

## К теории гальваномагнитных явлений в поликристаллических металлах

И.М. Каганова

*Институт физики высоких давлений им. Л.Ф. Верещагина РАН  
г. Троицк, Московск. область, 142190, Россия  
E-mail: kaganova@hppi.troitsk.ru*

М.И. Каганов

*7 Agassiz Ave, 1 Belmont, MA 02478 USA  
E-mail: MKaganov@compuserve.com*

Статья поступила в редакцию 8 ноября 2004 г.

Сформулирован алгоритм вычисления эффективного тензора проводимости поликристаллов в магнитном поле по значениям гальваномагнитных характеристик кристаллитов. Алгоритм основан на разложении по степеням отклонений тензоров от их средних значений. Эффективный тензор проводимости вычислен в двух предельных случаях: в слабом магнитном поле для металлов с любым электронным энергетическим спектром и в сильном поле для металлов с замкнутыми поверхностями Ферми (в этом случае исходные формулы — результат теории гальваномагнитных явлений, использующей решение классического уравнения Больцмана для функции распределения электронов с произвольным законом дисперсии). Для поликристаллов кубических металлов в слабом магнитном поле и металлов с замкнутыми поверхностями Ферми в сильных полях полученные формулы имеют ту же точность, что и исходные выражения.

Сформульовано алгоритм обчислення ефективного тензора провідності полікристалів у магнітному полі по значенням гальваномагнітних характеристик кристалітів. Алгоритм засновано на розкладанні по ступеням відхилення тензорів від їх середніх значень. Ефективний тензор провідності обчислено у двох граничних випадках: у слабкому магнітному полі для металів з будь яким електронним енергетичним спектром та у сильному магнітному полі для металів з замкнутими поверхнями Фермі (у цьому випадку вихідні формули — результат теорії гальваномагнітних явищ, яка використовує рішення класичного рівняння Больцмана для функції розподілу електронів з довільним законом дисперсії). Для полікристалів кубічних металів у слабкому магнітному полі і металів з замкнутими поверхнями Фермі у сильних полях одержані формули мають таку ж саме точність, що і вихідні вирази.

PACS: 72.15.Gd

### 1. Введение

Теория гальваномагнитных явлений (ГМЯ), построенная в 50-е годы И.М. Лифшицем и его учениками [1–3], ставила задачу выяснить, в какой мере электронный энергетический спектр металла определяет асимптотику поперечных (относительно магнитного поля) компонент тензора сопротивлений в сильных магнитных полях. В этих работах было установлено, что асимптотика зависимости сопротивления от магнитного поля целиком определяется то-

пологией поверхностей Ферми (ПФ) металлов. Первоначальным стимулом к построению теории ГМЯ в большой мере были работы Е.С. Боровика [4,5]. Мы будем рады, если эта статья войдет в выпуск журнала, специально приуроченный к 90-летию Евгения Станиславовича.

Наиболее важный результат работ 50-х годов по теории ГМЯ — понимание роли открытых ПФ, позволившее на основе измерений ГМЯ характеристик выяснить контуры топологической структуры ПФ многих металлов. Итогом этого подхода может

служить обзор Ю.П. Гайдукова [6], в виде приложения III помещенный в монографию [7].

В 50-е годы и несколько позже сформировалось направление электронной теории металлов (не только теории ГМЯ), получившее название *фермиологии*. Главное в фермиологии — интерес к *спектростопическим возможностям различных явлений* в металлах. И теоретики, и экспериментаторы отдавали предпочтение тем явлениям, которые позволяют по полученным на опыте данным полностью или частично построить ПФ и определить скорости ферми-электронов.

Наиболее продуктивными в этом смысле оказались квантовые эффекты типа де Гааза–ван Альфена и Шубникова–де Гааза. Подробности об исследованиях осцилляционных эффектов и о полученных с их помощью сведениях об энергетическом спектре металлов можно найти в монографии Д. Шенберга [8].

В работах фермиологического направления приоритет всегда отдавался наиболее совершенным монокристаллам. Дефекты, включая межкристаллические прослойки, воспринимались мешающими обстоятельствами. С другой стороны, уже к 50-м годам был накоплен огромный экспериментальный материал по ГМЯ, причем подавляющее большинство результатов получено на поликристаллах.

В частности, известный *закон Капицы* — линейный рост сопротивления с магнитным полем в достаточно сильных полях — был обнаружен П.Л. Капицей при исследовании влияния магнитного поля на сопротивление поликристаллов [9]. Именно поэтому Капица не обнаружил квантовых осцилляций сопротивления, хотя производил измерения и на висмуте, на котором осцилляции были обнаружены Шубниковым и де Гаазом [10].

Линейная зависимость сопротивления металлов от магнитного поля, согласно Боровику [5] — аппроксимация плавной функции, описывающей переходный участок между квадратичной зависимостью в малых полях и либо насыщением, либо другой квадратичной зависимостью в больших полях. Выводы Боровика (в частности, разделение металлов на различные группы по поведению в сильном магнитном поле), конечно, не учитывали того факта, что металлы разных групп могут иметь ПФ разной топологии: о роли топологии ПФ в ГМЯ еще не было известно.

Для поликристаллов металлов с открытыми ПФ (типа меди и золота) закон Капицы был объяснен в первых работах по теории ГМЯ И.М. Лифшицем и В.Г. Песчанским [2]. Они показали, что линейная зависимость сопротивления от сильного магнитного поля непосредственно связана с *поликристаллическостью* и возникает из-за усреднения тензора сопро-

тивления, обладающего гигантской анизотропией, характерной для монокристаллов металлов с открытыми ПФ в сильном магнитном поле. Следует отметить, что в [2] среднее сопротивление рассчитывалось для тонкого образца (проволоки), в сечении которой помещается один кристаллит.

В более поздней работе Ю.А. Дрейзина и А.М. Дыхне вычислено эффективное сопротивление массивных поликристаллов металлов с открытыми ПФ в предельно больших магнитных полях [11]. Используя диффузионную аналогию, они показали, что эффективное сопротивление поликристалла зависит от типа открытости ПФ и от того, имеем мы дело с металлами с неравными числами электронов  $n_e$  и дырок  $n_h$  или с компенсированными металлами ( $n_e = n_h$ ). Рассмотрены ПФ в виде «пространственной сетки» и «гофрированного цилиндра». Например, в случае ПФ типа гофрированного цилиндра, когда перешеек цилиндра не слишком мал по отношению к размеру ячейки обратной решетки, эффективное поперечное сопротивление  $\rho_{\perp}^{\text{eff}}$  пропорционально  $H^{2/3}$ , когда  $n_e \neq n_h$ , и  $\rho_{\perp}^{\text{eff}} \propto H^{4/3}$  при  $n_e = n_h$ . Напомним, у компенсированных металлов, ПФ которых замкнуты, в больших полях сопротивление возрастает пропорционально  $H^2$ .

О первых работах по теории ГМЯ и о современном состоянии теории довольно подробно рассказано в обзоре [12]. Интерес к ГМЯ в поликристаллах имеет давнюю историю. Специальных теоретических работ, связывающих гальваномагнитные характеристики поликристаллов с характеристиками кристаллитов, мало. Кроме отмеченных выше работ [2,11], насколько нам известно, есть только наша работа [13], в которой выведены формулы, пригодные для поликристаллических металлов с закрытыми ПФ в большом магнитном поле, причем рассмотрен случай нескомпенсированного металла. Для металлов с равными числами электронов и дырок формулы выведены в настоящей работе. Мы не встречали в литературе вывод формул для описания ГМЯ в поликристаллах в малых магнитных полях, использующий выражения, справедливые для монокристаллов–кристаллитов. Этому вопросу посвящен раздел 3.

Магнитосопротивление и эффект Холла входят в число одних из наиболее существенных свойств металлов. Необходимость формул, описывающих ГМЯ в поликристаллах, очевидна. Нам кажется, что наши работы в какой-то мере помогают заполнить существующий в теории пробел.

В теории поликристаллов нередко ограничиваются *описанием*, не вдаваясь в подробности. В таких случаях поликристалл, не обладающий текстурой, считают изотропным телом. Естественно, такой под-

ход упрощает *описание*: уменьшается число модулей, тензора второго ранга превращаются в скаляры и т.п. Описывая так электронные свойства поликристаллических металлов, часто заменяют истинную ПФ сферой. Тем самым фактически возвращаются к модели Друде–Лоренца–Зоммерфельда. Иногда это себя оправдывает, так как удается разумно ввести параметры (плотность  $n_e$ , эффективную массу  $m_e$  и длину свободного пробега  $l_e$ ), характеризующие электроны проводимости, а с их помощью *описать* тепловые, гальванические и термоэлектрические свойства поликристаллического металла.

Поликристаллы можно трактовать как широко распространенный случай неоднородных разупорядоченных твердых тел. Причина неоднородности и неупорядоченности связана с случайной ориентацией отдельных монокристаллических зерен. В тех случаях, когда межкристаллитные прослойки играют малую роль\*, поликристалл можно считать конгломератом монокристаллических зерен, оси которых по-разному ориентированы, а под структурой поликристалла понимать характер ориентации осей кристаллитов — статистику направлений, как принято говорить.

Мерой разупорядоченности поликристалла служат пространственные флуктуации большинства характеристик. Не все характеристики поликристалла имеют пространственные флуктуации. Его скалярные характеристики, естественно, однородны (теплоемкость,  $\kappa$  например). Более интересный пример отсутствия пространственных флуктуаций демонстрируют металлы, у которых кристаллиты обладают кубической симметрией. Тензор проводимостей каждого кубического кристаллита в отсутствие магнитного поля вырождается в скаляр и не зависит от направления осей кристаллитов. Электропроводность поликристалла однородна. Это скаляр, совпадающий со значением проводимости отдельного кристаллита. Последнее утверждение, естественно, относится не только к проводимости, но и к любому свойству кубического поликристалла, которое описывается симметричным тензором второго ранга. Например, тензора теплопроводности, диэлектрической и магнитной проницаемостей также вырождаются в скаляры.

Для описания свойств поликристаллов вводят *эффективные* величины. Их введение и вычисление — основная задача теории поликристаллов. За исходные принимаются величины, которые характеризуют данное свойство кристаллита, и предпола-

гают, что характеристики кристаллитов и макроскопических монокристаллов данного металла не отличаются.

Последнее предположение требует формулировки применимости подхода в каждом конкретном случае. Не является ли усредненная по направлениям характеристика кристаллитов эффективной характеристикой поликристалла? В общем случае — нет.

Характеристика поликристалла, называемая эффективной, в отличие от средней, учитывает рассеянные из-за неоднородностей поля. Поэтому для среды, обладающей пространственными флуктуациями, вычисление эффективных характеристик следует начинать с усреднения того точного уравнения, которое содержит флуктуирующие коэффициенты и описывает исследуемое явление. Первыми работами, в которых был сформулирован метод вычисления эффективных характеристик поликристаллов по значениям локальных величин, описывающих кристаллиты, по-видимому, следует считать работы И.М. Лифшица и его учеников. В работе [14], посвященной теории статических упругих свойств поликристаллов, показано, что усредненные упругие модули кристаллитов в общем случае — лишь нулевое приближение по анизотропии к эффективным модулям.

В дальнейшем этот метод был распространен на динамическую теорию упругости [15] и на диэлектрические свойства кристаллитов [16]. В работах [15,16] вычислены характеристики распространяющихся в поликристаллах звуковых и электромагнитных волн.

Во всех цитированных работах по теории поликристаллов конкретные результаты были получены для неограниченных образцов в первом исчезающем приближении теории возмущений путем усреднения статических и динамических уравнений теории упругости [14,15], а также уравнений Максвелла в диэлектрике [16].

Использование первого приближения теории возмущений означает учет средних значений квадратов пространственных флуктуаций. Мерой флуктуаций служит анизотропия тензорных свойств: в фиксированной лабораторной системе координат, связанной с образцом, коэффициенты усредняемого уравнения суть флуктуирующие при переходе от одного кристаллита к другому функции координат.

Начиная с 1992 года свойства поликристаллов детально исследованы в работах [17–19]. В этих работах теория была обобщена на случай полупространства. Рассмотрено распространение в поликристалле

\* Обычно это реализуется в случае крупнозернистых поликристаллов. Например, в большинстве случаев при описании электронных свойств поликристаллов металлов надо, чтобы длина свободного пробега электронов  $l$  была гораздо меньше среднего размера кристаллита  $a$ .

рэлеевской волны [17], решена задача о нормальном и аномальном скин-эффекте [18], вычислен закон дисперсии поверхностных поляритонов [19]. В цитированных выше работах авторы предполагали анизотропию малой и вычисляли первую исчезающую поправку по анизотропии к исследуемым величинам.

А.М. Дыхне и И.М. Каганова [20] показали возможность выхода за пределы теории, в которой анизотропия предполагается малой, и вывели формулу для эффективного импеданса поликристалла, которая, в условиях применимости локальных граничных условий Леонтовича [21], по точности совпадала с формулой для импеданса монокристалла. Несколько условно полученная формула была названа *точной*, и мы будем придерживаться этого названия. В работе [20] получена *точная* формула для эффективного импеданса поликристалла в условиях нормального скин-эффекта, а в работе [22] — аномального. И в том, и в другом случае анизотропия импеданса\* при переходе от кристаллита к кристаллиту может быть произвольной: точность результата не связана с величиной анизотропии. Обеспечивается точность другим — тем, что для всей поверхности (для каждого кристаллита на поверхности) предполагается выполнение локальных граничных условий Леонтовича, и тем, что для хороших металлов компоненты тензора импеданса гораздо меньше единицы. Из-за этого корреляционные члены гораздо меньше основных и могут быть отброшены, а структура *точной* формулы для импеданса проста: эффективный импеданс поликристалла есть просто среднее значение импеданса кристаллитов.

Малость импеданса — следствие малости отношения  $\delta/\lambda$ , где  $\delta$  — глубина скин-слоя, а  $\lambda$  — длина волны в вакууме. Именно малость поверхностного импеданса позволяет в большинстве задач использовать так называемые импедансные граничные условия (см., например, [23]). Для того чтобы импедансные граничные условия были локальными (выполнялись локальные граничные условия Леонтовича), должно выполняться еще одно неравенство: размер неоднородности поверхности должен быть гораздо больше  $\delta$ . Для поликристалла с плоской поверхностью это означает выполнение следующего условия: средний размер кристаллитов  $a$  заметно превосходит глубину скин-слоя  $\delta$ . Пренебрегаемые при вычислении эффективного импеданса дву- и многоточечные корреляторы флуктуационных членов малы благодаря малости отношений  $\delta/\lambda$  и  $\delta/a$ .

В случае малых или предельно больших магнитных полей в теории ГМЯ тоже имеются малые параметры. Строя теорию ГМЯ для поликристаллов, в

ряде случаев можно использовать эти малые параметры для получения *точных* решений, т.е. решений, которые по точности совпадают с разложениями соответствующих характеристик по малым параметрам.

## 2. Постановка задачи

При вычислении эффективных характеристик ГМЯ поликристаллов не будем выходить за пределы основных предположений так называемой *классической* теории ГМЯ, не будем учитывать *квантовые осцилляции*, оставаясь строго в рамках теории ГМЯ [1–3].

Для описания ГМЯ в поликристаллах переход к модели Друде–Лоренца–Зоммерфельда не годится. Считая ПФ сферой, нельзя описать основные черты ГМЯ — зависимость сопротивления от магнитного поля, а также различие «констант» Холла в больших и малых магнитных полях (у некоторых металлов происходит даже изменение знака «константы» Холла). Правда, если использовать более сложную модель, предположив, что в поликристалле имеются не только электроны, но и дырки с набором параметров  $n_h, m_h, l_h$  и зарядом  $-e$ , то для металлов с закрытыми ПФ такой подход может оказаться успешным: можно добиться хорошего согласия теории с экспериментальными данными.

Несовершенство такой теории очевидно: введенные параметры необходимо связать с характеристиками электронов проводимости кристаллитов. Характеристики металла в магнитном поле чувствительны к структуре электронного спектра. А ведь хорошо известно, что практически у всех металлов, кроме некоторых металлов первой группы, ПФ очень непохожи на сферы.

Для того чтобы при вычислении эффективных характеристик ГМЯ можно было не учитывать размеров кристаллитов и считать кристаллиты бесконечными монокристаллами, необходимо выполнение неравенства  $l \ll a$ . При этом в случае малых полей  $l \ll r_H$ , а при больших полях  $r_H \ll l$  ( $l$  — средняя длина свободного пробега электрона проводимости,  $r_H$  — радиус орбиты электрона в магнитном поле).

