

Пространственно-временная структура диссипативных магнитных потоков в сверхпроводниках второго рода

Ю.В. Медведев, И.Б. Краснюк

*Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, 83114, Украина
medvedev@kinetic.ac.donetsk.ua*

Статья поступила в редакцию 10 декабря 2004 г., после переработки 10 июня 2005 г.

Рассмотрена нелинейная краевая задача о проникновении магнитного поля b в сверхпроводящее полупространство с сопротивлением $\rho_f(b) \sim b^\sigma$ при условии, что на границе образца амплитуда поля возрастает со временем степенным образом ($b(0,t) \sim (1+t)^m$, $m > 0$) или в режиме обострения ($b(0,t) \sim (1-t/t_0)^m$, $m < 0$, $0 < t < t_0$). Указаны условия на значения параметров m и σ , при которых возможны различные сценарии проникновения магнитного потока. Рассчитана скорость фронта магнитного потока, зависящая от параметров m и σ .

Розглянуто нелінійну крайову задачу про проникнення магнітного поля b у надпровідний напівпростір з опором $\rho_f(b) \sim b^\sigma$ при умові, що на межі зразку амплітуда поля зростає з часом степеневим чином ($b(0,t) \sim (1+t)^m$, $m > 0$) або у режимі загострення ($b(0,t) \sim (1-t/t_0)^m$, $m < 0$, $0 < t < t_0$). Указано умови на значення параметрів m і σ , при виконанні яких можливі різні сценарії проникнення магнітного потоку. Розраховано швидкість фронту магнітного потоку, яка залежить від параметрів m і σ .

PACS: 74.60.Ge

Закономерности проникновения магнитного поля внутрь сверхпроводящих сред рассмотрены в многочисленных работах (см., например, [1–5]). Подробный анализ этих процессов в изотермическом случае при нарастающем с постоянной скоростью поле для сверхпроводников второго рода с различными типами вольт-амперных характеристик проведен в [1]. Скорость движения и структура электромагнитной волны с учетом неизоотермической динамики потока исследована, например, в [3–5]. Однако в работах [3–5] поле на границе образца фиксировалось, т.е. рассматривался вопрос устойчивости критического состояния на внешние возмущения. Такая термомангнитная неустойчивость приводит к аномалиям зарождения и распространения нормальной фазы в зависимости от электродинамических условий на поверхности образца [5].

В настоящей работе исследованы диссипативные процессы распространения магнитного потока в сверхпроводящих средах с модельным удельным со-

противлением $\rho_f(b) = \rho_n b^\sigma$, $\sigma > 0$ (здесь ρ_n — удельное сопротивление в нормальном состоянии, $b = B/B_{c2}$, где B_{c2} — второе критическое поле) в случае, когда внешнее магнитное поле на границе образца меняется по степенному закону или в режиме с обострением. Исследование основано на анализе автомодельных решений параболических уравнений (см. [6]), описывающих процесс проникновения растущего во времени магнитного поля в среду с конечной проводимостью.

Рассмотрим стандартную задачу о проникновении магнитного потока в полубесконечный сверхпроводник, помещенный в однородное внешнее магнитное поле, параллельное его граничной поверхности: $\mathbf{B} \parallel \mathbf{z}$, $\mathbf{j} \parallel \mathbf{y}$, $E = \rho_f(b)(j - j_c)$. Здесь j_c — критический ток. Будем предполагать, что температура сверхпроводника совпадает с температурой охладителя, т.е. пренебрежем неизотермичностью процесса.

Взаимосвязь между магнитной индукцией, электрическим полем \mathbf{E} и плотностью транспортного тока \mathbf{j} устанавливается уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1)$$

где c — скорость света.

