N=75$, $\tilde{q}(\psi=0)=5$*

воздействуют 4 источника АШП. В то же время в несложной помеховой обстановке, например, при воздействии одного источника АШП в направлении бокового лепестка, смещение оценки отсутствует (рис. 3).

Аналогичные результаты имеют место при текущем измерении допплеровской частоты $F_Д$ отраженного сигнала (когерентной пачки из $M=10$ радиоимпульсов) на фоне пассивных помех (ПП) (см. рис. 4).

Таким образом, текущее оценивание углового параметра и допплеровской частоты по алгоритму, получение которого основано на усреднении ОП по неинформативным параметрам, приводит к возникновению систематической ошибки в сложной помеховой обстановке. Такая ошибка отсутствует при использовании алгоритма оценивания, который получен методом предварительной максимизации ОП по неинформативным параметрам.

Литература

1. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория. Под ред. Я. Д. Ширмана. Справочник. Москва, ЗАО "МАКВИС", 1998. 828 с.
2. С. Е. Фалькович, Э. Н. Хомяков. Статистическая теория измерительных радиосистем. Москва, Радио и связь, 1981, 288 с.
3. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. Оценка параметров сигналов на фоне помех. Москва, Сов. радио, 1978. 296 с.
4. В. Г. Репин, Г. П. Тартаковский. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. Москва, Сов. Радио, 1977, 432 с.

Current Estimation of Informative Parameters of a Signal with Random Initial Phase and Amplitude on a Noise Background

V. P. Ryabuha, V. A. Tarshin

Two algorithms of a current estimation of informative parameters of a signal, based on averaging the likelihood ratio over uninformative parameters and preliminary maximization of the likelihood ratio on these parameters are considered. The effectiveness of algorithms under the noise occurence is compared.