Теория ГМЯ поликристаллов предполагает вычисление эффективных тензоров: проводимости (ЭТП)  $\sigma_{ik}^{\text{eff}}$  и сопротивления (ЭТС)  $\rho_{ik}^{\text{eff}}$ . Оба тензора — функции магнитного поля  $\mathbf{H}$  и обратны друг другу, т.е.  $\sigma_{ik}^{\text{eff}} = \sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H})$  и  $\rho_{ik}^{\text{eff}} = \rho_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H})$ , а  $\sigma_{ik}^{\text{eff}} \rho_{ik}^{\text{eff}} = \delta_{ik}$ , где  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера.

\* Импеданс — двумерный тензор второго ранга.

По определению  $\sigma_{ik}^{\text{eff}}$  связывает между собой однородные по всему поликристаллу величины — плотность тока  $\langle \mathbf{j} \rangle$  и напряженность электрического поля  $\langle \mathbf{E} \rangle$  :

$$\langle j_i \rangle = \sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H}) \langle E_k \rangle. \quad (1)$$

Компоненты эффективного тензора  $\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H})$  нужно выразить через компоненты локального тензора проводимости (ЛТП) кристаллитов  $\sigma_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$  в постоянном и однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Зависимость компонент ЛТП от радиус-вектора  $\mathbf{r}$  обусловлена тем, что  $\sigma_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$  изменяется при переходе от кристаллита к кристаллиту, во-первых, из-за поворота осей тензора относительно лабораторной системы отсчета, а во-вторых, из-за различной ориентации магнитного поля  $\mathbf{H}$  по отношению к осям конкретного кристаллита. Обычно лабораторную систему координат выбирают так, что одна из ее осей (как правило, это ось  $z$ ) по направлению совпадает с магнитным полем.

Если считать значения компонент  $\sigma_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$  известными, то отличие вычисления  $\sigma_{ik}^{\text{eff}}$  при  $H \neq 0$  и  $H = 0$  обусловлено двумя обстоятельствами: 1) полученные в результате усреднения тензорные характеристики не изотропны, они выражаются не только через тензор  $\delta_{ik}$  и единичный антисимметричный тензор третьего ранга  $e_{ikl}$ , но и через компоненты вектора  $\mathbf{H}$ ; 2) при  $H = 0$  проводимость  $\sigma$  — симметричный тензор второго ранга, а в магнитном поле принцип симметрии кинетических коэффициентов [24] требует значительно более сложной симметрии:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (2)$$

Антисимметричная часть тензора проводимости, как известно, описывает эффект Холла.

Оба обстоятельства не мешают выделить из тензора  $\sigma_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$  среднее значение:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) = \langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle + \Delta_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H}), \quad \langle \Delta_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \rangle = 0. \quad (3)$$

Тензор  $\Delta_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$  описывает часть ЛТП, изменяющуюся при переходе  $\mathbf{r}$  из одного кристаллита в другой. Угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю всех возможных реализаций неоднородной среды (полукристалла). Вычисление  $\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H})$ , по сути, сводится к учету вклада в ЭТП многоточечных корреляторов типа  $\langle \Delta_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \Delta_{lm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{H}) \dots \rangle$ , возникающих при усреднении уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) E_k}{\partial x_i} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (4)$$

Часто при решении уравнений электростатики переходят от электрического поля к потенциалу  $\varphi$ :

$E_i(\mathbf{r}) = -\partial\varphi(\mathbf{r})/\partial x_i$ , объединяя уравнения в формуле (4). В отличие от среднего потенциала, среднее поле  $\langle \mathbf{E} \rangle$  по определению не зависит от координат. Если из потенциала выделить среднее значение, определяющее  $\langle \mathbf{E} \rangle$ , и обращающуюся в нуль при усреднении случайную добавку, то необходимо следить за тем, чтобы случайное поле  $\mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle$  тоже обращалось в нуль при усреднении. В связи с этим нам удобнее использовать непосредственно уравнения для электрического поля.

В Приложении I приведен полученный в [13] результат вычисления ЭТП по теории возмущений. Разложение ведется по степеням отклонений  $\Delta_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ ; при вычислении использован метод Фурье (функции  $\Delta_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$  разлагаются по плоским волнам). Формула (I.1) является решением, если входящие в нее ряды сходятся. В этом случае она дает возможность получить значение  $\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H})$  в виде разложения по степеням корреляторов тензоров  $\Delta_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$  с любой степенью точности. Проверка сходимости ряда — отдельная задача (см., например, [25], где этот вопрос обсуждается для случая  $\mathbf{H} = 0$ ).

В Приложении II описано вычисление многоточечных корреляторов для поликристаллов. Как было сказано, исходным предположением является случайная ориентация кристаллографических осей отдельных кристаллитов (текстуры нет), направления осей кристаллитов статистически независимы. Компоненты тензоров, описывающих свойства кристаллитов, если они заданы в единой лабораторной системе координат, — случайные функции координат. Скалярные характеристики, не зависящие от ориентации магнитного поля, во всех кристаллитах тождественны.

Выписанные в Приложении I выражения, формально решая поставленную задачу вычисления  $\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H})$ , требуют конкретизации.

Теория ГМЯ, на которую мы опираемся, имеет особенность, которую следует указать.

Использование классического уравнения Больцмана, включающего силу Лоренца, лишь в принципе позволяет указать алгоритм вычисления тензора проводимости монокристалла металла с любой степенью точности. Фактическое точное вычисление весьма затруднительно и требует решения интегральных уравнений нестандартного вида. Для металлов с поверхностями Ферми сложной формы в магнитном поле произвольной величины эта задача, насколько нам известно, не решалась.

Ориентированная на выявление роли топологии ферми-поверхностей металла, теория ГМЯ рассматривает лишь большие магнитные поля ( $r_H \ll l$ ), когда роль топологии является определяющей. В применении к нашей задаче ее результат — выяснение

зависимости компонент  $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$  от  $\mathbf{H}$ . Коэффициенты перед степенями магнитного поля в полученных выражениях — тензора, структура которых известна, но значения компонент, строго говоря, известны только по порядку величины. Именно эти *тензорные коэффициенты* служат теми случайными функциями, которые должны быть усреднены по направлениям кристаллитов при вычислении ЭТП.

Зависимость ЛТП от магнитного поля в области малых магнитных полей ( $l \ll r_H$ ) может быть установлена путем разложения по компонентам вектора  $\mathbf{H}$ . Разложение учитывает симметрию тензора проводимости (2) и кристаллической решетки (какому классу симметрии она принадлежит).

Предельные случаи позволяют выделить из выражений для компонент тензора  $\Delta_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$  зависимость от магнитного поля. Важно, что при этом возникнет критерий оценки слагаемых в этих выражениях, содержащих  $H$  в разных степенях. Критерий справедлив вне зависимости от величины анизотропии. Необходимость согласовать точность эффективных выражений для поликристаллов с точностью исходных формул теории ГМЯ для монокристаллов является основанием для существенных упрощений в ряде случаев.

Обсуждение полученных результатов производится на основании формул, справедливых в предельных случаях малого и большого магнитных полей.

### 3. Эффективный тензор проводимости в слабом магнитном поле

В случае слабых полей воспользуемся разложением ЛТП по степеням компонент магнитного поля, ограничиваясь линейными и квадратичными членами. Фактически это, конечно, означает разложение по малому безразмерному параметру  $l/r_H$ . В согласии с принципом симметрии кинетических коэффициентов, разложение имеет вид:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) = \sigma_{ik}^{(0)}(\mathbf{r}) + H e_{ikl} a_{lm}(\mathbf{r}) \kappa_m + H^2 S_{iklm}(\mathbf{r}) \kappa_l \kappa_m, \quad (5)$$

где  $\kappa_i = H_i/H$  — единичный вектор в направлении магнитного поля  $\mathbf{H}$ , а тензора  $a_{ik}$  и  $S_{iklm}$  от магнитного поля не зависят.

Выражение (5) записано в инвариантной форме. Все индексы относятся к единой лабораторной системе координат. Напомним, что именно из-за случай-

ной ориентации зерен в (5) компоненты тензоров — случайные функции координат. В кристаллографической системе осей число независимых компонент этих тензоров определяется классом симметрии, к которому принадлежит данный металл.

Тензор электропроводностей  $\sigma_{ik}^{(0)}$  при  $H = 0$  симметричен. Принцип симметрии кинетических коэффициентов не накладывает ограничений на тензор  $a_{ik}$ , входящий в холловское слагаемое. Однако в большинстве случаев симметрия немагнитного металла такова, что антисимметричной части у тензора второго ранга, который не зависит от магнитного поля, быть не может. Исключения составляют металлы с вычурной осевой симметрией (таким свойством обладает, например,  $\beta$ -плутоний [26]). Для простоты будем предполагать, что  $a_{ik} = a_{ki}$ .

Принцип симметрии кинетических коэффициентов требует, чтобы выполнялось равенство  $S_{iklm} = S_{ki;lm}$ . Поскольку тензор  $S_{iklm}$  входит в выражение (5) в виде свертки с симметричным тензором  $\kappa_l \kappa_m$ , его можно симметризовать по индексам  $l$  и  $m$ . Тогда  $S_{iklm} = S_{ik,ml}$ . Однако  $S_{iklm} \neq S_{lm;ik}$ \*

Естественно, формула для ЭТП должна иметь структуру, характерную для изотропного тела в малых магнитных полях:

$$\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H}) = \sigma^{\text{eff}}(0) \delta_{ik} + A_H e_{ikl} \kappa_l H + [\alpha_{\parallel} \kappa_i \kappa_k + \alpha_{\perp} (\delta_{ik} - \kappa_i \kappa_k)] H^2, \quad (6)$$

где  $\sigma^{\text{eff}}(0)$  — эффективная проводимость поликристалла при  $\mathbf{H} = 0$ ,  $A_H$  — коэффициент, описывающий эффект Холла,  $\alpha_{\parallel}$  учитывает изменение с магнитным полем продольной (относительно поля) проводимости, а  $\alpha_{\perp}$  — поперечной проводимости. Наша задача — вычисление этих величин.

В соответствии с общей формулой (I.1), расчет  $\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H})$  начинается с разделения ЛТП на среднюю и флуктуирующую части. Усредняя выражение (5), получаем

$$\langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle = \sigma_0 \delta_{ik} + H a e_{ikl} \kappa_l + H^2 (S_1 \delta_{ik} + 2S_2 \kappa_i \kappa_k). \quad (7a)$$

Здесь  $\sigma_0 = \sigma_{ll}^{(0)}/3$  и  $a = a_{ll}/3$  получаются при усреднении тензоров  $\sigma_{ik}^{(0)}$  и  $a_{ik}$  соответственно, а инварианты  $S_1$  и  $S_2$  определяют среднее значение тензора  $S_{iklm}$ :

$$\langle S_{iklm} \rangle = S_1 \delta_{ik} \delta_{lm} + S_2 (\delta_{im} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{km}), \quad (7b)$$

\* Именно последнее неравенство отличает симметрию относительно перестановки индексов тензора  $S_{iklm}$  от симметрии, например, тензора упругих модулей монокристалла.

$$S_1 = \frac{1}{15}(2S_{pp;qq} - S_{pq;pq}); \quad S_2 = \frac{1}{30}(3S_{pq;pq} - S_{pp;qq}). \quad (7B)$$

Случайная часть ЛТП есть  $\Delta_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) = \sigma_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) - \langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle$ :

$$\Delta_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) = \Delta_{ik}^{(0)}(\mathbf{r}) + He_{ikl}\delta a_{lm}(\mathbf{r})\kappa_m + H^2\delta S_{ik,lm}(\mathbf{r})\kappa_l\kappa_m, \quad (8)$$

где

$$\Delta_{ik}^{(0)}(\mathbf{r}) = \sigma_{ik}^{(0)}(\mathbf{r}) - \sigma_0\delta_{ik}; \quad \delta a_{ik}(\mathbf{r}) = a_{ik}(\mathbf{r}) - a\delta_{ik};$$

$$\delta S_{ik,lm}(\mathbf{r}) = S_{ik,lm}(\mathbf{r}) - \langle S_{ik,lm} \rangle.$$

Очевидно,  $\langle \Delta_{ik}^{(0)} \rangle = \langle \delta a_{lm} \rangle = \langle \delta S_{ik,lm} \rangle = 0$  и, следовательно,  $\langle \Delta_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) \rangle = 0$ . Определив  $\langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle$  и  $\Delta_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{r})$ , можно получить выражение для ЭТП с произвольной степенью точности по анизотропии. В соответствии с формулой (I.1) в ЭТП флуктуационные поправки к  $\langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle$  определяются рядами, в которые входят корреляторы тензоров  $\Delta_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{r})$ .

В выражении (5) мы ограничились разложением компонент ЛТП квадратичными по полю членами. Следовательно, при вычислении члены, содержащие магнитное поле в более высокой степени, должны быть опущены. Их сохранение — превышение точности используемого приближения.

Итак, чтобы вычислить флуктуационную поправку к ЭТП порядка  $n$  по анизотропии, надо определить тензор  $w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H})$  (см. формулу (I.3)), ограничиваясь членами  $O(H^2)$ . С указанной точностью компоненты этого тензора определяются интегралами от среднего

$$\langle \Delta_{il_1}(\mathbf{r})\Delta_{jl_2}(\mathbf{r}_1)\dots\Delta_{jn-1k}(\mathbf{r}_{n-1})\prod_{s=1}^{n-1} q_{l_s j_s}^{(s)} \rangle = \langle T_{ik}^{(0,n)} \rangle + H \langle T_{ik,p}^{(1,n)} \rangle \kappa_p + H^2 \langle T_{ik,pq}^{(2,n)} \rangle \kappa_p \kappa_q, \quad (9)$$

где, с той же точностью, тензор  $q_{ik}^{(s)}$  (см. формулу (I.4)) суть

$$q_{ik}^{(s)} = \frac{n_i^{(s)} n_k^{(s)}}{\sigma_0} \left( 1 - H^2 \frac{S_1 + 2S_2}{\sigma_0} (\kappa \mathbf{n}^{(s)})^2 \right).$$

Напомним, что, кроме зависимости от координат, каждый из тензоров  $\Delta_{j_s l_{s+1}}$  в формуле (9) зависит и от постоянного вектора  $\mathbf{H}$ .

Обозначим через  $Q_{ik}^{(0,n)}$ ,  $Q_{ik,p}^{(1,n)}$  и  $Q_{ik,pq}^{(2,n)}$  вклад в  $w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H})$  от каждого из тензоров  $\langle T_{ik}^{(0,n)} \rangle$ ,  $\langle T_{ik,p}^{(1,n)} \rangle$  и  $\langle T_{ik,pq}^{(2,n)} \rangle$  соответственно. Поскольку это изотропные тензора с известными свойствами симметрии отно-

сительно перестановки индексов, известна и их структура:

$$Q_{ik}^{(0,n)} = Q^{(0,n)}\delta_{ik}, \quad Q^{(0,n)} = \frac{1}{3} \langle Q_{kk}^{(0,n)} \rangle; \\ Q_{ik,p}^{(1,n)} = Q^{(1,n)}e_{ikp}, \quad Q^{(1,n)} = \frac{1}{6} Q_{ik,p}^{(1,n)}e_{ikp}; \quad (10)$$

$$Q_{ik,pq}^{(2,n)} = Q_1^{(2,n)}\delta_{ik}\delta_{pq} + Q_2^{(2,n)}(\delta_{ip}\delta_{kq} + \delta_{iq}\delta_{kp});$$

$$Q_1^{(2,n)} = \frac{1}{15}(2Q_{kk,qq}^{(2,n)} - Q_{kq,kq}^{(2,n)}),$$

$$Q_2^{(2,n)} = \frac{1}{30}(3Q_{kq,kq}^{(2,n)} - Q_{kk,qq}^{(2,n)}),$$

Вычисление свертков, входящих в уравнения (10), существенно проще вычисления самих тензоров  $\hat{Q}^{(r,n)}$  ( $r = 0, 1, 2$ ). Однако даже после этих упрощений для произвольного значения  $n$  получаются очень громоздкие выражения, поэтому мы их не приводим. В формуле для ЭТП ограничимся квадратичными и кубическими членами по корреляторам тензоров  $\Delta(\mathbf{H}, \mathbf{r})$  ( $n = 2, 3$ ).

Еще одна причина, почему при расчете ЭТП в малых полях мы ограничиваемся членами  $O(\Delta^3)$ , состоит в том, что, как и в случае  $H = 0$  (см., например, [25]), при  $n \geq 3$  флуктуационные поправки зависят от вида многоточечных корреляционных функций, описывающих статистику направлений кристаллографических осей отдельных зерен. Это означает, что при  $n \geq 3$  мы не можем провести расчет, не используя модельных представлений о виде этих корреляционных функций.