Из системы (1) и определения поля \mathbf{E} следует, что \mathbf{B} удовлетворяет обобщенному уравнению Бюргера. В безразмерной форме (при замене переменных $b = B/B_{c2}$, $x = \lambda x$, $t = t_h t$, где λ — лондоновская глубина проникновения, $t_h = 4\pi\lambda^2/c^2\rho_n$) — характерное время диффузии магнитного поля это уравнение имеет следующий вид (черту в обозначениях переменных мы опускаем):

$$b_t - c(b)b_x = \rho_n^{-1}[\rho_f(b)b_x]_x, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad \sigma > 0. \quad (2)$$

Здесь

$$c(b) = \rho_n^{-1}[\alpha\rho_f(b)]_b, \quad \alpha = 4\pi j_c(b)\lambda/cB_{c2}.$$

При достаточно малом возрастании внешнего магнитного поля краевые условия могут быть заданы в виде (степенной граничный режим)

$$b(0, t) = b_0(1 + t)^m, \quad m > 0 \quad (3)$$

или

$$b(0, t) = b_0(1 - t/t_0)^m, \quad m < 0, \quad 0 < t < t_0, \quad (4)$$

если эта скорость увеличения поля велика (t_0 — безразмерное время обострения степенного режима). В последнем случае при $t \rightarrow t_0$ поле $b \rightarrow \infty$ и мы имеем так называемый граничный режим с обострением. Начальную безразмерную амплитуду поля b_0 можно принять равной B_{c1}/B_{c2} , т.е. задать $B_0 = B_{c1}$.

Эволюционные параболические уравнения второго порядка (2) лежат в основе математических моделей разнообразных физических процессов. Согласно их общим свойствам (при $\alpha = 0$), для существования конечного решения $b(x, t)$ типа бегущей волны необходимым и достаточным условием является выполнение (см. [6]) неравенства

$$\int \rho_f(b)b^{-1}db < \infty.$$

Пространственно-временная структура этих решений определяется характером зависимости коэффициентов ρ_f от величин b , определяющих состояние нелинейных сред, и краевых условий. Так, например, в теории тепловых процессов функция $\rho_f(b) = k(b)$ имеет смысл коэффициента теплопроводности. В краевых задачах с тепловым воздействием на границе образца явный вид зависимости этого коэффициента от температуры определяет закон движения тепловой волны. В частности, при степенной зависимости $k(b)$ в режимах с обострением, несмотря на неограниченный рост температуры

на границе, тепловые возмущения могут быть локализованы на конечной глубине. Учитывая, что процесс распространения магнитного поля в среде с конечной проводимостью описывается тем же уравнением диффузии (2), следует ожидать, что анализ известных пространственно-временных решений (2) позволит описать развивающиеся возмущения магнитных структур в сверхпроводниках.

Как видно из (2), для нахождения функции $b(x, t)$ необходимо знать зависимость плотности критического тока от b . Принимая это во внимание, проанализируем вначале случай, когда $j_c = 0$ (коэффициент α в (2) равен нулю). В этом случае уравнение (2) приобретает простой вид:

$$b_t = (b^\sigma b_x)_x. \quad (5)$$

Ниже будет показано, что явный учет j_c не влияет на качественную картину пространственно-временных структур магнитного потока. Изменяется лишь скорость распространения фронта волны. Поэтому представляется полезным вначале рассмотреть явление в самом упрощенном варианте.

Локализация магнитного потока при степенном режиме изменения поля

Пусть нарастание внешнего магнитного поля определяется граничным условием (3). Тогда уравнение (5) имеет автомодельное решение вида [6]

$$b(x, t) = b_0(1 + t)^m f(\zeta), \quad \zeta = xb_0^{-1/2}(1 + t)^{-(1+m\sigma)/2}, \quad (6)$$

где f удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(f^\sigma f')' + [(1 + m\sigma)/2]\zeta f' - mf = 0, \quad \zeta > 0, \quad (7)$$

причем, как следует из постановки исходной задачи и пространственно-временной структуры решения (6), должны быть выполнены краевые условия

