

# Электромагнитное поглощение биметаллической сферической частицы

Э.В. Завитаев

Московский государственный университет леса, Мытищи-5, Московская область, 141005, Россия  
E-mail: zav.mgul@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 5 ноября 2004 г., после переработки 8 февраля 2005 г.

Проведено вычисление сечения поглощения электромагнитного излучения в биметаллической сферической частице. Рассмотрен общий случай, когда отношение радиуса ядра к радиусу частицы может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие диффузного отражения электронов от внутренней и внешней поверхностей металлического слоя частицы. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

Проведено обчислювання перерізу поглинання електромагнітного випромінювання в біметалічній сферичній частинці. Розглянуто загальний випадок, коли відношення радіуса ядра до радіуса частинки може приймати довільні значення. В якості межових умов задачі прийнято умову дифузного відображення електронів від внутрішньої та зовнішньої поверхонь металевого шару частинки. Розглянуто граничні випадки та проведено обговорення отриманих результатів.

PACS: 78.67.-n

## 1. Введение

Электромагнитные свойства малых металлических частиц могут существенно отличаться от свойств массивных образцов металла [1]. Если линейный размер  $R$  образца металла будет порядка  $\Lambda$  — длины свободного пробега электронов или меньше ее (этот эффект наиболее выражен при низких температурах, когда электроны обладают большой длиной свободного пробега), то взаимодействие электронов с границей металлического образца начинает оказывать заметное влияние на их отклик на внешнее электромагнитное поле. Следствием этого и являются особые оптические свойства образца (металлической частицы). Поэтому, когда выполняется условие  $R < \Lambda$ , одна из основных оптических характеристик — сечение поглощения — обнаруживает нетривиальную зависимость от отношения  $R/\Lambda$ . При комнатной температуре в металлах с хорошей проводимостью (алюминий, медь, серебро и др.) длина свободного пробега электронов  $\Lambda$  лежит в характерных пределах 10–100 нм. Размеры же экспериментально исследуемых частиц достигают нескольких нм, т.е. ситуация  $R < \Lambda$  реализуется.

В качестве аппарата, способного описать отклик электронов на внешнее электромагнитное поле с учетом взаимодействия электронов с границей образца, может быть использована стандартная кинетическая теория электронов проводимости в металле [2]. В этом случае ограничения на соотношение между длиной свободного пробега электронов и размером образца не накладываются.

Уравнения макроскопической электродинамики применимы лишь в случае «массивных» образцов:  $R \gg \Lambda$ . Поэтому известная теория Ми [2], которая описывает взаимодействие электромагнитной волны с металлическими телами в рамках макроскопической электродинамики, непригодна для описания упомянутого размерного эффекта.

В работах [3,4] была построена теория взаимодействия электромагнитного излучения со сферической частицей. Немного ранее в предельном случае  $R \ll \Lambda$  на низких частотах (дальний ИК диапазон) результат, совпадающий с [3], получен в работах [5,6]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов проводимости в металле.

Альтернативный подход к проблеме предложен и развивается в работах [7,8].

В последнее время возрос интерес к проблеме взаимодействия электромагнитного излучения с несферическими частицами [9]. Ряд работ [10–13] был посвящен описанию взаимодействия электромагнитного излучения с цилиндрической частицей. Отметим также работы, в которых предпринята попытка учета квантовомеханических эффектов в данной проблеме, что особенно существенно при низких температурах [14,15]. Причем во всех перечисленных выше работах рассматривались только однородные частицы, т.е. не поднимался вопрос о внутренней структуре поглощающих частиц.

Однако в последнее время в литературе появились сообщения об экспериментальных исследованиях частиц сложной структуры [16,17]. Такие частицы состоят из диэлектрического (или металлического) ядра, окруженного металлической оболочкой, что, естественно, сказывается на оптических свойствах этих частиц. В работах [16,17] рассматривается электрическое поглощение частиц сложной структуры, которое доминирует в видимой части спектра.

В настоящей работе, которая является логическим продолжением работы [3], кинетическим методом рассчитаны функции распределения, описывающие линейный отклик электронов проводимости в неоднородной сферической частице (металлическая частица с ядром из другого металла) на переменное магнитное поле плоской электромагнитной волны. По найденным функциям распределения удастся рассчитать зависимость сечения поглощения от радиуса частицы и частоты, а также от отношения радиуса ядра к радиусу частицы. Особое внимание уделено важному случаю низких частот внешнего поля и частот объемных столкновений электронов внутри ядра и оболочки.