Приведем только выражения для  $Q^{(0,2)}$  и  $Q^{(0,3)}$ , чтобы продемонстрировать зависимость флуктуационных поправок к ЭТП при  $n > 2$  от вида корреляционных функций, и коэффициенты, входящие в выражение для  $\sigma_{ik}^{eff}(\mathbf{H})$  (см. ур-ние (6)) с точностью до членов, кубических по анизотропии. Вывод полученных выражений приведен в Приложении III.

При  $n = 2$  из формул (III.1) и (I.3) следует, что

$$Q^{(0,2)} = \frac{1}{3(2\pi)^3\sigma_0} \int d^3k_1 n_{j_1}^{(1)} n_{l_1}^{(1)} \times \\ \times \int d^3r_1 \exp[-i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})] \langle \Delta_{kl_1}^{(0)}(\mathbf{r}) \Delta_{j_1k}^{(0)}(\mathbf{r}_1) \rangle. \quad (11a)$$

В соответствии с формулой (II.4) среднее  $\langle \Delta_{kl_1}^{(0)}(\mathbf{r}) \Delta_{j_1k}^{(0)}(\mathbf{r}_1) \rangle = D_2 \delta_{j_1 l_1} W_2(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|) / 3$ , где инвариант  $D_2 = \Delta_{kl}^{(0)} \Delta_{lk}^{(0)}$ . Значит,

$$Q^{(0,2)} = \frac{D_2}{9\sigma_0} \int d^3k_1 W_2(k_1) = \frac{D_2}{9\sigma_0}. \quad (11b)$$

Входящий в (116) интеграл равен значению корреляционной функции  $W_2(|\mathbf{r}|)$  при  $\mathbf{r} = 0$ , следовательно, он равен единице.

Для вычисления  $Q^{(0,3)}$  воспользуемся формулами (II.5)–(II.7). Тогда

$$Q^{(0,3)} = -\frac{1}{3(2\pi)^6 \sigma_0^2} \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 n_{j_1}^{(1)} n_{l_1}^{(1)} n_{j_2}^{(2)} n_{l_2}^{(2)} \times \\ \times \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \exp[-i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})] \exp[-i\mathbf{k}_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] \times \\ \times \langle \Delta_{kl_1}^{(0)} \Delta_{j_1 l_2}^{(0)} \Delta_{j_2 k}^{(0)} \rangle W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]), \quad (12)$$

где  $W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2])$  – вероятность того, что векторы  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  попадают в один кристаллит, а среднее

где

$$J_3^{(st)} = 1 - \frac{1}{2} \iint d\mathbf{k}_1^3 d\mathbf{k}_2^3 (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2 W_2(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|) (W_2(k_1) + W_2(k_2)).$$

В работе [25] значение  $J_3^{(st)}$  вычислено при разных модельных предположениях о виде двухточечной корреляционной функции  $W_2(r)$ :

$$J_3^{(st)} = 0,028, \text{ когда } W_2 = \exp(-r^2/a^2);$$

$$J_3^{(st)} = 0,136, \text{ когда } W_2 = \exp(-r/a);$$

$$J_3^{(st)} = 0,052, \text{ когда } W_2 = 1/(1 + r^2/a^2).$$

Во всех рассмотренных случаях значение  $J_3^{(st)}$  очень мало. Из приведенных ниже выражений и формул (III.21), (III.22) видно, что функция  $F_3^{(st)}$  входит в выражения для флуктуационных поправок третьего порядка всех коэффициентов в выражении (6) для ЭТП. Следовательно, хотя в третьем порядке теории возмущений статистические свойства поликристаллов влияют на величину компонент ЭТП, это влияние очень слабое. При  $n > 3$  зависимость флуктуационных поправок от статистики не исследовалась.

Итак, с учетом членов порядка  $O(\Delta^3)$ , получаем коэффициенты, входящие в выражение (6) для  $\sigma_{ik}^{eff}$ , в виде

$$\sigma^{eff}(0) = \sigma_0 - \frac{1}{9\sigma_0} \left\{ D_2 - \frac{3D_3}{5\sigma_0} (1 + F_3^{(st)}) \right\}, \\ A_H = a + \frac{1}{9\sigma_0} \left\{ A_2 + \frac{A_3}{5\sigma_0} (1 - 3F_3^{(st)}) \right\}. \quad (14)$$

Здесь  $A_2 = \Delta_{kl}^{(0)} \delta a_{lk}$  и  $A_3 = \Delta_{kl}^{(0)} \Delta_{lm}^{(0)} \delta a_{mk}$  – инварианты второго и третьего порядков соответственно.

$$\langle \Delta_{kl_1}^{(0)} \Delta_{j_1 l_2}^{(0)} \Delta_{j_2 k}^{(0)} \rangle = \frac{D_3}{30\sigma_0^2} \times$$

$$\times [-2\delta_{j_1 l_2} \delta_{j_2 l_1} + 3(\delta_{j_1 j_2} \delta_{l_1 l_2} + \delta_{j_1 l_1} \delta_{j_2 l_2})];$$

$D_3 = \Delta_{pq}^{(0)} \Delta_{qr}^{(0)} \Delta_{rp}^{(0)}$  – инвариант. Следовательно,

$$Q^{(0,3)} = -\frac{D_3}{30\sigma_0^2} (1 + F_3^{(st)}),$$

$F_3^{(st)}$  зависит от вида корреляционной функции:

$$F_3^{(st)} = \frac{1}{9} (7 - 6J_3^{(st)}), \quad (13)$$

Наконец,

$$\alpha_{\parallel} = S_1 + \beta_{\parallel}^{(1)} + \beta_{\parallel}^{(2)} F_3^{(st)},$$

$$\alpha_{\perp} = (2S_2 + S_1) + \beta_{\perp}^{(1)} + \beta_{\perp}^{(2)} F_3^{(st)}. \quad (15)$$

Значения  $\beta_{\parallel}^{(1)}$ ,  $\beta_{\parallel}^{(2)}$ ,  $\beta_{\perp}^{(1)}$  и  $\beta_{\perp}^{(2)}$  выражаются через всевозможные инварианты 2-го и 3-го порядков, которые можно построить из тензоров  $\Delta_{ik}^{(0)}$ ,  $\delta a_{ik}$  и  $\delta S_{iklm}$ . Явные выражения для этих величин приведены в Приложении III.

#### Поликристаллы металлов кубической симметрии

Очень многие металлы обладают кубической симметрией (согласно [27], их более 30). Выведенные формулы существенно упрощаются для кристаллитов с кубической симметрией: тензора второго ранга вырождаются в скаляры. Таким образом, для поликристаллов кубических металлов в формуле для ЛТП (5)

$$\sigma_{ik}^{(0)} = \sigma_0 \delta_{ik}, \quad a_{lm} = a \delta_{ik}, \quad (16)$$

и, следовательно,

$$\Delta_{ik}^{(0)}(\mathbf{r}) = \delta a_{ik}(\mathbf{r}) = 0.$$

Следствием уравнений (16) является то, что хотя в формуле (5) тензор четвертого ранга  $S_{iklm}(\mathbf{r})$  может обладать произвольной анизотропией (его компоненты меняются при переходе из кристаллита в кристаллит), в слабых магнитных полях для поликристаллов кубических металлов корреляционная



часть  $\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H})$  обращается в нуль в любом порядке по параметру анизотропии. Таким образом, выражение для эффективной проводимости приобретает вид (см. уравнение (7а)):

$$\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H}) = \langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle = \sigma_0 \delta_{ik} + Na e_{ikl} \kappa_l + H^2 (S_1 \delta_{ik} + 2S_2 \kappa_i \kappa_k), \quad (17)$$

где коэффициенты  $S_1$  и  $S_2$  заданы формулами (7в). Подчеркнем, формула (17) столь же точна, как и (5): ее точность обеспечивается не малостью анизотропии, а малостью магнитного поля, т.е. неравенством  $l/r_H \ll 1$ . Формула (17) — *точная* формула, в том же смысле, в каком принято считать *точной* формулу для поверхностного импеданса поликристалла, полученную в [20]. В разделе 5 мы приведем явные выражения для тензоров, описывающих ГМЯ свойства монокристаллов в малых полях, а с их помощью — эффективные характеристики поликристаллов кубических металлов. Выражения используют приближенное решение классического уравнения Больцмана, содержащего силу Лоренца [28]. Закон дисперсии электронов проводимости и интеграл столкновений не уточняются.

#### 4. Эффективный тензор проводимости в сильном магнитном поле (закрытые ПФ)

В случае больших магнитных полей теория ГМЯ [1–3] ограничивается вычислением главных членов разложения по степеням обратного магнитного поля или, точнее, по степеням безразмерного параметра  $r_H/l \ll 1$ . Для металла с закрытой ПФ тензор проводимостей имеет вид:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H})|_{r_H \ll l} = S(\boldsymbol{\kappa}) \kappa_i \kappa_k + \frac{1}{H} e_{ikl} a_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}) \kappa_m + \frac{1}{H^2} s_{ik}(\boldsymbol{\kappa}). \quad (18)$$

По-прежнему  $\kappa_i = H_i/H$ ; в лабораторной системе координат  $\boldsymbol{\kappa} = (0,0,1)$ . Тензора  $s_{ik}$  и  $a_{ik}^{(1)}$  симметричны. Первый — в согласии с принципом симметрии кинетических коэффициентов Онсагера, второй — из-за того, что мы ограничили рассмотрение наиболее распространенными кристаллами (см. предыдущий раздел.)

В выражении для  $\sigma_{ik}(\mathbf{H})|_{r_H \ll l}$  скаляр  $S(\boldsymbol{\kappa})$  равен главному члену продольной проводимости и не зависит от величины магнитного поля. Холловская проводимость, определяемая тензором  $a_{ik}^{(1)}$ , пропорциональна  $1/H$ . Тензор  $s_{ik}$  задает главный вклад порядка  $1/H^2$  в поперечную проводимость.

Цель нашего расчета — определить главные члены компонент ЭТП: эффективная продольная проводимость вычисляется с точностью до членов, не

зависящих от  $H$ , эффективная холловская проводимость —  $O(1/H)$ , а эффективная поперечная проводимость —  $O(1/H^2)$ .

Формула (18) задает компоненты ЛТП для поликристаллов. И тензора, входящие в (18), и скаляр  $S(\boldsymbol{\kappa})$  — случайные функции, изменяющиеся при переходе от кристаллита к кристаллиту.  $S(\boldsymbol{\kappa})$  — из-за зависимости  $\boldsymbol{\kappa}$  от направления магнитного поля по отношению к кристаллографическим осям, а компоненты тензоров — и из-за зависимости от  $\boldsymbol{\kappa}$ , и от того, что в каждом кристаллите направление кристаллографических осей по отношению к лабораторной системе координат случайно (аргумент  $\mathbf{r}$  опущен для упрощения записи).

Обычно термином *гигантская анизотропия* пользуются при описании ГМЯ в металлах с открытыми ПФ, имея в виду различие асимптотик по магнитному полю двух поперечных компонент тензора проводимости (сопротивления) в тех случаях, когда открытые траектории дают или не дают вклад в проводимость. Согласно формуле (18), разные компоненты тензора  $\sigma_{ik}(\mathbf{H})|_{r_H \ll l}$  имеют существенно отличающуюся асимптотику. Это несомненное свидетельство гигантской анизотропии тензора проводимостей и для металлов с закрытыми ПФ.

Значения ГМЯ характеристик в сильных магнитных полях ( $r_H/l \ll 1$ ) зависят не только от топологии ПФ. Если ПФ замкнуты, важно, компенсирован металл ( $n_e = n_h$ ) или нет ( $n_e \neq n_h$ ). В первом случае поперечное *сопротивление* квадратично растет с магнитным полем, а во втором стремится к насыщению. Кроме того, у металла с неравными числами электронов и дырок константа Холла  $R$  обретает смысл истинной константы:

$$R_\infty = \frac{1}{ec(n_e - n_h)}. \quad (19)$$

Индекс « $\infty$ » показывает, что  $R_\infty$  — асимптотическое значение константы Холла.

В терминах тензора проводимости отличие компенсированного металла от некомпенсированного не выглядит так драматически. Если  $n_e \neq n_h$ , то в лабораторной системе координат холловская проводимость  $\sigma_{12}^{(H)} = 1/HR_\infty$  одинакова при всех направлениях кристаллографических осей относительно магнитного поля. В соответствии с формулой (18) из этого следует, что свертка

$$a_{ik}^{(1)} \kappa_i \kappa_k = \frac{1}{R_\infty} \quad (20)$$

одинакова для всех кристаллитов. Если же  $n_e = n_h$ , то  $a_{lm}^{(1)} \kappa_l \kappa_m = 0$ . Это означает, что в лабораторной системе координат член порядка  $1/H$  компонент холловской проводимости  $\sigma_{xy}(\mathbf{H}) = \sigma_{yx}(\mathbf{H}) = 0$ .

Рассмотрим сначала поликристаллы некомпенсированных металлов. В работе [13] показано, что специфический вид (18) ЛТП поликристаллов металлов с закрытыми ПФ позволяет в главном приближении по  $r_H/l \ll 1$  вычислить точно компоненты ЭТП методом теории возмущений (см. Приложение I). В этом случае для произвольного значения  $n$  можно не только вычислить главные члены компонент тензоров  $w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H})$  (см. формулу (I.3)), но и просуммировать ряды (I.2) для компонент тензора  $W_{ik}$ .

Используя формулу (18), запишем тензор средней проводимости. Для усреднения тензоров  $a_{ik}^{(1)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa})$  и  $s_{ik}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa})$  используем формулу (II.8).

Поскольку среднее тензора  $a_{lm}^{(1)}$  записывается в виде  $\langle a_{lm}^{(1)} \rangle = A_1 \delta_{lm} + A_2 \kappa_l \kappa_m$ , из за равенства (20) свертка  $\langle a_{lm}^{(1)} \rangle \kappa_m = (A_1 + A_2) \kappa_l = \kappa_l / R_\infty$ . Тогда

$$\langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle |_{r_H \ll l} = \langle S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) \rangle \kappa_i \kappa_k + \frac{1}{HR_\infty} e_{ikm} \kappa_m + \frac{1}{H^2} (S_1 \delta_{ik} + S_2 \kappa_i \kappa_k), \quad (21)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} (\langle s_{kk} \rangle - \langle s_{ik} \rangle \kappa_i \kappa_k), \quad (22)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} (3 \langle s_{ik} \rangle \kappa_i \kappa_k - \langle s_{kk} \rangle)$$

— коэффициенты, входящие в выражение для  $\langle s_{ik} \rangle$ . Положим  $S = \langle S \rangle + \delta S$ ,  $a_{ik}^{(1)} = \langle a_{ik}^{(1)} \rangle + \delta a_{ik}^{(1)}$  и  $s_{ik} = \langle s_{ik} \rangle + \delta s_{ik}$  ( $\langle \delta S \rangle = \langle \delta s_{ik} \rangle = 0$ ). С учетом равенства (20), очевидно, что для компонент тензора  $\delta a_{ik}^{(1)}$ , кроме равенства  $\langle \delta a_{ik}^{(1)} \rangle = 0$ , выполняется условие

$$\delta a_{ik}^{(1)} \kappa_i \kappa_k = 0. \quad (23)$$

Равенство (23) существенно при всех последующих вычислениях.

Флуктуирующая часть ЛТП задается выражением

$$\Delta_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) |_{r_c \ll l} = \delta S(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}) \kappa_i \kappa_k + \frac{1}{H} e_{ikl} \delta a_{lm}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}) \kappa_m + \frac{1}{H^2} \delta s_{ik}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}). \quad (24)$$

Рассмотрим выражение для  $n$ -й флуктуационной поправки  $w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H})$  (формула (I.3)). Кроме  $n$ -точечного коррелятора тензоров  $\hat{\Delta}$ , в это выражение входят тензора  $q_{l_s j_s}^{(s)}$ , определенные формулой (I.4). Выпишем явный вид этих тензоров для случая сильных магнитных полей.

В соответствии с формулой (21)

$$Q^{(s)} = \langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle n_i^{(s)} n_k^{(s)} = \langle S \rangle [(1 + \alpha_2^2)(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{n}_s)^2 + \alpha_1^2];$$

$$\alpha_i^2 = \frac{S_i}{\langle S \rangle H^2} \ll 1, \quad (25)$$

где  $i = 1, 2$ , а  $S_i$  заданы формулами (22). Опуская  $\alpha_2^2$  в сравнении с единицей, получаем

$$q_{l_s j_s}^{(s)} = \frac{n_{l_s}^{(s)} n_{j_s}^{(s)}}{\langle S \rangle} \times \frac{1}{((\boldsymbol{\kappa} \mathbf{n}_s)^2 + \alpha_1^2)}. \quad (26)$$

Следовательно, в главном приближении свертка

$$q_{l_s j_s}^{(s)} \kappa_{l_s} \kappa_{j_s} = 1 / \langle S \rangle \quad (27)$$

— постоянная величина. Если в выражения для тензоров  $w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H})$  входят только свертки (27), то можно опустить  $\alpha_1^2$  в знаменателе выражения (26) для компонент тензора  $q_{l_s j_s}^{(s)}$ .