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \quad (8)$$

Обобщенное решение задачи (7), (8) существует, единственно и является финитной функцией [6]. Качественно графическое представление решения в различные моменты времени дано на рис. 1. Штриховой линией обозначена траектория движения полуширины (точка $x_{\text{eff}}(t)$, в которой индукция магнитного поля равна половине величины b на границе) магнитной неоднородности, $x_{\text{eff}}(t)$ — точка, в которой функция $b(x, t)$ обращается в нуль (фронт волны). При этом зависимость от времени полуширины магнитной волны задается соотношением

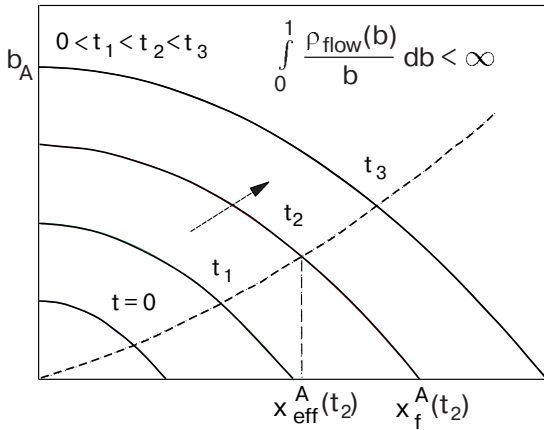


Рис. 1. Эволюция автомодельного решения (5) ($m > 0$, $\sigma > 1$) [6].

$$x_{\text{eff}} = \zeta_{\text{eff}} b_0^{1/2} (1+t)^{(1+m\sigma)/2}; \quad f(\zeta_{\text{eff}}) = 1/2. \quad (9)$$

Решение (см. рис. 1) определяет пространственный профиль магнитной волны, движущейся в сверхпроводящем образце со скоростью

$$v = \zeta_{\text{eff}} b_0^{1/2} \frac{(1+m\sigma)}{2} (1+t)^{(m\sigma-1)/2}. \quad (10)$$

В частном случае ($m = 1/\sigma$) задача (6)–(8) имеет обобщенное решение

$$b(x, t) = b_0 (1+t)^{1/\sigma} [(1 - \sigma^{1/2} \zeta)_+]^{1/\sigma},$$

$$\zeta = x b_0^{-1/2} (1+t)^{-1}. \quad (11)$$

Здесь введено обозначение $(k)_+ = k$, если $k \geq 0$, и $(k)_+ = 0$, если $k < 0$.

При таком специальном выборе условий накачки внешним полем получаем постоянную скорость движения фронта волны

$$v = \zeta_{\text{eff}} b_0^{1/2} = [1 - (1/2)^\sigma] \sigma^{-1/2} b_0^{1/2}, \quad (12)$$

что при $\sigma = 1$ дает $v = b_0^{1/2}/2$.

Режим с обострением. Эффективная локализация магнитного потока

В режиме с обострением (4) автомодельное решение уравнения (5) имеет вид

$$b(x, t) = b_0 (1 - t/t_0)^m f(\zeta),$$

$$\zeta = x (b_0 t_0)^{-1/2} (1 - t/t_0)^{-(1+m\sigma)/2} \geq 0, \quad (13)$$

где $f(\zeta)$ определяется из уравнения

$$(f^\sigma f')' - [(1+m\sigma)/2] \zeta f' + m f = 0, \quad \zeta > 0 \quad (14)$$

с краевыми условиями (8).

Для автомодельного решения (13) полуширина и фронт магнитной волны зависят от времени следующим образом:

$$x_{\text{eff}} = \zeta_{\text{eff}} (b_0 t_0)^{1/2} (1 - t/t_0)^{(1+m\sigma)/2}, \quad (15)$$

$$x_f = \zeta_f (b_0 t_0)^{1/2} (1 - t/t_0)^{(1+m\sigma)/2}, \quad (16)$$

где ζ_f — значение автомодельной координаты, в которой $f(\zeta) = 0$.

Для наглядного представления на рис. 2 приведены результаты [6] численного решения задачи (14) при $1 + m\sigma > 0$ и $1 + m\sigma < 0$.