## 2. Математическая модель и расчет

Рассмотрим сферическую частицу, состоящую из металлического ядра радиусом  $R_1$ , окруженного оболочкой из другого металла радиусом  $R_2$ . Эта частица помещена в поле плоской электромагнитной волны частотой  $\omega$ , которая ограничена сверху частотами ближнего ИК диапазона ( $\omega < 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ). Линейный размер частицы  $R_2$  мал по сравнению с длиной волны  $\lambda$  электромагнитного излучения. Неоднородность внешнего поля волны и скин-эффект не учитываются (предполагается, что  $R_2 < \delta$ , где  $\delta$  — глубина скин-слоя). В рассматриваемом диапазоне частот вклад токов дипольной электрической поляризации будет мал по сравнению с вкладом

вихревых токов, которые индуцируются внешним магнитным полем волны [3]. Поэтому действие внешнего электрического поля волны не учитывается.

Кроме того, использованы общепринятые физические допущения: электроны проводимости в металлической оболочке и металлическом ядре частицы рассматриваются как вырожденный ферми-газ; их отклик на внешнее переменное магнитное поле описывается с помощью уравнения Больцмана в приближении времени релаксации. В граничных условиях принято, что отражение электронов от поверхностей металлической оболочки и поверхности металлического ядра носит диффузный характер.

Однородное периодическое по времени магнитное поле волны  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t)$  вызывает появление в частице вихревого электрического поля. В силу симметрии задачи она определяется из уравнения индукции Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \left( \frac{1}{c} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

и может быть представлено в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c} \left[ \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] = \frac{\omega}{2ic} [\mathbf{r}, \mathbf{H}_0] \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор (начало координат  $O$  — в центре частицы),  $c$  — скорость света. Вихревое электрическое поле воздействует на электроны проводимости в частице и вызывает отклонение  $f_1$  их функции распределения  $f$  от равновесной фермиевской  $f_0$ :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{m\mathbf{v}^2}{2},$$

где  $\mathbf{v}$  и  $m$  — скорость и эффективная масса электрона.

Это приводит к возникновению в ядре и оболочке частицы вихревого тока

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3(mv)}{h^3} = 2e \left( \frac{m}{h} \right)^3 \int \mathbf{v} f_1 d^3v \quad (2)$$

(где  $h$  — постоянная Планка,  $e$  — заряд электрона), а также к диссипации энергии в объеме частицы. Энергия  $\bar{Q}$ , диссипируемая в единицу времени, равна [18]

$$\bar{Q} = \int (\text{Re } \mathbf{E})(\text{Re } \mathbf{j}) d^3r = \frac{1}{2} \text{Re} \int \mathbf{j} \mathbf{E}^* d^3r, \quad (3)$$

чертой обозначено усреднение по времени, а звездочкой — комплексное сопряжение.

В формуле (2) использована стандартная нормировка функции распределения  $f$ , при которой плотность электронных состояний равна  $2/h^3$ . Для

равновесной функции  $f_0(\varepsilon)$  далее использована ступенчатая аппроксимация [19]:

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F, \\ 0, & \varepsilon_F < \varepsilon \end{cases},$$

где  $\varepsilon_F = mv_F^2/2$  — энергия Ферми ( $v_F$  — скорость Ферми). Предполагается, что ферми-поверхность имеет сферическую форму.

В данной работе использовано предположение о непрерывности энергетического спектра электрона (квазиклассическое приближение). Это предположение справедливо в случае, когда характерные размеры проводника превышают 3–4 нм, так как длины волн де Бройля для электрона на поверхностях Ферми в ядре и оболочке частицы должны быть во много раз меньше соответствующего линейного размера металла. Таким образом, радиус ядра и толщину оболочки частицы будем считать превышающими данную предельную величину.

Задача сводится к отысканию отклонения  $f_1$  функции распределения электронов от равновесной  $f_0$ , возникающего под действием вихревого поля (1). В линейном приближении по внешнему полю функция  $f_1$  удовлетворяет кинетическому уравнению [2,19]

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{vE}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}, \quad (4)$$

где предполагается стационарная зависимость от времени ( $f_1 \sim \exp(-i\omega t)$ ), а интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации:

$$\left( \frac{df_1}{dt} \right)_s = -\frac{f_1}{\tau},$$

где  $\tau$  — электронное время релаксации.

Решая уравнение (4) методом характеристик [20], получаем

$$f_1 = A [\exp(-vt') - 1]/v, \quad t' \geq 0, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\tau} - i\omega, \quad (6)$$

$$A = e(\mathbf{vE}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \frac{e\omega}{2ic} \left( \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) [\mathbf{v}, \mathbf{r}] \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t).$$

Причем  $\mathbf{v}$  и  $A$  постоянны вдоль траектории (характеристики).