Следует отметить, что в случае изотропного случайно неоднородного проводника, проводимость которого в больших магнитных полях описывается формулой

$$\sigma_{ik}(\mathbf{r}) = (\sigma_0 + \Delta(\mathbf{r})) [\kappa_i \kappa_k + \frac{1}{h} e_{ikl} \kappa_l + \frac{1}{h^2} \delta_{ik}], \quad (28)$$

$\Delta(\mathbf{r})$  — случайная функция и  $\langle \Delta(\mathbf{r}) \rangle = 0$ ,  $h = \omega_c \tau = eH\tau/mc$  ( $\tau$  — время релаксации), именно наличие полюсов у компонент тензора  $q_{l_s j_s}^{(s)}$  приводит к тому, что ряд теории возмущений для поперечных компонент ЭТП сходится, только если значение магнитного поля ограничено условием  $h \langle \Delta^2 \rangle / \sigma_0^2 \ll 1$ . При больших магнитных полях ряд теории возмущений расходится из-за аномально большого вклада флуктуаций холловских компонент, что видно уже при расчете первой неисчезающей флуктуационной поправки  $w_{\perp}^{(2)}(\mathbf{H})$  (см. [11]). Качественный расчет, выполненный Дрейзиним и Дыхне, показал, что для таких проводников поперечная эффективная проводимость аномально велика:  $\sigma_{\perp}^{\text{eff}} \sim 1/H^{4/3}$  (вместо  $\sigma_{\perp}^{\text{eff}} \sim 1/H^2$ ). Сравнивая формулы (18) и (28), видим, что в (28) флуктуации холловской проводимости описываются тензором  $\delta a_{ik}^{(1;is)} \sim \Delta(\mathbf{r}) \delta_{ik}$ . Очевидно, для тензора  $\delta a_{ik}^{(1;is)}$  равенство (23) не выполняется.

В поликристаллах металлов с закрытыми ПФ вследствие выполнения равенства (23) флуктуации холловских компонент не дают аномально большой вклад в эффективную поперечную проводимость. Сравнение выражений для  $w_{\perp}^{(2)}(\mathbf{H})$  в случаях изотропного неоднородного проводника и поликристалла приведено в Приложении IV. Кроме того, непосредственным вычислением мы показали, что для поликристаллов вклад только холловских членов в  $w_{\perp}^{(3)}(\mathbf{H})$  равен нулю, а в  $w_{\perp}^{(4)}(\mathbf{H})$  этот вклад порядка  $1/H^3$ .

Учет других членов флуктуационной части ЛТП [13] приводит к эффективной поперечной проводимости порядка  $1/H^2$ . Сделанные оценки позволяют предположить, что вклад холловских компонент в флуктуационные поправки более высокого порядка

( $n > 4$ ) по величине обратного магнитного поля мал в сравнении с членами порядка  $1/H^2$ . Если это предположение верно, то полученное ниже выражение для  $\sigma_{\perp}^{\text{eff}}$  является *точным* в рамках рассматриваемого приближения.

Учитывая сделанные оговорки, вычислим тензора  $w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H})$  (см. формулу (I.3)) при произвольном значении  $n$  с точностью  $O(1/H^2)$ . Запишем  $w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H})$  в виде

$$w_{ik}^{(n)} = w_{ik}^{(n;L)} + w_{ik}^{(n;A)}/H + w_{ik}^{(n;T)}/H^2. \quad (29)$$

Чтобы вычислить  $w_{ik}^{(n;L)}$ ,  $w_{ik}^{(n;A)}$  и  $w_{ik}^{(n;T)}$ , выпишем произведение

$$\Delta_{il_1}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) \Delta_{j_1 l_2}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_1) \dots \Delta_{j_{n-1} k}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_{n-1})$$

с точностью до членов порядка  $1/H^2$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{il_1}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) \Delta_{j_1 l_2}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_1) \dots \Delta_{j_{n-1} k}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_{n-1}) = \\ = (\hat{L}^{(n)} + \frac{1}{H} \hat{A}^{(n)} + \frac{1}{H^2} \hat{T}^{(n)}) \hat{P}^{(n)}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} w_{ik}^{(n;L)} = \frac{(-1)^n \kappa_i \kappa_k}{\langle S \rangle^{n-1} (2\pi)^{3(n-1)}} \int \dots \int d^3 r_1 \dots d^3 r_{n-1} \langle \delta S(\mathbf{r}) \prod_{p=1}^{n-1} \delta S(\mathbf{r}_p) \rangle \times \\ \times \int \dots \int d^3 k_1 \dots d^3 k_{n-1} \exp[-i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})] \exp[-i\mathbf{k}_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] \dots \exp[-i\mathbf{k}_{n-1}(\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_{n-2})]. \end{aligned} \quad (32)$$

Интегрирование по  $\mathbf{k}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) приводит к появлению функций  $\delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1})$  в подынтегральном выражении, которые сводят многоточечное среднее  $\langle \delta S(\mathbf{r}) \prod_{p=1}^{n-1} \delta S(\mathbf{r}_p) \rangle$  к константе  $\langle (\delta S)^n \rangle$ . В результате

$$w_{ik}^{(n;L)} = w_{\parallel}^{(n)} \kappa_i \kappa_k, \quad w_{\parallel}^{(n)} = (-1)^n \frac{\langle (\delta S)^n \rangle}{\langle S \rangle^{n-1}}. \quad (33)$$

Структура тензоров  $w_{ik}^{(n;L)}$  показывает, что они дают вклад в продольную часть тензора  $W_{ik}$ .

Тензор  $\hat{A}^{(n)} \hat{P}^{(n)}$  соответствует всем возможным произведениям, включающим один из тензоров  $\delta a_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}_s)$  и  $(n-1)$  тензор  $\delta S(\mathbf{r}_q) \kappa_{j_q} \kappa_{l_{q+1}}$ . Мы не выписываем выражение для  $\hat{A}^{(n)}$ , поскольку, как показано в [13], при всех  $n \geq 2$  в силу выполнения равенства (23) этот тензор не дает вклад в  $w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H})$ .

Члены, пропорциональные  $1/H^2$ , появляются в уравнении (30) благодаря

- 1) всем возможным произведениям одного тензора  $\delta s_{j_q l_{q-1}}(\mathbf{r}_{n-1})$  и  $(n-1)$  тензора  $\delta S(\mathbf{r}_q) \kappa_{j_q} \kappa_{l_{q+1}}$ ;
- 2) всем возможным произведениям двух тензоров  $\delta a_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}_s)$  и  $(n-2)$  тензоров  $\delta S(\mathbf{r}_q) \kappa_{j_q} \kappa_{l_{q+1}}$ .

где шляпка над буквой обозначает набор индексов, а  $\hat{P}^{(n)} = \prod_{q=1}^{n-1} \kappa_{l_q} \kappa_{j_q}$ . В силу уравнения (27) в главном приближении свертка

$$q_{l_1 j_1}^{(1)} q_{l_2 j_2}^{(2)} \dots q_{l_{n-1} j_{n-1}}^{(n-1)} \hat{P}^{(n)} = 1/\langle S \rangle^{n-1}. \quad (31)$$

Каждое из слагаемых правой части выражения (29) определяется одним из операторов в правой части уравнения (30). Тензор  $\hat{L}^{(n)} \hat{P}^{(n)}$  в уравнении (31) соответствует произведению  $n$  тензоров вида  $\delta S(\mathbf{r}_q) \kappa_{j_q} \kappa_{l_{q+1}}$ :  $\hat{L}^{(n)} = \kappa_i \kappa_k \delta S(\mathbf{r}) \prod_{p=1}^{n-1} \delta S(\mathbf{r}_p)$ . Под-

ставляя это выражение в уравнение (I.3) и учитывая равенство (31), получаем

Полное выражение для тензора  $\hat{T}^{(n)}$  очень громоздко. Выпишем только ту его часть, которая дает отличный от нуля вклад в главный член эффективной поперечной проводимости:

$$\begin{aligned} \hat{T}^{(n)} = e_{il_1 m_1} e_{j_{n-1} k m_2} \frac{1}{\kappa_{l_1} \kappa_{j_{n-1}}} \delta a_{m_1 n_1}^{(1)}(\mathbf{r}) \times \\ \times \delta a_{m_2 n_2}^{(1)}(\mathbf{r}_{n-1}) \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} \prod_{p=1}^{n-2} \delta S(\mathbf{r}_p) + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Точки означают опущенные члены.

Вычисляя тензор  $w_{ik}^{(n;T)}$ , примем во внимание, что это изотропный тензор второго ранга, компоненты которого зависят от фиксированного вектора  $\mathbf{k}$ . Согласно (II.8),  $w_{ik}^{(n;T)} = w_{\perp}^{(n)} \delta_{ik} + w_{\parallel}^{(n;T)} \kappa_i \kappa_k$ . Слагаемое  $w_{\parallel}^{(n;T)} \kappa_i \kappa_k$  дает поправку  $O(1/H^2)$  к продольной части тензора  $w_{ik}^{(n)}$ . В рамках нашего приближения это слагаемое должно быть опущено. Выражение для  $w_{\perp}^{(n)}$  имеет вид

$$w_{\perp}^{(n)} = \frac{1}{2} (w_{kk}^{(n;T)} - w_{ik}^{(n;T)} \kappa_i \kappa_k). \quad (35)$$

Используя формулы (34), (35), из уравнения (I.3) получаем

$$\omega_{\perp}^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2 \langle S \rangle^{n-3}} \frac{1}{(2\pi)^6} (e_{r_1 m_1} e_{j_{n-1} m_2} - e_{r_1 m_1} e_{j_{n-1} m_2} \kappa_r \kappa_s) \int \int d^3 k_1 d^3 k_{n-1} \kappa_{j_1} \kappa_{l_{n-1}} q_{l_1 j_1}^{(1)} q_{l_{n-1} j_{n-1}}^{(n-1)} \times \\ \times \int \int d^3 r_1 d^3 r_{n-1} \exp[-i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})] \exp[-i\mathbf{k}_{n-1}(\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_1)] \langle \delta a_{m_1 n_1}^{(1)}(\mathbf{r}) \kappa_{n_1} (\delta S(\mathbf{r}_1))^{n-2} \delta a_{m_2 n_2}^{(1)}(\mathbf{r}_{n-1}) \kappa_{n_2} \rangle. \quad (36)$$

Среднее в формуле (36) вычисляем, используя формулы Приложения II и равенство (23):

$$\langle \delta a_{m_1 n_1}^{(1)}(\mathbf{r}) \kappa_{n_1} (\delta S(\mathbf{r}_1))^{n-2} \delta a_{m_2 n_2}^{(1)}(\mathbf{r}_{n-1}) \kappa_{n_2} \rangle = \\ = N_{m_1 m_2} \{Y_1 W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_{n-1}], \mathbf{r}_1) + Y_2 W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{n-1}])\}, \quad (37)$$

где

$$N_{m_1 m_2} = (\delta_{m_1 m_2} - \kappa_{m_1} \kappa_{m_2}), \quad Y_1 = \frac{1}{2} \langle A \rangle \langle (\delta S)^{n-2} \rangle, \\ Y_2 = \frac{1}{2} \langle A (\delta S)^{n-2} \rangle, \quad A = \delta a_{mp}^{(1)} \delta a_{mq}^{(1)} \kappa_p \kappa_q. \quad (38)$$

Подставляя выражения (38) в формулу (36), имеем

$$\omega_{\perp}^{(n)} = -\frac{(-1)^n}{\langle S \rangle^{n-1}} \{Y_1 W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}], \mathbf{r}) + Y_2 W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{r}])\}.$$

Поскольку, согласно определению (см. Приложение II), вероятности  $W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}], \mathbf{r}) = 0$ , а  $W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{r}]) = 1$ , окончательно получаем

$$\omega_{\perp}^{(n)} = -\frac{(-1)^n}{2 \langle S \rangle^{n-1}} \langle A (\delta S)^{n-2} \rangle. \quad (39)$$

Таким образом, в лабораторной системе координат выражения  $\omega_{ik}^{(n)}$  для членов ряда  $W_{ik}$  (см. (I.1)) суть

$$\omega_{ik}^{(n)} = \omega_{\parallel}^{(n)} \delta_{i3} \delta_{k3} + \frac{\omega_{\perp}^{(n)}}{H^2} (\delta_{ik} - \delta_{i3} \delta_{k3}), \quad (40)$$

где в главном приближении  $\omega_{\parallel}^{(n)}$  задано формулой (33), а  $\omega_{\perp}^{(n)}$  — (39).

Выражения для  $\omega_{\parallel}^{(n)}$  и  $\omega_{\perp}^{(n)}$  не зависят от корреляционных функций, связывающих пространственные флуктуации в различных точках среды. Это редко встречающаяся ситуация, которая и позволяет получить *точное* решение для ЭТП. Причин, приводящих к отсутствию зависимости от корреляционных функций, несколько. Во-первых, сравнительно простой вид главного члена разложения по  $1/H$  флуктуационной части ЛТП: в соответствии с (24) этот член не зависит от  $1/H$  и равен  $\delta S(\mathbf{\kappa}, \mathbf{r}) \kappa_i \kappa_k$ . Во-вторых, равенство (27) для свертков  $q_{l_s j_s}^{(s)} \kappa_{l_s} \kappa_{j_s}$  в пределе  $H \rightarrow \infty$ , позволяющее в формуле (36) провести интегрирование практиче-

ски по всем векторам  $\mathbf{k}_m$ . И, наконец, самое главное, справедливое для поликристаллов металлов равенство  $\delta a_{ik}^{(1)} \kappa_i \kappa_k = 0$ . Как отмечено выше, выполнение этого равенства приводит к сходимости ряда теории возмущений и позволяет ограничиться разложением (30) при вычислении произведения

$$\Delta_{i l_1}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) \Delta_{j_1 l_2}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_1) \dots \Delta_{j_{n-1} k}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_{n-1}).$$

Используя формулу (40), запишем выражение для тензора  $W_{ik}$  в лабораторной системе координат:

$$W_{ik} = W_{\parallel} \delta_{i3} \delta_{k3} + \frac{W_{\perp}}{H^2} (\delta_{ik} - \delta_{i3} \delta_{k3}), \quad (41a)$$

где

$$W_{\parallel} = \sum_{n=2}^{\infty} \omega_{\parallel}^{(n)} = \langle S \rangle \left\{ \langle S \rangle \left\langle \frac{1}{S} \right\rangle - 1 \right\}; \\ W_{\perp} = \sum_{n=2}^{\infty} \omega_{\perp}^{(n)} = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{A}{S} \right\rangle. \quad (41b)$$

При выводе выражений (41) мы воспользовались тем, что  $\langle \delta S \rangle = 0$ , и формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\delta S(\mathbf{r}) / \langle S \rangle)^n = \langle S \rangle / S(\mathbf{r}),$$

сходящейся, если для всех ориентаций кристаллитов  $|\delta S(\mathbf{r}) / \langle S \rangle| < 1$ . Наше решение справедливо по крайней мере до тех пор, пока анизотропия продольной составляющей ЛТП удовлетворяет этому неравенству. Если это условие выполнено, то в рамках используемого приближения уравнения (41) задают *точное* выражение для тензора  $W_{ik}$ .

Чтобы воспользоваться формулой (I.1) для ЭТП, осталось вычислить тензора  $I_{ik}$  и  $V_{ik}$ . Согласно определению (I.6),  $I_{ik}$  — изотропный тензор второго ранга, компоненты которого зависят от  $\mathbf{\kappa}$ . Следовательно,  $I_{ik} = I_0 \delta_{ik} + I_1 \kappa_i \kappa_k$ . В сильных магнитных полях главные члены разложения  $I_0 = -I_1 \sim H$ , а главный член разложения суммы  $I_0 + I_1 = 1 / \langle S \rangle$ .