При $1 + m\sigma < 0$ решение характеризуется следующими свойствами: координата фронта волны находится в конечной точке и вместе с x_{eff} неограниченно возрастает при приближении к моменту обострения.

При $1 + m\sigma > 0$ фронт волны находится в бесконечно удаленной точке, а величина $x_{\text{eff}}(t)$ уменьшается при $t \rightarrow t_0$. Решения такого типа можно назвать (по аналогии с тепловыми волнами в режиме с обострением) магнитной волной с сокращающимися

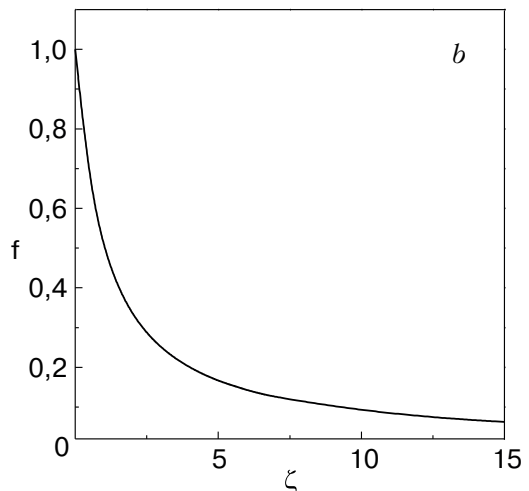
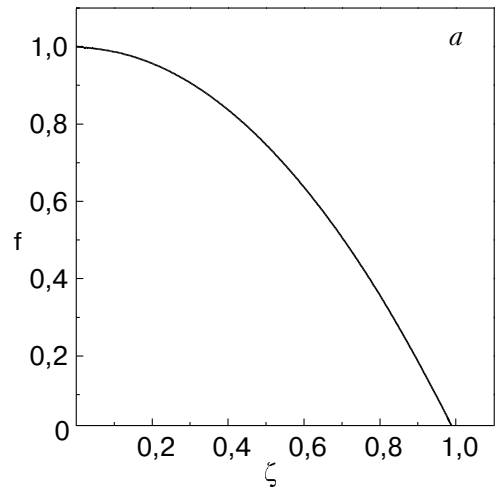


Рис. 2. Изменение магнитного поля по автомодельной переменной ζ при $1 + m\sigma < 0$ (а) и $1 + m\sigma > 0$ (б).

эффективными размерами. Магнитное поле, проникающее в среду, в этом случае будет сосредотачиваться в уменьшающейся со временем области пространства. Понятно, что в реальной ситуации соответствующее этому процессу возрастание $b(x, t)$ будет ограничено сверху значением верхнего критического поля.

Заметим, что граничному режиму при специальном выборе $m = -1/\sigma$ отвечает автомодельное решение необычного вида — остановившаяся магнитная волна

$$b(x, t) = b_0(1 - t/t_0)^{-1/\sigma} [(1 - x/x_0)_+]^{2/\sigma}, \quad (17)$$

где $x_0 = [2(\sigma + 2)/\sigma]^{1/2}$. Положение фронта этой волны $x_f(t) = x_0$ не меняется в течение всего времени обострения — магнитные возмущения не распространяются в глубь образца, несмотря на то что в области $(0, x_0)$ магнитное поле возрастает при $t \rightarrow t_0$.

Учет критического тока

Для сверхпроводников с большими критическими токами решения уравнения (2) необходимо анализировать, учитывая не только само значение j_c , но и связь критического тока с индукцией, что отражено в функции $c(b)$ исходного уравнения диффузии (2), описывающей зависимость скорости распространения поля c от величины локального значения b . Решение подобного уравнения нелинейной диффузии магнитного потока следует искать с помощью перехода к «растянутым» координатам $\eta = x - x_s(t)$, где $x_s(t)$ — некоторая функция, задаваемая уравнением

$$dx_s/dt = -c[b(\eta(t), t)]. \quad (18)$$

В этом случае уравнение (2) сводится к уравнению (5):

$$b_t = [b^\sigma b_\eta]_\eta, \quad (19)$$

и для представляющего наибольший интерес граничного режима с обострением решение уравнения (19) имеет тот же вид (13), (14), но с автомодельной переменной

$$\zeta = \left\{ x + \int_0^{t/t_0} c[b(\eta, t)] dt \right\} \times (b_0 t_0)^{-1/2} (1 - t/t_0)^{-(1+m\sigma)/2} \geq 0 \quad (20)$$

для функции $f(\zeta)$, которая должна удовлетворять краевым условиям (8).