Согласно определению (I.5) и (41),

$$V_{ik} = V_{\parallel} \kappa_i \kappa_k + V_{\perp} (\delta_{ik} - \kappa_i \kappa_k), \\ V_{\parallel} = W_{\parallel} (I_0 + I_1) + \frac{W_{\perp}}{H^2} I_1, \quad V_{\perp} = 1 + \frac{W_{\perp}}{H^2} I_0.$$

Используя эти формулы, вычисляем  $V_{ik}^{-1}$ , а затем и ЭТП. С интересующей нас точностью в лабораторной системе координат

$$\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H})|_{r_c \ll l} = \sigma_{\parallel}^{\text{eff}} \delta_{i3} \delta_{k3} + \frac{1}{HR_{\infty}} e_{ik3} + \sigma_{\perp}^{\text{eff}} (\delta_{ik} - \delta_{i3} \delta_{k3}), \quad (42a)$$

$$\sigma_{\parallel}^{\text{eff}} = \frac{1}{\langle 1/S \rangle}; \quad \sigma_{\perp}^{\text{eff}} = \frac{s_{\perp}^{\text{eff}}}{H^2}, \quad s_{\perp}^{\text{eff}} = S_1 + \frac{1}{2} \left\langle \frac{A}{S} \right\rangle, \quad (42b)$$

где  $S_1$  определено формулой (22),  $A = \delta a_{mp}^{(1)} \delta a_{mq}^{(1)} \kappa_p \kappa_q$ .

Результат для  $\sigma_{\parallel}^{\text{eff}}$  очевиден. Если ограничиться вычислением компонент ЭТП, которые не обращаются в нуль при  $H \rightarrow \infty$ , то в лабораторной системе координат из всех компонент ЛТП надо сохранить только одну —  $\sigma_{zz}$ . В инвариантной записи  $\sigma_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) = S(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}) \kappa_i \kappa_k$ . В неоднородном проводнике, в котором все токовые линии параллельны (в данном случае направлены вдоль магнитного поля), средняя проводимость известна (см., например, [29]): она равна обратному значению среднего сопротивления.

Из уравнения (42б) следует, что значение эффективной холловской проводимости такое же, как в монокристаллическом металле: в сильных магнитных полях пространственные флуктуации не влияют на ее величину. Результат для эффективной поперечной проводимости может быть получен только непосредственным вычислением.

### Компенсированный металл

Рассмотрим поликристаллы компенсированных металлов ( $n_e = n_h$ ). Вывод формул для ЭТП мало отличается от изложенного выше. Однако при  $n_e = n_h$ , как уже отмечалось, в лабораторной системе координат слагаемые  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{yx}$ , пропорциональные  $1/H$ , равны нулю. Разложение этих холловских компонент начинается с члена  $O(1/H^3)$ . Поэтому выражение для ЛТП надо дополнить членом, пропорциональным  $1/H^3$ . Итак, при  $n_e = n_h$  вместо формулы (18) исходным служит следующее выражение для ЛТП:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H})|_{r_c \ll l} = S(\boldsymbol{\kappa}) \kappa_i \kappa_k + \frac{1}{H} e_{ikl} a_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}) \kappa_m + \frac{1}{H^2} s_{ik}(\boldsymbol{\kappa}) + \frac{1}{H^3} e_{ikl} a_{lm}^{(2)}(\boldsymbol{\kappa}) \kappa_m. \quad (43)$$

В инвариантной записи условие  $n_e = n_h$  накладывает ограничение на компоненты тензора  $a_{lm}^{(1)}$ :

$$a_{lm}^{(1)} \kappa_l \kappa_m = 0. \quad (44)$$

При вычислении  $\langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle$  по формуле (43) учтем, что  $\langle a_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}) \kappa_m \rangle = \langle a_{pq}^{(1)} \kappa_p \kappa_q \rangle \kappa_l = 0$  (сравни с формулой (20)). Тогда

$$\langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle|_{r_c \ll l} = \langle S \rangle \kappa_i \kappa_k + \frac{1}{H^2} (S_1 \delta_{ik} + S_2 \kappa_i \kappa_k) + \frac{A_2}{H^3} e_{ikl} \kappa_l, \quad (45)$$

где, как и в формуле (21), значения  $S_1$  и  $S_2$  определены формулами (22), а

$$\langle a_{lm}^{(2)}(\boldsymbol{\kappa}) \kappa_m \rangle = \langle a_{pq}^{(2)} \kappa_p \kappa_q \rangle \kappa_l = A_2 \kappa_l. \quad (46)$$

Флуктуирующая часть ЛТП задается выражением

$$\Delta_{ik}(\mathbf{H}, \mathbf{r})|_{r_c \ll l} = \delta S(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}) \kappa_i \kappa_k + \frac{1}{H} e_{ikl} a_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}) \kappa_m + \frac{1}{H^2} \delta s_{ik}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}) + \frac{1}{H^3} e_{ikl} \delta a_{lm}^{(2)}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{r}) \kappa_m. \quad (47)$$

Здесь, как и в формуле (24),  $\langle \delta S \rangle = \langle \delta s_{ik} \rangle = 0$  и, конечно,  $\langle \delta a_{lm}^{(2)} \rangle = 0$ .

Вместо формулы (29) запишем разложение  $w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H})$  с учетом члена  $O(1/H^3)$ :

$$w_{ik}^{(n)} = w_{ik}^{(n;L)} + w_{ik}^{(n;A_1)}/H + w_{ik}^{(n;T)}/H^2 + w_{ik}^{(n;A_2)}/H^3. \quad (48)$$

Для вычисления тензоров, входящих в формулу (48), необходимо вместо выражения (30) записать произведение тензоров

$$\Delta_{il_1}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) \Delta_{j_1 l_2}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_1) \dots \Delta_{j_{n-1} l_n}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_{n-1})$$

с точностью до членов порядка  $1/H^3$ . Вычисление продольной  $w_{ik}^{(n;L)}$  и поперечной  $w_{ik}^{(n;T)}$  составляющих тензоров  $w_{ik}^{(n)}$  тождественно совпадает с расчетом, изложенным выше. Заметим, что, несмотря на выполнение равенства (44), свертка  $A = \delta a_{mp}^{(1)} \delta a_{mq}^{(1)} \kappa_p \kappa_q$ , входящая в выражение для  $\sigma_{\perp}^{\text{eff}}$ , отлична от нуля. Кроме того, в выражении для  $w_{ik}^{(n)}$  член  $O(1/H)$  обращается в нуль.

Единственное отличие — необходимость вычислить тензор  $w_{ik}^{(n;A_2)}$ . Мы показали, что

$$w_{ik}^{(n;A_2)} = -\frac{(-1)^n}{\langle S \rangle^{n-1}} e_{ikl} \langle B \delta S^{n-2} \rangle \kappa_l, \quad (49)$$

$$B = a_{pq}^{(1)} \kappa_p \delta s_{qr} \kappa_r.$$

Теперь, учитывая формулы (33), (39) и (49), суммируем выражения для  $w_{ik}^{(n)}$  по всем  $n$ . В результате получаем

$$W_{ik} = W_{\parallel} \kappa_i \kappa_k + \frac{1}{H^2} W_{\perp} (\delta_{ik} - \kappa_i \kappa_k) + \frac{1}{H^3} W_H e_{ikl} \kappa_l, \quad W_H = -\left\langle \frac{B}{S} \right\rangle, \quad (50)$$

а  $W_{\parallel}$  и  $W_{\perp}$  заданы выражениями (41б).

После этого, вычисляя тензора  $I_{ik}$  и  $V_{ik}$ , находим по формуле (I.1) ЭТП для компенсированного металла. В лабораторной системе координат

$$\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H})|_{r_c \ll l} = \sigma_{\parallel}^{\text{eff}} \delta_{i3} \delta_{k3} + \sigma_{\perp}^{\text{eff}} [\delta_{ik} - \delta_{i3} \delta_{k3}] + \sigma_H^{\text{eff}} e_{ik3}, \quad (51)$$

где  $\sigma_{\parallel}^{\text{eff}}$  и  $\sigma_{\perp}^{\text{eff}}$  заданы уравнениями (42б), а

$$\sigma_H^{\text{eff}} = \frac{a_{\text{eff}}}{H^3}; \quad a_{\text{eff}} = \langle a_{pq}^{(2)} \kappa_p \kappa_q \rangle + \left\langle \frac{B}{S} \right\rangle. \quad (52)$$

Заметим, что при  $n_e = n_h$ , в отличие от случая некомпенсированного металла, флуктуационные поправки влияют на главный член эффективной холловской проводимости.

### 5. Явные выражения для компонент эффективного тензора проводимости (малые поля)

Мы подчеркивали, что задача настоящей статьи — вывод формул для эффективных характеристик ГМЯ в поликристаллах через характеристики кристаллитов — монокристаллов. В предыдущих разделах эта задача выполнена. Нам представляется, что дальнейшее развитие теории — конкретизация полученных формул для поликристаллов различных металлов. Выполнение подобной программы потребует использования упрощающих моделей и компьютерного расчета. Это не входит в нашу задачу.

С другой стороны, опыт фермиологии учит, что запись характеристик в виде интегралов по ПФ в тех случаях, когда в подынтегральном выражении стоят величины, имеющие наглядный физический смысл, оказывается (или лучше сказать, может оказаться) очень полезной. Поэтому приведем выражения для характеристик ГМЯ в случае малых магнитных полей. Особое внимание уделим поликристаллам металлов кубической симметрии, для которых ЭТП описывается *точной* формулой: выражение (17) для поликристаллов не менее точное, чем формула (5) для монокристаллов. Теория ГМЯ [1–3] использует разложение по обратному магнитному полю для решения уравнения Больцмана — вычисления функции распределения электронов проводимости, а с ее помощью — тензора проводимостей. Работа [28] является обобщением этих работ. В ней получено разложение функции распределения и по степеням магнитного поля, которое дает возможность вычислить тензора  $a_{ik}$  и  $S_{iklm}$ , входящие в формулу (5).

Одна из задач этого раздела — сделать формулы наглядными. Поэтому несколько слов об обозначениях. Неравновесная часть функции распределения

$f_1$ , как и вся функция распределения — скаляр. Удобно представить  $f_1$  в виде

$$f_1 = -e \left( \frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon} \right) \mathbf{l}(\mathbf{p}) \mathbf{E}$$

(обозначения общепринятые). Вектор  $\mathbf{l}(\mathbf{p})$  — решение уравнения Больцмана. Выбранное обозначение должно подчеркнуть, что  $\mathbf{l}(\mathbf{p})$  следует/можно считать векторной длиной свободного пробега электронов проводимости. Действительно,

$$\mathbf{l}(\mathbf{p}) = \hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1} \mathbf{v}, \quad (53)$$

где  $\hat{W}_{\mathbf{p}}$  — оператор столкновений, а тензор проводимостей

$$\sigma_{ik} = \langle v_i l_k \rangle_F; \quad \langle \dots \rangle_F = - \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon} dp^3, \quad (54)$$

угловые скобки  $\langle \dots \rangle_F$  обозначают интегрирование по пространству квазиимпульсов. При замене  $-\partial f_F / \partial \varepsilon$  дельта-функцией интегрирование происходит по ПФ.

Если ПФ — сфера, то  $\mathbf{v}$  — собственная функция оператора столкновений, и всегда  $\mathbf{l}(\mathbf{p}) = \tau(\varepsilon) \mathbf{v}$ , где  $\tau(\varepsilon)$  — время релаксации или время свободного пробега электрона с энергией  $\varepsilon$ . В общем случае, при произвольном законе дисперсии  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$ , замена  $\hat{W}_{\mathbf{p}}^{-1}$  на  $\tau(\varepsilon)$  носит название  $\tau$ -приближения, хотя по сути это приближением не является, а фиксирует размерность и порядок величины  $\mathbf{l}(\mathbf{p})$ , если  $\tau$  — по порядку величины — время свободного пробега электрона проводимости.

В случае сферической ПФ, заменив  $(-\partial f_F / \partial \varepsilon)$  в выражении (54) дельта-функцией, немедленно получаем  $\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}$ , где  $\sigma = ne^2 \tau / m_{\text{eff}}$  ( $n$  — плотность электронов проводимости,  $m_{\text{eff}} = p_F / v_F$  — эффективная масса, индекс «F» указывает, что энергия  $\varepsilon$  равна энергии Ферми  $\varepsilon_F$ ).

Когда ПФ имеет сложную форму, можно ввести среднюю длину свободного пробега

$$l_p = \int dS_F |\mathbf{l}(\mathbf{p})| / S_F,$$

где интегрирование ведется по ПФ,  $S_F$  — ее площадь. Используя это обозначение и формулу (54), удельную проводимость кристалла кубической симметрии при  $H = 0$  можно записать в виде

$$\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}, \quad \sigma = \frac{2e^2 S_F l_p}{3(2\pi\hbar)^3}. \quad (55)$$

Преимущество такой записи в ее наглядности.

Теперь воспользуемся результатами работы [28]. Выпишем выражения для симметричной  $\sigma_{ik}^s = \sigma_{ik}^{(0)} + S_{iklm}H_lH_m$  и антисимметричной  $\sigma_{ik}^a = e_{iklm}a_{lm}H_m$  частей тензора проводимостей  $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ :

$$\sigma_{ik}^a = \frac{e}{c} \left\langle [\mathbf{vH}]_q \frac{\partial l_i}{\partial p_q} l_k \right\rangle; \quad (56)$$

$$\sigma_{ik}^s - \sigma_{ik}^{(0)} = -\frac{e^2}{c^2} \left\langle [\mathbf{vH}]_q \frac{\partial l_i}{\partial p_q} \hat{W}^{-1} [\mathbf{vH}]_m \frac{\partial l_k}{\partial p_m} \right\rangle. \quad (57)$$

Эти формулы показывают, какие величины используются при записи выражений для характеристик ГМЯ в малых полях. Тензор второго ранга  $u_{ik} = \partial l_i / \partial p_k$  можно назвать *обобщенным тензором подвижностей*. В общем случае тензор  $u_{ik}$  несимметричен. В  $\tau$ -приближении (когда  $\tau$  — константа) этот тензор симметричен\*:

$$u_{ik} = \tau \frac{\partial v_i}{\partial p_k} = \tau \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p_i \partial p_k} = \tau \left( \frac{1}{m} \right)_{ik}, \quad (58)$$

$1/m_{ik}$  — тензор обратных эффективных масс. Выражение (58) — типичное обобщение изотропной подвижности  $u = \tau/m$  ( $m$  — масса электрона).

В формулы (56), (57) тензор  $u_{ik}$  входит вместе с вектором скорости  $\mathbf{v}$ . Поэтому основным элементом удобно считать тензор 3-го ранга  $\gamma_{ikl} = v_i (\partial l_k / \partial p_l)$  и выразить тензора  $a_{ik}$  и  $S_{iklm}$  через этот тензор. Из формул (55) получаем

$$a_{ik} = \frac{e}{2c} e_{pqi} e_{rsk} \langle \gamma_{spr} l_q \rangle_F; \\ S_{iklm} = -\frac{e^2}{2c^2} e_{pql} e_{rsm} \langle \gamma_{qip} \hat{W}^{-1} \gamma_{skr} + \gamma_{qkp} \hat{W}^{-1} \gamma_{sir} \rangle_F. \quad (59)$$

Выписанные формулы не слишком наглядны, но, скажем, в  $\tau$ -приближении они могут быть существенно упрощены.

Несколько слов о поликристаллах кубических металлов. Как уже отмечалось, для них  $\sigma_{ik}^{(0)} = \sigma_0 \delta_{ik}$ ,  $a_{ik} = a \delta_{ik}$ , что позволяет вычислить ЭТП *точно*.

Сравним выражение (17) с тензором проводимостей  $\sigma_{ik}^{(is)}$  для изотропного тела со сферической ПФ. В малых полях

$$\sigma_{ik}^{(is)} = \sigma_0^{(is)} [\delta_{ik} + h e_{ikl} \kappa_l - h^2 (\delta_{ik} - \kappa_i \kappa_k)], \quad (60)$$

где  $h = \omega_H \tau = eH\tau/mc$ .

Теперь в (17) в соответствии с формулами (59)

$$a = \frac{a_{ll}}{3} = \frac{e}{6c} (\langle \gamma_{spp} l_s \rangle - \langle \gamma_{pps} l_s \rangle), \quad (61)$$

а коэффициенты  $S_1$  и  $S_2$  в соответствии с формулами (7в) суть:

$$S_1 = -\frac{e^2}{15c^2} \{ 2[\langle (\gamma_{skr} - \gamma_{rks}) \hat{W}^{-1} \gamma_{skr} \rangle_F] - \\ - \frac{1}{2} e_{pql} e_{rsk} (\langle \gamma_{qlp} \hat{W}^{-1} \gamma_{skr} + \gamma_{qkp} \hat{W}^{-1} \gamma_{slr} \rangle_F) \}, \quad (62)$$

$$S_2 = -\frac{e^2}{30c^2} \left[ \frac{3}{2} e_{pql} e_{rsk} (\langle \gamma_{qlp} \hat{W}^{-1} \gamma_{skr} + \right. \\ \left. + \gamma_{qkp} \hat{W}^{-1} \gamma_{slr} \rangle_F) - \langle (\gamma_{skr} - \gamma_{rks}) \hat{W}^{-1} \gamma_{skr} \rangle_F \right]. \quad (63)$$

Сравним формулы (17) и (60). Видно, что в (17) коэффициенты при линейном и квадратичном членах по магнитному полю имеют значительно более сложную структуру, чем в формуле (60). Хорошо известно, что в изотропном теле симметричная часть тензора сопротивлений вообще не зависит от магнитного поля (см., например, [16]):  $\rho_{ik}^{(is)} = (\delta_{ik} - h e_{ikl} \kappa_l) / \sigma_0^{(is)}$ . При расчете ЭТС по формуле (17) легко убедиться, что для поликристалла холловский член не компенсирует квадратичное слагаемое. Это еще раз показывает, что даже в случае поликристаллов кубических металлов эффективные ГМЯ характеристики не соответствуют металлу со сферической ПФ.

В  $\tau$ -приближении можно всем величинам, входящим в формулу (17), придать вид, похожий на их вид в формуле (60), но для этого придется ввести четыре различные эффективные массы. Только тогда, когда ПФ сфера, они равны друг другу и совпадают с  $m_{\text{eff}} = p_F / v_F$ .

## 6. Заключение

Основным результатом статьи следует считать вывод формул, позволяющих вычислить характеристики ГМЯ поликристаллов с любой степенью точности по анизотропии характеристик кристаллитов. В тексте приведены все необходимые для вычисления ЭТП формулы (см. Приложение I и разделы 3,4). Как правило, экспериментаторы используют для описания ГМЯ не тензор проводимостей, а тензор сопротивлений. Приведем формулы для ЭТП и ЭТС изотропных в среднем поликристаллов в произвольном магнитном поле. В этом случае ЭТП определяется выражением

\* Зависимость  $\tau$  от  $\varepsilon$  симметрии  $u_{ik}$  не нарушает.

$$\sigma_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H}) = s_1(\delta_{ik} - \kappa_i \kappa_k) + \tilde{a} e_{ikl} \kappa_l + s_3 \kappa_i \kappa_k, \quad (64)$$

где коэффициенты  $s_1$ ,  $s_3$  и  $\tilde{a}$  зависят от величины магнитного поля  $H$ . Для ЭТС из этого выражения получаем

$$\rho_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H}) = \frac{s_1}{s_1^2 + \tilde{a}^2} (\delta_{ik} - \kappa_i \kappa_k) - \frac{\tilde{a}}{s_1^2 + \tilde{a}^2} e_{ikl} \kappa_l + \frac{1}{s_3} \kappa_i \kappa_k. \quad (65)$$

Анализ решений уравнения Больцмана (см. [28,30,31]) выявил соотношения типа неравенств между разными характеристиками ГМЯ. Какие из них сохраняются и в поликристаллах, пока не выяснялось.

Когда ЭТП описывается *точными* формулами, естественно, в той же мере *точны* и формулы для ЭТС. Полученные нами точные решения дают:

1) ЭТС поликристаллов кубических металлов в малых магнитных полях:

$$\rho_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H}) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ \delta_{ik} - \frac{aH}{\sigma_0} e_{ikl} \kappa_l - \frac{1}{\sigma_0} [(S_1 + a^2/\sigma_0)\delta_{ik} + (2S_2 - a^2/\sigma_0)\kappa_i \kappa_k] \right\}, \quad (66)$$

значения  $a$ ,  $S_1$  и  $S_2$  заданы формулами (61)–(63).

2) ЭТС поликристаллов металлов с закрытыми ПФ в сильных магнитных полях:

некомпенсированные металлы ( $n_e \neq n_h$ )

$$\rho_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H}) = s_{\perp}^{\text{eff}} R_{\infty}^2 (\delta_{ik} - \kappa_i \kappa_k) - R_{\infty} H e_{ikl} \kappa_l + \frac{1}{\sigma_{\parallel}^{\text{eff}}} \kappa_i \kappa_k; \quad (67)$$

компенсированные металлы ( $n_e = n_h$ )

$$\rho_{ik}^{\text{eff}}(\mathbf{H}) = \frac{H^2}{s_{\perp}^{\text{eff}}} (\delta_{ik} - \kappa_i \kappa_k) - \frac{a_{\text{eff}}}{s_{\perp}^{\text{eff}}} H e_{ikl} \kappa_l + \frac{1}{\sigma_{\parallel}^{\text{eff}}} \kappa_i \kappa_k. \quad (68)$$

В уравнениях (67),(68)  $s_{\perp}^{\text{eff}}$  и  $\sigma_{\parallel}^{\text{eff}}$  заданы уравнением (426), а  $a_{\text{eff}}$  — уравнением (52).

Естественно, и этого следовало ожидать, усреднение не принесло неожиданностей. Все черты ГМЯ монокристаллов металлов с замкнутыми ПФ сохранились: насыщение поперечного сопротивления с ростом магнитного поля у металлов с неравными числами электронов и дырок и квадратичный рост у металлов с  $n_e = n_h$ .

Хочется подчеркнуть, что настоящее исследование может служить еще одним из явно немногочисленных примеров возможности точно решить задачу о вычислении характеристик реально существующих неупорядоченных сред — в данном случае поликристаллов.

Авторы признательны академику А.М. Дыхне и профессору А.В. Чаплику за ценные замечания и полезные дискуссии по ходу выполнения работы. Работа И.М.К. поддержана грантом РФФИ 02-02-17226.

### Приложение I. ЭТП: ряд теории возмущений

В рамках теории возмущений формальное решение задачи имеет вид (см. [13]):

$$\sigma_{ik}^{\text{eff}} = \langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle - V_{ij}^{-1}(\mathbf{H}) W_{jk}(\mathbf{H}), \quad (I.1)$$

где

$$W_{ik} = \sum_{n=2}^{\infty} w_{ik}^{(n)}; \quad (I.2)$$

$$w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H}) = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{3(n-1)}} \int \dots \int d^3 k_1 \dots d^3 k_{n-1} q_{l_1 j_1}^{(1)} q_{l_2 j_2}^{(2)} \dots q_{l_{n-1} j_{n-1}}^{(n-1)} \times \\ \times \int \dots \int d^3 r_1 \dots d^3 r_{n-1} \exp[-i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})] \exp[-i\mathbf{k}_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] \dots \exp[-i\mathbf{k}_{n-1}(\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_{n-2})] \dots \times \\ \langle \Delta_{i l_1}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) \Delta_{j_1 l_2}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_1) \dots \Delta_{j_{n-1} l_n}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_{n-1}) \rangle. \quad (I.3)$$

Входящие в формулу (I.3) тензора  $q^{(s)}$  суть

$$q_{ik}^{(s)} = \frac{n_i^{(s)} n_k^{(s)}}{Q^{(s)}}, \quad \mathbf{n}^{(s)} = \frac{\mathbf{k}^{(s)}}{k},$$

$$Q^{(s)} = \langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle n_i^{(s)} n_k^{(s)}. \quad (I.4)$$

Тензор  $V_{ij}$  в уравнении (I.1) задается выражением

$$V_{ik} = \delta_{ik} + W_{im} I_{mk}, \quad (I.5)$$



$$I_{ik}(\mathbf{H}) = \int d^3k q_{ik}(\mathbf{H}) \delta(\mathbf{k}). \quad (I.6)$$

Способ вычисления многоточечных корреляторов, входящих в формулу (I.3), описан в Приложении II.

Формула (I.1) позволяет вычислить ЭТП с любой степенью точности по анизотропии, характеризуемой тензором  $\hat{\Delta}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ , если ряд (I.2) для  $W_{ik}$  сходится.

Компактная запись решения, формула (I.1), не должна скрыть сложности полученного результата: выражение для ЭТП содержит два ряда. С ростом номера  $n$  подынтегральные выражения в формуле (I.3) для членов ряда (I.2)  $w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H})$  усложняются. Кроме того, обычно при  $n > 2$  компоненты этих тензоров зависят от статистики направлений кристаллографических осей (см. раздел 3). Выписать ряд для  $\hat{V}^{-1}$  при произвольных значениях поля тоже сложно. В общем случае просуммировать ряды, по-видимому, практически невозможно. Исключение составляет приведенное выше решение для поликристаллов металлов с закрытыми ПФ в больших магнитных полях, когда, используя малость параметра  $r_H/l$ , удастся просуммировать члены ряда (I.2), оставляя только слагаемые  $O((r_H/l)^2)$ .

## Приложение II. Вычисление многоточечных корреляторов

В формулы Приложения I входят многоточечные корреляторы случайных функций, средние значения которых равны нулю. Для простоты вычислим сначала корреляторы скалярных функций  $a(\mathbf{r})$ ,  $b(\mathbf{r})$ ,  $c(\mathbf{r})$  и т.д. ( $\langle a(\mathbf{r}) \rangle = \langle b(\mathbf{r}) \rangle = \langle c(\mathbf{r}) \rangle \dots = 0$ ). Напомним, что мы учитываем неоднородность поликристалла, связанную только с разориентацией зерен. Другие источники неоднородности не учитываются.

Единственное свойство поликристаллов, которое влияет на значение среднего по ансамблю от данной величины, есть поворот кристаллографических осей кристаллитов: усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по всем возможным поворотам кристаллитов.

Пусть в ансамбле все повороты статистически независимы. Тогда при расчете двухточечного среднего  $\langle a(\mathbf{r})b(\mathbf{r}_1) \rangle$  надо рассмотреть два случая:

- 1) векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  находятся в одном зерне,
- 2) векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  — в разных зернах.

Пусть  $W_2([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1])$  — вероятность случая 1. Квадратные скобки указывают, что векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  попадают в один и тот же кристаллит. Если среда статистически однородна и изотропна, то  $W_2([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1]) = W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$ . Вероятность случая 2 есть  $W_2([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1]) = 1 - W_2([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1])$ . Очевидно,  $W_2([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1]) = 1$ , когда  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ . Поскольку в случае 2 двухточечное среднее

$$\langle a(\mathbf{r})b(\mathbf{r}_1) \rangle = \langle a(\mathbf{r}) \rangle \langle b(\mathbf{r}_1) \rangle = 0,$$

получаем

$$\langle a(\mathbf{r})b(\mathbf{r}_1) \rangle = \langle ab \rangle W_2([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1]) + \langle a \rangle \langle b \rangle W_2([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1]) = \langle ab \rangle W_2([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1]). \quad (II.1)$$

Средние, в которых не указаны аргументы, обозначают одноточечные средние. Например,  $\langle ab \rangle = \langle a(\mathbf{r})b(\mathbf{r}) \rangle$ .

Вычисляя среднее трех величин  $\langle a(\mathbf{r})b(\mathbf{r}_1)c(\mathbf{r}_2) \rangle$ , обозначим как  $W_3([\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b], \mathbf{r}_c)$  совместную условную вероятность того, что векторы  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}_b$  попадают в один и тот же кристаллит, а вектор  $\mathbf{r}_c$  попадает в другой кристаллит. Вероятность  $W_3([\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b], \mathbf{r}_c)$  исключает возможность попадания всех трех векторов в один и тот же кристаллит. В соответствии с нашими обозначениями  $W_3([\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b], \mathbf{r}_c)$  — вероятность попадания всех трех векторов в один и тот же кристаллит. Тогда

$$\begin{aligned} \langle a(\mathbf{r})b(\mathbf{r}_1)c(\mathbf{r}_2) \rangle &= \langle a \rangle \langle bc \rangle W_3([\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2], \mathbf{r}) + \\ &+ \langle b \rangle \langle ac \rangle W_3([\mathbf{r}_2], \mathbf{r}_1) + \\ &+ \langle c \rangle \langle ab \rangle W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1], \mathbf{r}_2) + \langle abc \rangle W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]). \end{aligned}$$

Если каждое из средних  $\langle a \rangle = \langle b \rangle = \langle c \rangle = 0$ , то, очевидно,

$$\langle a(\mathbf{r})b(\mathbf{r}_1)c(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle abc \rangle W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]). \quad (II.2)$$

Среднее от четырех скалярных функций, зависящих от четырех разных векторов, записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle a(\mathbf{r})b(\mathbf{r}_1)c(\mathbf{r}_2)d(\mathbf{r}_3) \rangle &= \langle ab \rangle \langle cd \rangle W_4([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1], [\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]) + \\ &+ \langle ac \rangle \langle bd \rangle W_4([\mathbf{r}, \mathbf{r}_2], [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3]) + \\ &+ \langle ad \rangle \langle bc \rangle W_4([\mathbf{r}, \mathbf{r}_3], [\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1]) + \langle abcd \rangle W_4([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]). \end{aligned} \quad (II.3)$$

$W_4([\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b], [\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d])$  — вероятность того, что векторы  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}_b$  попадают в один кристаллит и одновременно с этим векторы  $\mathbf{r}_c$  и  $\mathbf{r}_d$  попадают в другой кристаллит ( $W_4([\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b], [\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d]) = 0$ , если, например, векторы  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}_c$  попадают в один и тот же кристаллит);  $W_4([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3])$  — вероятность того, что все четыре вектора попадают в один кристаллит.

Если мы вычисляем многоточечные корреляторы тензорных величин, то коэффициенты в уравнениях (II.1)–(II.3) — изотропные тензора соответствующего ранга. Эти тензора имеют ту же симметрию относительно перестановки индексов, что и усредняемые случайные тензора. Коэффициенты в выражениях для многоточечных корреляторов могут зависеть только от инвариантов усредняемых тензоров.

Пусть, например,  $\hat{B}$  — симметричный тензор 2-го ранга, компоненты которого являются случайными функциями координат. Такой тензор имеет три независимых инварианта: инвариант первого порядка  $B_1 = B_{kk}/3$  и второго порядка  $B_2 = B_{pq}B_{pq}$ . Два квадратичных инварианта, которые можно построить из компонент такого тензора, суть  $B_1^2$  и  $B_2$ . Если  $B_1 = \langle B_{ik} \rangle = 0$ , то

$$\langle B_{kl}(\mathbf{r})B_{mn}(\mathbf{r}_1) \rangle = \frac{B_2}{30} F_{kl;mn} W_2(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|); \quad (II.4)$$

$$F_{kl;mn} = -2\delta_{kl}\delta_{mn} + 3(\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{lm}).$$

Если  $B_1 = 0$ , то единственный отличный от нуля инвариант 3-го порядка, который можно построить из компонент тензора  $\hat{B}$ , есть  $B_3 = B_{rs}B_{st}B_{tr}$ . Тогда трехточечный коррелятор

$$\langle B_{ik}(\mathbf{r})B_{lm}(\mathbf{r}_1)B_{pq}(\mathbf{r}_2) \rangle = \frac{B_3}{210} F_{ik,lm;pq} W_3(|\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2|), \quad (II.5)$$

где тензор  $F_{ik,lm;pq}$  задается выражением

$$F_{ik,lm;pq} = 16\delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{pq} - 12[\delta_{ik}(\delta_{pl}\delta_{mq} + \delta_{ql}\delta_{pm}) + \delta_{lm}(\delta_{ip}\delta_{kq} + \delta_{iq}\delta_{kp}) + \delta_{pq}(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl})] + 9[\delta_{lq}(\delta_{im}\delta_{kp} + \delta_{ip}\delta_{km}) + \delta_{mq}(\delta_{il}\delta_{kp} + \delta_{ip}\delta_{kl}) + \delta_{mq}(\delta_{il}\delta_{kp} + \delta_{ip}\delta_{kl}) + \delta_{lp}(\delta_{im}\delta_{kq} + \delta_{iq}\delta_{km})]. \quad (II.6)$$

В работе [25] трехточечная корреляционная функция  $W_3(|\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2|)$  была выражена через  $W_2$ :

$$W_3 = \frac{1}{3}(W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) + W_2(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|) \times \\ \times W_2(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)W_2(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|)W_2(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)). \quad (II.7)$$

Равенство (II.7) используется для расчета всех трехточечных корреляторов.

Трехточечный коррелятор двух случайных тензоров  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  ( $\langle B_{ik}(\mathbf{r}) \rangle = \langle C_{ik}(\mathbf{r}) \rangle = 0$ ), например  $\langle B_{ik}(\mathbf{r})B_{lm}(\mathbf{r}_1)C_{pq}(\mathbf{r}_2) \rangle$ , задается выражением (II.5), где  $B_3$  заменяется на инвариант  $B_{rs}B_{st}C_{tr}$ .

До сих пор мы рассматривали средние от величин, компоненты которых зависят только от координат. Пусть усредняемые величины зависят еще и от компонент заданного вектора  $\kappa_i$ . Поскольку в разных кристаллитах компоненты этого вектора различно ориентированы относительно кристаллографических осей, скалярные величины тоже меняются при переходе от кристаллита к кристаллиту.