Принимая во внимание соотношения (13) и (20), нетрудно заметить, что для исходной функции $b(x, t)$ краевое условие (4) при $x = 0$ удовлетворяется асимптотически при $t \rightarrow t_0$ и только тогда, когда

$1 + m\sigma < 0$. Поэтому решение соответствующей краевой задачи можно считать определенным лишь в пределе $t \rightarrow t_0$ при дополнительном условии $1 + m\sigma < 0$ на показатель диссипативной среды σ и показатель скорости изменения внешнего магнитного поля m . В этом случае положение фронта магнитной волны задается интегралом от функции $c[b(\eta, t)]$

$$x_f = - \int_0^{t/t_0} c[b(\eta, t)] dt + \eta_f (b_0 t_0)^{1/2} (1 - t/t_0)^{(1+m\sigma)/2}, \quad (21)$$

и, следовательно, скорость распространения фронта магнитной волны равна

$$v_f = -c[b(\eta, t)] - \frac{(1 + m\sigma)}{2} \eta_f (b_0)^{1/2} (1 - t/t_0)^{(m\sigma-1)/2}, \quad 1 + m\sigma < 0. \quad (22)$$

Как следует из определения $c[b(\eta, t)]$ (см. уравнение (2)), эта функция задается зависимостями $\rho_f(b)$ и $j_c(b)$. В модели Бина при $\rho_f(b) \sim b$ она вырождается в константу $c = \alpha = 4\pi j_c / cB_{c2}$ и результат (22) становится очевидным: значение скорости распространения фронта волны (в отличие от случая, рассмотренного выше) уменьшается на величину α .

Плотность критического тока, как правило, монотонно убывает с ростом b . В малых полях ($b \ll 1$) хорошим приближением для $j_c(b)$ является модель Кима — Андерсена $j_c(b) = j_c(0)(b + b_1)^{-1}$, где b_1 — некоторая константа, значение которой берется из эксперимента. В предельном случае сильных магнитных полей $j_c(b) = j_c(0)(1 - b)$. Однако даже при такой простой зависимости тока от b информацию об эволюции пространственно-временных свойств проникающего в образец поля получить затруднительно. Тем не менее при $b \gg b_1$ удастся сделать некоторые интересные наблюдения. Так, при $\sigma = 2$ уравнение (2) полностью идентично уравнению при $j_c = \text{const}$ (модель Бина) и $\sigma = 1$. Поэтому выводы, которые сделаны выше при анализе решений соответствующего уравнения при $j_c = \text{const}$, справедливы и для более сложного процесса проникновения вихрей в образец.

Таким образом, диссипативные магнитные потоки, распространяющиеся в неидеальных сверхпроводниках, могут иметь многообразную пространственно-временную структуру. Это многообразие находится в прямой зависимости от соотношения между показателем m скорости подвода магнитного поля и степенью σ возрастания удельного сопротивления образца по магнитному полю. При этом наблюдается естественная закономерность — чем

выше интенсивность граничного режима, тем больше скорость движения фронта проникающей магнитной волны. Однако имеется и исключение — при $m = -1/\sigma$ в режиме с обострением волна может локализоваться и положение точки ее фронта не будет меняться со временем.