Если от вектора  $\kappa_i$  зависят компоненты усредняемого тензора  $\hat{R}$ , т.е.  $R_{ik}(\mathbf{r}, \kappa)$ , То формулы усложняются. Например,

$$\langle R_{ik} \rangle = R_1\delta_{ik} + R_2\kappa_i\kappa_k, \quad (II.8)$$

где

$$R_1 = \frac{1}{2}[\langle R_{kk} \rangle - \langle R_{ik} \rangle \kappa_i \kappa_k],$$

$$R_2 = \frac{1}{2}[3\langle R_{ik} \rangle \kappa_i \kappa_k - \langle R_{kk} \rangle].$$

При вычислении средних тензоров 4-го ранга вида  $\langle \hat{R}(\mathbf{r}, \kappa)\hat{R}(\mathbf{r}, \kappa) \rangle$  в выражение (II.4) для тензоров  $F_{kl;mn}$  добавляются слагаемые, содержащие тензора, составленные из компонент  $\kappa$ :

$A(\delta_{kl}\kappa_m\kappa_n + \delta_{mn}\kappa_k\kappa_l) + B(\delta_{km}\kappa_l\kappa_n + \delta_{kn}\kappa_l\kappa_m)$  и  $C\kappa_k\kappa_l\kappa_m\kappa_n$ . Для определения коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ , кроме средних инвариантов самих тензоров, используются средние

$$\langle R_{kk}(\mathbf{r}, \kappa)R_{mn}(\mathbf{r}, \kappa)\kappa_m\kappa_n \rangle,$$

$$\langle R_{kl}(\mathbf{r}, \kappa)R_{kn}(\mathbf{r}, \kappa)\kappa_l\kappa_n \rangle,$$

$$\langle R_{kl}(\mathbf{r}, \kappa)R_{mn}(\mathbf{r}, \kappa)\kappa_k\kappa_l\kappa_m\kappa_n \rangle.$$

Аналогичные формулы позволяют вычислить и средние от тензоров более высокого ранга. Мы не приводим соответствующие формулы из-за их громоздкости.

### Приложение III. Вычисление эффективных гальваномагнитных характеристик в слабых магнитных полях

Чтобы вычислить коэффициенты, входящие в выражение (6) для ЭТП, с точностью до членов  $O(\Delta^3)$ , выпишем тензора  $T_{ik}^{(0,n)}$ ,  $T_{ik,p}^{(1,n)}$  и  $T_{ik,pq}^{(2,n)}$  для  $n = 2, 3$  с точностью до членов, квадратичных по магнитному полю. Используя определения (9) и формулу (8), легко показать, что

$$T_{ik}^{(0,2)} = \frac{1}{\sigma_0} \Delta_{il_1}^{(0)}(\mathbf{r})\Delta_{j_1k}^{(0)}(\mathbf{r}_1)n_{j_1}^{(1)}n_{l_1}^{(1)}; \quad (III.1)$$

$$T_{ik}^{(0,3)} = \frac{1}{\sigma_0^2} \Delta_{il_1}^{(0)}(\mathbf{r})\Delta_{j_1l_2}^{(0)}(\mathbf{r}_1)\Delta_{j_2k}^{(0)}(\mathbf{r}_2)n_{j_1}^{(1)}n_{l_1}^{(1)}n_{j_2}^{(2)}n_{l_2}^{(2)}. \quad (III.2)$$

Напомним, что  $n_i^{(s)} = k_i^{(s)}/k^{(s)}$ . Далее

$$T_{ik,p}^{(1,2)} = \frac{1}{\sigma_0} [e_{il_1p}\delta_{apq}(\mathbf{r})\Delta_{j_1k}^{(0)}(\mathbf{r}_1) + \\ + e_{j_2kp}\delta_{apq}(\mathbf{r}_1)\Delta_{il_1}^{(0)}(\mathbf{r})]n_{j_1}^{(1)}n_{l_1}^{(1)}; \quad (III.3)$$

$$T_{ik,p}^{(1,3)} = \frac{1}{\sigma_0^2} [e_{il_1p} \delta a_{pq}(\mathbf{r}) \Delta_{j_1 l_2}^{(0)}(\mathbf{r}_1) \Delta_{j_2 k}^{(0)}(\mathbf{r}_2) + e_{j_1 l_2 p} \delta a_{pq}(\mathbf{r}_1) \Delta_{il_1}^{(0)}(\mathbf{r}) \Delta_{j_2 k}^{(0)}(\mathbf{r}_2) + e_{j_2 k p} \delta a_{pq}(\mathbf{r}_2) \Delta_{il_1}^{(0)}(\mathbf{r}) \Delta_{j_1 l_2}^{(0)}(\mathbf{r}_1)] n_{j_1}^{(1)} n_{l_1}^{(1)} n_{j_2}^{(2)} n_{l_2}^{(2)}. \quad (III.4)$$

Выражение для  $T_{ik,pq}^{(2,n)}$  удобно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$T_{ik,pq}^{(2,n)} = X_{ik,pq}^{(0,n)} + X_{ik,pq}^{(1,n)} + X_{ik,pq}^{(2,n)}, \quad (III.5)$$

где тензор  $X_{ik,pq}^{(0,n)}$  связан с зависимостью компонент тензора  $q_{ik}^{(s)}$  от  $H^2$ :

$$X_{ik,pq}^{(0,n)} = -\frac{S_1 + 2S_2}{\sigma_0} T_{ik}^{(0,n)} \sum_{r=1}^{n-1} (n_p^{(r)} n_q^{(r)}); \quad n = 2, 3, \quad (III.6)$$

тензор  $X_{ik,pq}^{(1,n)}$  включает в себя слагаемые, в которые входят два тензора  $\delta a$ :

$$X_{ik,pq}^{(1,2)} = \frac{1}{\sigma_0} e_{il_1 r} e_{j_1 k s} \delta a_{rp}(\mathbf{r}) \delta a_{sq}(\mathbf{r}_1) n_{j_1}^{(1)} n_{l_1}^{(1)}, \quad (III.7)$$

$$X_{ik,pq}^{(1,3)} = \frac{1}{\sigma_0^2} [e_{il_1 r} e_{j_1 l_2 s} \delta a_{rp}(\mathbf{r}) \delta a_{sq}(\mathbf{r}_1) \Delta_{j_2 k}^{(0)}(\mathbf{r}_2) + e_{j_2 k r} e_{j_1 l_2 s} \delta a_{rp}(\mathbf{r}_2) \delta a_{sq}(\mathbf{r}_1) \Delta_{il_1}^{(0)}(\mathbf{r}) + e_{il_1 r} e_{j_2 k s} \delta a_{rp}(\mathbf{r}) \delta a_{sq}(\mathbf{r}_2) \Delta_{j_1 l_2}^{(0)}(\mathbf{r}_1)] n_{j_1}^{(1)} n_{l_1}^{(1)} n_{j_2}^{(2)} n_{l_2}^{(2)}.$$

Тензор  $X_{ik,pq}^{(2,n)}$  в уравнении (III.5) включает в себя тензора  $\delta S_{ik,pq}(\mathbf{r})$ :

$$X_{ik,pq}^{(2,2)} = \frac{1}{\sigma_0} [\delta S_{il_1;pq}(\mathbf{r}) \Delta_{j_1 k}^{(0)}(\mathbf{r}_1) + \delta S_{j_1 k;pq}(\mathbf{r}_1) \Delta_{il_1}^{(0)}(\mathbf{r})] n_{j_1}^{(1)} n_{l_1}^{(1)},$$

$$X_{ik,pq}^{(2,3)} = \frac{1}{\sigma_0^2} [\delta S_{il_1;pq}(\mathbf{r}) \Delta_{j_1 l_2}^{(0)}(\mathbf{r}_1) \Delta_{j_2 k}^{(0)}(\mathbf{r}_2) + \delta S_{j_1 l_2;pq}(\mathbf{r}_1) \Delta_{il_1}^{(0)}(\mathbf{r}) \Delta_{j_2 k}^{(0)}(\mathbf{r}_2) + \delta S_{j_2 k;pq}(\mathbf{r}_2) \Delta_{il_1}^{(0)}(\mathbf{r}) \Delta_{j_1 l_2}^{(0)}(\mathbf{r}_1)] n_{j_1}^{(1)} n_{l_1}^{(1)} n_{j_2}^{(2)} n_{l_2}^{(2)}. \quad (III.8)$$

Определив тензора  $T_{ik}^{(0,n)}$ ,  $T_{ik,p}^{(1,n)}$  и  $T_{ik,pq}^{(2,n)}$  для  $n = 2, 3$ , вычислим средние от свертков этих тензоров, входящие в тензора  $\hat{Q}^{(r,n)}$ . Поскольку значения  $Q^{(0,n)}$  рассчитаны в разделе 3, осталось рассмотреть  $r = 1, 2$ . В соответствии с формулой (10), при  $r = 1$

$r = 1$  необходимо вычислить средние  $\langle T_{ik,p}^{(1,n)} e_{ikp} / 6 \rangle$ . Используя формулы Приложения II, получаем

$$\frac{1}{6} \langle T_{ik,p}^{(1,2)} e_{ikp} \rangle = -\frac{A_2}{9\sigma_0} W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|); \quad A_2 = \Delta_{kl}^{(0)} \delta a_{lk}; \quad (III.9)$$

$$\frac{1}{6} \langle T_{ik,p}^{(1,3)} e_{ikp} \rangle = \frac{A_3}{45\sigma_0^2} [1 - 3(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2] W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]). \quad (III.10)$$

Здесь  $A_3 = \Delta_{kl}^{(0)} \Delta_{lm}^{(0)} \delta a_{mk}$ . Подставляя формулы (III.9) и (III.10) в интеграл (I.3), получаем выражение для  $A_H$ , приведенное в формуле (14).

Чтобы вычислить коэффициенты  $\beta_{\parallel}^{(1)}$ ,  $\beta_{\parallel}^{(2)}$ ,  $\beta_{\perp}^{(1)}$  и  $\beta_{\perp}^{(2)}$ , определяющие зависимость от  $H$  симметричной части ЭТП (см. (6) и (15)), вычислим средние от свертков тензоров  $X_{ik,pq}^{(0,n)}$ ,  $X_{ik,pq}^{(1,n)}$  и  $X_{ik,pq}^{(2,n)}$ , требующиеся для расчета коэффициентов  $Q_1^{(2,n)}$  и  $Q_2^{(2,n)}$  в формуле (10).

При  $n = 2$  из формул (III.6), (III.4) и (III.5) имеем

$$\langle X_{kk,pp}^{(0,2)} \rangle = -\frac{(S_1 + 2S_2)D_2}{3\sigma_0^2} W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|), \quad (III.11)$$

$$\langle X_{kp;kp}^{(0,2)} \rangle = -\frac{2(S_1 + 2S_2)D_2}{15\sigma_0^2} W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|).$$

Напомним,  $D_2 = \Delta_{kl}^{(0)} \Delta_{lk}^{(0)}$ . При  $n = 3$  получаем

$$\langle X_{kk,pp}^{(0,3)} \rangle = -\frac{(S_1 + 2S_2)D_3}{15\sigma_0^3} [1 + 3(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2] W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]),$$

$$\langle X_{pk,pk}^{(0,3)} \rangle = -\frac{(S_1 + 2S_2)D_3}{105\sigma_0^3} \times [19(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2 - 3] W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]).$$

Здесь  $D_3 = \Delta_{pq}^{(0)} \Delta_{qr}^{(0)} \Delta_{rp}^{(0)}$ .

Далее, из формул (III.7) находим:

$$\langle X_{kk,pp}^{(1,2)} \rangle = -\frac{2B_2}{3\sigma_0} W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|); \quad B_2 = \delta a_{rp} \delta a_{rp}. \quad (III.12)$$

Если  $\delta a_{rp}$  — симметричный тензор, то  $\langle X_{kp;kp}^{(1,2)} \rangle = 0$ .

$$\langle X_{kk,pp}^{(1,3)} \rangle = \frac{B_3}{30\sigma_0^2} [13 - 9(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2] W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]),$$

$$\langle X_{kp;kp}^{(1,3)} \rangle = -\frac{B_3}{6\sigma_0^2} [1 - (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2] W_3([\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]),$$

где инвариант  $B_3 = \delta a_{rs} \delta a_{st} \Delta_{tr}^{(0)}$ .

Наконец, из формул (III.8) получаем при  $n = 2$

$$\langle X_{kk,pp}^{(2,2)} \rangle = \frac{2Z_1^{(2)}}{3\sigma_0} W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|); \quad Z_1^{(2)} = \delta S_{kl;pp} \Delta_{kl}^{(0)},$$

$$\langle X_{kp,kp}^{(2,2)} \rangle = \frac{2Z_2^{(2)}}{3\sigma_0} W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|); \quad Z_2^{(2)} = \delta S_{kl;kp} \Delta_{lp}^{(0)}. \quad (III.13)$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} Z_1^{(3)} &= \delta S_{st;rr} \Delta_{tu}^{(0)} \Delta_{su}^{(0)}, & Z_2^{(3)} &= \delta S_{rs;rt} \Delta_{tu}^{(0)} \Delta_{su}^{(0)}, \\ Z_3^{(3)} &= \delta S_{rr;st} \Delta_{tu}^{(0)} \Delta_{su}^{(0)}, & Z_4^{(3)} &= \delta S_{tu;rs} \Delta_{rt}^{(0)} \Delta_{us}^{(0)}, \end{aligned} \quad (III.14)$$

то

$$\langle X_{kk,pp}^{(2,3)} \rangle = \frac{Z_1^{(3)}}{10\sigma_0^2} [3 + (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2] W_3(|\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2|),$$

$$\langle X_{kp,kp}^{(2,3)} \rangle = \frac{1}{30\sigma_0^2} [\tilde{Z} + \tilde{Z}_n (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2] W_3(|\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2|),$$

где

$$\tilde{Z} = 6Z_2^{(3)} - Z_3^{(3)} + 3Z_4^{(3)}; \quad \tilde{Z}_n = 2Z_2^{(3)} + 3Z_3^{(3)} + Z_4^{(3)}.$$

Подставляя выражения (III.9) – (III.14) в интегралы, определяющие  $w_{ik}^{(2)}(\mathbf{H})$  и  $w_{ik}^{(3)}(\mathbf{H})$  (см. (I.3)), получаем ряд (I.2) с точностью до членов  $O(\Delta^3)$  по анизотропии и  $O(H^2)$  по магнитному полю:

$$W_{ik} \approx w_{ik}^{(2)}(\mathbf{H}) + w_{ik}^{(3)}(\mathbf{H}), \quad (III.15)$$

где

$$\begin{aligned} w_{ik}^{(n)}(\mathbf{H}) &= w_0^{(n)} \delta_{ik} + H w_1^{(n)} e_{ikq} \kappa_q + \\ &+ H^2 (w_2^{(n,1)} \delta_{ik} + w_2^{(n,2)} \kappa_i \kappa_k). \end{aligned}$$

Здесь

$$w_0^{(2)} = \frac{D_2}{9\sigma_0}; \quad w_0^{(3)} = -\frac{D_3}{30\sigma_0^2} (1 + F_3^{(st)}), \quad (III.16)$$

$$w_1^{(2)} = -\frac{A_2}{9\sigma_0}; \quad w_1^{(3)} = -\frac{2A_3}{15\sigma_0^2} (1 - 3F_3^{(st)}), \quad (III.17)$$

$$\begin{aligned} w_2^{(2,1)} &= \frac{2}{45} \left\{ -\frac{4(S_1 + 2S_2)}{5\sigma_0^2} D_2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\sigma_0} (2Z_1^{(2)} - Z_2^{(2)} - 2B_2) \right\}; \quad (III.18) \end{aligned}$$

$$w_2^{(2,2)} = \frac{1}{45} \left\{ -\frac{S_1 + 2S_2}{5\sigma_0^2} D_2 + \frac{2}{\sigma_0} (-Z_1^{(2)} + 3Z_2^{(2)} + B_2) \right\}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} w_2^{(3,1)} &= -\frac{(S_1 + 2S_2)D_3}{35\sigma_0^3} \left(1 - \frac{1}{9} F_3^{(st)}\right) + \\ &+ \frac{B_3}{450\sigma_0^2} (31 - 23F_3^{(st)}) + \frac{1}{450\sigma_0^2} \times \\ &\times [(18Z_1^{(3)} - \tilde{Z}) + (6Z_1^{(3)} - \tilde{Z}_n) F_3^{(st)}], \end{aligned} \quad (III.19)$$

$$\begin{aligned} w_2^{(3,2)} &= \frac{2(S_1 + 2S_2)D_3}{105\sigma_0^3} \left(1 - \frac{5}{3} F_3^{(st)}\right) - \\ &- \frac{2B_3}{225\sigma_0^2} (7 - 6F_3^{(st)}) + \frac{1}{150\sigma_0^2} \times \\ &\times [(-3Z_1^{(3)} + \tilde{Z}) + (-Z_1^{(3)} + \tilde{Z}_n) F_3^{(st)}]. \end{aligned}$$

Итак, формулы (III.15)–(III.19) определяют тензор  $W_{ik}(\mathbf{H})$  с точностью  $O(\Delta^3)$ . Теперь, чтобы воспользоваться формулой (I.1) для ЭТП, надо в том же приближении вычислить тензор  $V_{ik}^{-1}(\mathbf{H})$ . Однако из выражения (I.5) следует, что  $V_{ik}^{-1}(\mathbf{H}) = \delta_{ik} + \delta V_{ik}^{-1}(\mathbf{H})$ , где  $\delta V_{ik}^{-1}(\mathbf{H})$  учитывает зависимость компонент этого тензора от анизотропии. Как и компоненты тензора  $W_{ik}(\mathbf{H})$ , компоненты тензора  $\delta V_{ik}^{-1}(\mathbf{H})$  содержат члены второго и третьего порядка по анизотропии. Следовательно, компоненты тензора  $\delta V_{ij}^{-1}(\mathbf{H}) W_{jk}(\mathbf{H})$  по крайней мере четвертого порядка по анизотропии. Учет таких членов превышает точность используемого приближения. Таким образом, если учитываются только члены третьего порядка по анизотропии, то

$$\sigma_{ik}^{\text{eff}} = \langle \sigma_{ik}(\mathbf{H}) \rangle - W_{ik}(\mathbf{H}). \quad (III.20)$$

В заключение выпишем в явном виде формулы для  $\beta_{\parallel}^{(1)}, \beta_{\parallel}^{(2)}, \beta_{\perp}^{(1)}$  и  $\beta_{\perp}^{(2)}$ , входящие в коэффициенты  $\alpha_{\parallel}$  и  $\alpha_{\perp}$ , описывающие зависимость симметричной части ЭТП от магнитного поля. Для продольной проводимости

$$\begin{aligned} \beta_{\parallel}^{(1)} &= -\frac{S_1 + 2S_2}{25\sigma_0^2} (D_2 + \frac{5D_3}{21\sigma_0}) + \\ &+ \frac{2}{45\sigma_0} (Z_1^{(2)} + 2Z_2^{(2)} - 2B_2^{(2)}) + \frac{B_3}{150\sigma_0^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{150\sigma_0^2} (3Z_1^{(3)} + 4Z_2^{(3)} - \frac{2}{3}Z_3^{(3)} + 2Z_4^{(3)}), \quad (\text{III.21})$$

$$\beta_{\parallel}^{(2)} = -\frac{(S_1 + 2S_2)D_3}{35\sigma_0^3} + \frac{B_3}{450\sigma_0^2} + \frac{1}{150\sigma_0^2} (Z_1^{(3)} + \frac{4}{3}Z_2^{(3)} + 2Z_3^{(3)} + \frac{2}{3}Z_4^{(3)}),$$

а для поперечной проводимости

$$\beta_{\perp}^{(1)} = -\frac{S_1 + 2S_2}{5\sigma_0^2} \left( \frac{8}{45}D_2 + \frac{D_3}{7\sigma_0} \right) + \frac{2}{45\sigma_0} (2Z_1^{(2)} - Z_2^{(2)} - 2B_2^{(2)}) + \frac{17B_3}{450\sigma_0^2} + \frac{1}{300\sigma_0^2} (11Z_1^{(3)} + 2Z_2^{(3)} - \frac{1}{3}Z_3^{(3)} + Z_4^{(3)}), \quad (\text{III.22})$$

$$\beta_{\perp}^{(2)} = \frac{(S_1 + 2S_2)D_3}{315\sigma_0^3} - \frac{11B_3}{450\sigma_0^2} + \frac{1}{300\sigma_0^2} (3Z_1^{(3)} + \frac{2}{3}Z_2^{(3)} + Z_3^{(3)} + \frac{1}{3}Z_4^{(3)}).$$

В формулах (III.21) и (III.22) инварианты  $D_2, D_3, B_2$  и  $B_3$  заданы формулами (III.11), (III.12);  $Z_1^{(2)}$  и  $Z_2^{(2)}$  определены уравнениями (III.13), а  $Z_r^{(2)}$  ( $r = 1, 2, 3, 4$ ) — уравнением (III.14).

#### Приложение IV. Сравнение флуктуационных поправок, обязанных холловской проводимости, для изотропного неоднородного металла и поликристалла (большие поля)

В работе [11] показано, что в сильных магнитных полях расчет поперечной эффективной проводимости изотропного неоднородного металла нельзя выполнить методом теории возмущений. В таком проводнике  $\sigma_{\perp}^{\text{eff}} \propto 1/H^{4/3}$ . Источником необычно большого значения  $\sigma_{\perp}^{\text{eff}}$  являются флуктуации холловской компоненты тензора локальной проводимости. Для упрощения вычислений предположим, что флуктуации испытывают только холловские компоненты тензора проводимостей. Сравним значения  $w_{\perp}^{(2)} = (w_{kk}^{(2)} - w_{ik}^{(2)} \kappa_i \kappa_k) / 2$ , обусловленные такими флуктуациями, для изотропного неоднородного металла и поликристалла.

В соответствии с формулой (28), в этом случае ЛТП изотропного неоднородного металла

$$\sigma_{ik}^{(is)}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) = \sigma_0 [\kappa_i \kappa_k + \frac{1}{h} e_{ikl} \kappa_l + \frac{1}{h^2} \delta_{ik}] + \Delta_{ik}^{(is)}(\mathbf{H}, \mathbf{r}); \quad \Delta_{ik}^{(is)}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) = \frac{\Delta(\mathbf{r})}{h} e_{ikl} \kappa_l. \quad (\text{IV.1})$$

Для поликристалла положим, что ЛТП есть

$$\sigma_{ik}^{(p)}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) = \langle \sigma_{ik}^{(p)}(\mathbf{H}) \rangle + \Delta_{ik}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{H}); \quad \Delta_{ik}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) = \frac{1}{H} e_{ikl} \delta a_{lm}^{(1)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}) \kappa_m, \quad (\text{IV.2})$$

где тензор  $\langle \sigma_{ik}^{(p)}(\mathbf{H}) \rangle$  задан формулой (21), а для флуктуирующего тензора  $\delta a_{lm}^{(1)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa})$  выполняется равенство (23).

Вычислим первую флуктуационную поправку  $w_{\perp}^{(is;2)}$  для изотропного неоднородного металла (см. формулу (I.3)). Тензор  $q_{ik}^{(is)}$ , входящий в выражение для  $w_{\perp}^{(is;2)}$ , есть

$$q_{ik}^{(is,1)} = \frac{n_i^{(1)} n_k^{(1)}}{\sigma_0 [(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{n}^{(1)})^2 + 1/h^2]}. \quad (\text{IV.3})$$

Используя выражение (IV.1), легко проверить, что свертка

$$\Delta_{il_1}^{(is)}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \Delta_{j_1 k}^{(is)}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \kappa_j \kappa_k = 0.$$

Это означает, что  $w_{\perp}^{(is;2)} = w_{kk}^{(is;2)} / 2$ . Полагая, что проводник в среднем статистически однороден и изотропен, имеем

$$\langle \Delta_{kl_1}^{(is)}(\mathbf{r}) \Delta_{j_1 k}^{(is)}(\mathbf{r}_1) \rangle = -\langle \Delta^2 \rangle (\delta_{j_1 l_1} - \kappa_{j_1} \kappa_{l_1}) W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|),$$

где  $W_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$  — корреляционная функция, получаем

$$w_{\perp}^{(is;2)} = -\frac{\langle \Delta^2 \rangle}{4\sigma_0 h^2} \int_{-1}^1 dx_1 \frac{1 - x_1^2}{x_1^2 + 1/h^2} \approx -\frac{\langle \Delta^2 \rangle \pi}{4\sigma_0 h}; \quad x_1 = \boldsymbol{\kappa} \mathbf{n}^{(1)}. \quad (\text{IV.4})$$

При выводе уравнения (IV.4) учтено равенство

$$W_2(0) = \int d^3 k W_2(k) = 1.$$

Следовательно,  $w_{\perp}^{(is;2)} \propto 1/h$ , в то время как  $\langle \sigma_{\perp}^{is} \rangle \propto 1/h^2$ . Можно видеть, что при  $n > 2$  выражения для  $w_{\perp}^{(is;n)}$  зависят от статистики распределения случайной функции  $\Delta(\mathbf{r})$ . Мы показали, что если эта случайная функция распределена по Гауссу (отличны от нуля только значения  $w_{\perp}^{(is;n)}$  с четными номерами  $n$ ), то значение  $w_{\perp}^{(is;4)} \propto \langle \Delta^2 \rangle^2 / \sigma_0^3$ .

Итак, средняя поперечная проводимость порядка  $\sigma_0/h^2$ , а за счет флуктуаций холловской компоненты ЛТП члены  $w_{(is;n)}$  ряда для тензора  $W_{ik}$  порядка  $(\langle \Delta^n \rangle / \sigma_0^{n-1}) h^{n/2-2}$ . При  $h \gg 1$  такой ряд сходится, только если  $h \langle \Delta^2 \rangle / \sigma_0^2 \ll 1$ . Это неравенство соответствует указанным Дрейзиным и Дыхне границам применимости теории возмущений для вычисления эффективной поперечной проводимости изотропного неоднородного проводника.

Может показаться, что и в поликристаллах полный учет флуктуаций холловских компонент ЛТП, приводящий к появлению в произведении

$$\Delta_{i_1}(\mathbf{H}, \mathbf{r}) \Delta_{j_1 b_2}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_1) \dots \Delta_{j_{n-1} k}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_{n-1})$$

членов порядка  $1/H^n$  ( $n > 2$ ), приведет к появлению в выражениях для  $w_{\perp}^{(n)}$  членов, больших по сравнению с членами порядка  $1/H^2$ . Однако это не так, благодаря выполнению равенства  $\delta a_{ik}^{(1)} \kappa_j \kappa_k = 0$ .

Для проверки этого утверждения достаточно вычислить выражения для  $w_{\perp}^{(p;n)}$  в случае, когда флуктуации ЛТП задаются тензором  $\Delta_{ik}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$  (IV.2).

Начнем с вычисления  $w_{\perp}^{(p;2)}$ . В этом случае  $\Delta_{i_1}^{(p)}(\mathbf{r}) \Delta_{j_1 k}^{(p)}(\mathbf{r}) = e_{i_1 m} e_{j_1 k m_1} \delta a_{mn}^{(1)} \kappa_n \delta a_{m_1 n_1}^{(1)} \kappa_{n_1}$ . В силу выполнения равенства (23) среднее

$$\langle \delta a_{mn}^{(1)} \kappa_n \delta a_{m_1 n_1}^{(1)} \kappa_{n_1} \rangle = \frac{\langle A \rangle}{2} (\delta_{mm_1} - \kappa_m \kappa_{m_1}). \quad (\text{IV.5})$$

Теперь, используя выражение (26) для тензора  $q_{i_1 j_1}^{(1)}$ , получаем

$$w_{\perp}^{(p;2)} = -\frac{\langle A \rangle}{2H^2 \langle S \rangle} \int d^3 k_1 \frac{(\kappa \mathbf{n}_1)^2 W_2(k_1)}{[(\kappa \mathbf{n}_1)^2 + \alpha^2]} \approx -\frac{\langle A \rangle}{2H^2 \langle S \rangle}.$$

(сравни с формулой (IV.4)). Здесь  $A$  задано выражением (38). Член  $w_{\perp}^{(p;2)}$  был учтен при суммировании ряда (41) для  $W_{\perp}$ .

Как мы видели в разделе 4, при использовании разложения (30) значения  $w_{\perp}^{(2n-1)}$  отличны от нуля (см. формулу (39)). Если же флуктуации ЛТП задаются тензором  $\Delta_{ik}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ , все нечетные поправки  $w_{\perp}^{(p;2n-1)} = 0$ . Это связано с тем, что из-за равенства (23) все средние от нечетного числа векторов  $\delta a_{mn}^{(1)} \kappa_n$  обращаются в нуль. В частности,  $w_{\perp}^{(p;3)} = 0$ .

Используя метод вычисления средних, изложенный в Приложении II, можно рассчитать выражения для  $w_{\perp}^{(p;2n)}$  при произвольном значении  $n$ . Однако это очень трудоемкая работа. Мы проверили, что  $w_{\perp}^{(p;4)} \sim 1/H^3$ . Можно надеяться, что при всех  $n > 2$  из-за специфического вида средних  $\langle \delta a_{mn} \delta a_{m_1 n_1} \dots \delta a_{m_{2n-1} n_{2n-1}} \kappa_n \kappa_{n_1} \dots \kappa_{n_{2n-1}} \rangle$  поправки  $w_{\perp}^{(p;2n)}$  будут малы по параметру  $1/H$  в сравнении с членами порядка  $1/H^2$ , учтенными в выражении (426) для  $W_{\perp}$ . Если это так, то полученное нами выражение (426) для  $\sigma_{\perp}^{\text{eff}}$  является *точным* в рамках рассматриваемого приближения.

1. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, *ЖЭТФ* **31**, 63 (1956).
2. И.М. Лифшиц, В.Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **35**, 1251 (1958).
3. И.М. Лифшиц, В.Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **38**, 188 (1960).
4. Е.С. Боровик, *ЖЭТФ* **25**, 91 (1952).
5. Е.С. Боровик, *ФММ* **2**, 33 (1956).
6. Ю.П. Гайдуков, *Топология поверхностей Ферми (справочная таблица). Приложение III к монографии* [7].
7. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
8. Д. Шенберг, *Магнитные осцилляции в металлах*, Мир, Москва (1986).
9. П.Л. Капица, *Изменение электропроводности в сильных магнитных полях. Избранные труды*, Наука, Москва (1988).
10. L.V. Shubnikov and W.J. de Haas, *Leiden Commun.* **19**, 2071 (1930).
11. Ю.А. Дрейзин, А.М. Дыхне, *ЖЭТФ* **63**, 242 (1972).
12. М.И. Kaganov and V.G. Peschanskii, *Phys. Rep.* **372**, 445 (2002).
13. I.M. Kaganova and M.I. Kaganov, *Lazar Physics* **14**, 416 (2004).
14. И.М. Лифшиц, Л.Н. Розенцвейг, *ЖЭТФ* **16**, 967 (1946).
15. И.М. Лифшиц, Г.Д. Пархомовский, *ЖЭТФ* **20**, 175 (1950).
16. И.М. Лифшиц, М.И. Каганов, В.М. Цукерник, в кн: *Избранные труды И.М. Лифшица*, Наука, Москва (1987).
17. I.M. Kaganova and A.A. Maradudin, *Phys. Scr.* **T44**, 104 (1992).
18. И.М. Каганова, М.И. Каганов, *ФНТ* **22**, 929 (1996).
19. I.M. Kaganova, *Phys. Rev.* **B51**, 5333 (1995).
20. А.М. Dykhne and I.M. Kaganova, *Physica* **A241**, 154 (1997).
21. М.А. Леонтович, в кн: *Исследование распространения радиоволн*, Гостехиздат, Москва (1948).
22. I.M. Kaganova and M.I. Kaganov, *Phys. Rev.* **B63**, 054202 (2001).
23. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
24. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
25. I.M. Kaganova, *Phys. Lett.* **A312**, 108 (2003).
26. М.И. Каганов, *ЖЭТФ* **77**, 250 (1979).
27. *Физическая энциклопедия*, т. 3, Большая Российская энциклопедия, Москва (1992).
28. М.И. Каганов, В.Г. Песчанский, в сб. *Исследование электронного спектра в металлах*, Наукова думка, Киев (1965).
29. А.Г. Фокин, *УФН* **166**, 1096 (1966).

30. Г.Т. Аванесян, М.И. Каганов, *ЖЭТФ* **63**, 1472 (1972).  
31. Г.Т. Аванесян, М.И. Каганов, *ЖЭТФ* **69**, 999 (1975).

**On the theory of galvanomagnetic  
phenomena in polycrystalline metals**

**I.M. Kaganova and M.I. Kaganov**

We formulate an algorithm of calculation of the effective conductivity tensor of polycrystalline metals in a uniform magnetic field using the galvanomagnetic characteristics of single crystal grains. The algorithm is based on the expansion in powers of deviations of the tensors from their av-

eraged values. The effective conductivity tensor is calculated in two limiting cases: in weak magnetic fields for polycrystals of metals with an arbitrary electron energy spectrum and in strong magnetic fields for metals with closed Fermi surfaces. In the last case the starting formulae are the result of the theory of galvanomagnetic phenomena, which uses the classic Boltzmann equation for the distribution function of electrons with an arbitrary dispersion law. For polycrystals of cubic metals in weak magnetic fields and polycrystals of metals with closed Fermi surfaces in strong magnetic fields the obtained formulae are of the same accuracy as that of the initial expressions.