В заключение отметим некоторые существенные аспекты проведенного выше исследования. Предполагая, что температура сверхпроводника совпадает с температурой охладителя, мы пренебрегали неизотермичностью процесса. Конечно, в общем случае плотность вихрей (или поле b), проникающих в образец, определяется не только значением наведенного тока, но и локальной температурой. Поэтому совместно с уравнениями Максвелла необходимо было бы записывать и уравнение теплового баланса. Источником тепла в образцах служит энергия диссипации, определяемая вязким движением вихревых нитей. Обычно такой подход используется при изучении критического состояния сверхпроводника со случайным распределением центров пиннинга. При этом исследуются скачки потока, которые вызываются распространяющейся тепловой волной, достаточно большой для преодоления пиннинга. В настоящей работе рассматриваются или чистые сверхпроводники (для которых плотность дефектов незначительна), или надкритическое состояние. Тепловая волна существует как в том, так и в другом случае. Следуя за фронтом магнитного потока, она не изменит качественно картину его распределения, а лишь сместит положение фронта за счет увеличения размера вихря. С другой стороны, когда движение линий потока задерживается центрами пиннинга, температурный коэффициент диффузии может обеспечить быстрое выравнивание локального температурного градиента и тогда можно пренебречь неизотермичностью процесса. Такое эффективное охлаждение, как известно [2], присуще композитным сверхпроводникам.

Когда в качестве искомого профиля $b(x,0) = b_0 F(x)$ выбираем автомодельную функцию $F(x)$ при $t = 0$, то численное решение, очевидно, совпадает с автомодельным для уравнения диффузии (5). В монографии [7] доказано, что для монотонно убывающих искомым функций решения исходного уравнения (5) сходятся к автомодельным решениям при $t \rightarrow t_0$. При промежуточных t численные решения могут отличаться от автомодельных. Другими словами, произвольные (численные) решения притягиваются к автомодельному решению при $t \rightarrow t_0$.

Говорят, что автомодельные решения образуют аттрактор задачи.

Что касается асимптотической устойчивости решений, то для режимов с сопротивлением $\rho_f(b)$, близких к степенным, асимптотическая устойчивость доказана в той же монографии [7] и, в частном случае (при степенном сопротивлении), в книге [6] (см. также [8]). Для остановившегося фронта волны устойчивость решений численно доказана в 1956 г. Баренблаттом и Вишиком [9]. Теоретическое доказательство этого результата можно найти также в книге [7], где доказана фундаментальная S-теорема устойчивости автомодельных решений для широкого класса уравнений диффузионного типа.

1. В.Р. Романовский, *ЖТФ* **70**, 47 (2000).
2. А.Вл. Гуревич, Р.Г. Минц, А.Л. Рахманов, *Физика композитных сверхпроводников*, Наука, Москва (1987).
3. И.Л. Максимов, Ю.Н. Мастаков, Н.А. Тайланов, *ФТТ* **28**, 2323 (1986).
4. Н.А. Тайланов, У.Т. Яхшиев, *Письма в ЖТФ* **26**, 8 (2000).
5. N.A. Buznikov, A.A. Pukhov, and A.L. Rakhmanov, *Cryogenics* **34**, 761 (1994).
6. А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, Москва (1987).
7. V.A. Galaktionov and J.L. Vazquez, *A Stability Technique for Evolution Partial Differential Equations, A Dynamical Systems Approach*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin (2004).
8. В.А. Галактионов, А.А. Самарский, *Математ. сб.* **120**, 3 (1983).
9. Г.И. Баренблатт, М.И. Вишик, *ПММ* **20**, 411 (1956).

Spatial-time structure of dissipative magnetic fluxes in type-II superconductors

Yu.V. Medvedev and I.B. Krasnyuk

The nonlinear boundary-value problem of penetration of magnetic field b into a superconducting semispace with the resistance $\rho_f(b) \sim b^\sigma$ is considered provided that the field amplitude at the sample boundary increases with time in a power way ($b(0,t) \sim (1+t)^m$, $m > 0$) or in a deepening regime ($b(0,t) \sim (1-t/t_0)^m$, $m < 0$, $0 < t < t_0$). The conditions imposed on the values of m and σ at which different scenarios of magnetic flux penetration may be realized are specified. The flux front rate depending on the parameters m and σ is calculated.