Будем считать, что электроны не проникают из одного металла в другой (т.е. между ядром и оболочкой существует тонкий изолирующий слой) и в оболочке и ядре частицы электроны обладают различными скоростями Ферми ( $v_F$  и  $u_F$ ). Кроме этого, в общем случае оболочке и ядру частицы приписываются различные времена релаксации ( $\tau_1$  и  $\tau_2$ ),

а значит, и различные комплексные частоты рассеяния электронов ( $\nu_1$  и  $\nu_2$ ).

Для однозначного определения функции  $f_1$  необходимо задать для нее граничные условия на сферических поверхностях металлической оболочки и металлического ядра частицы. В качестве таковых принимаем условия диффузного отражения электронов от этих поверхностей [2]. Поскольку электроны, находящиеся в ядре частицы, могут отражаться от его границы ( $R_1$ ), а электроны, находящиеся в оболочке частицы, могут отражаться от внутренней ( $R_1$ ) и внешней ( $R_2$ ) границ металлического слоя, необходимо записать три граничных условия:

$$f_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}| = R_1, \\ \mathbf{r}\mathbf{v} < 0 \end{cases}, \quad (7)$$

$$f_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}| = R_1, \\ \mathbf{r}\mathbf{v} > 0 \end{cases}, \quad (8)$$

$$f_{13}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}| = R_2, \\ \mathbf{r}\mathbf{v} < 0 \end{cases}. \quad (9)$$

При отражении электронов, находящихся в ядре частицы, от границы ядра ( $R_1$ ) параметр  $t'$  в выражении (5) определяется как

$$t_1 = \{\mathbf{r}\mathbf{v} + [(\mathbf{r}\mathbf{v})^2 + (R_1^2 - r^2)v^2]^{1/2}\}/v^2. \quad (10)$$

При отражении электрона от внутренней границы ( $R_1$ ) металлической оболочки частицы параметр  $t'$  в выражении (5) определяется как

$$t_2 = \{\mathbf{r}\mathbf{v} - [(\mathbf{r}\mathbf{v})^2 + (R_1^2 - r^2)v^2]^{1/2}\}/v^2, \quad (11)$$

а при отражении электрона от внешней границы ( $R_2$ ) металлической оболочки он определяется как

$$t_3 = \{\mathbf{r}\mathbf{v} + [(\mathbf{r}\mathbf{v})^2 + (R_2^2 - r^2)v^2]^{1/2}\}/v^2. \quad (12)$$

Это ясно из следующих геометрических соображений. Из очевидного векторного равенства  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t'$  (где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор электрона в момент отражения от любой из поверхностей внутри частицы), возводя обе части этого равенства в квадрат и разрешив полученное уравнение относительно параметра  $t'$ , можно получить выражения (10), (11) или (12).

Поэтому уравнение (4) имеет три различных решения в зависимости от места отражения электрона проводимости внутри частицы.

Соотношениями (5), (6), (10)–(12) полностью определены решения  $f_{11}$ ,  $f_{12}$  и  $f_{13}$  уравнения (4) с граничными условиями (7)–(9), что позволяет рассчитать ток (2) и диссипируемую мощность (3).

При вычислении интегралов (2), (3) удобно перейти к сферическим координатам как в пространстве координат ( $r, \theta, \varphi$ ; полярная ось — ось  $Z$ ; вектор  $\mathbf{H}_0$  параллелен оси  $Z$ ), так и в пространстве скоростей ( $v, \alpha, \beta$ ; полярная ось — ось  $v_r$ ). Поле (1) в сферических координатах имеет лишь  $\varphi$ -компоненту:

$$\mathbf{E} = E_\varphi \mathbf{e}_\varphi; \quad E_\varphi = \frac{i\omega}{2c} r H_0 \sin \theta \exp(-i\omega t). \quad (13)$$

Соответственно, и токи (2) в ядре и в оболочке частицы обладают лишь  $\varphi$ -компонентой (линии тока являются замкнутыми окружностями с центрами на  $Z$  оси в плоскостях, перпендикулярных оси  $Z$ ):

$$j_{\varphi 1} = \frac{3n_1 e^2}{4\pi u_F^3} \frac{E_\varphi}{v_1} \int v_\varphi^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) [1 - \exp(-v_1 t')] d^3 v, \quad (14)$$

$$j_{\varphi 2} = \frac{3n_2 e^2}{4\pi u_F^3} \frac{E_\varphi}{v_2} \int v_\varphi^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) [1 - \exp(-v_2 t')] d^3 v. \quad (15)$$

Здесь мы учли, что концентрации электронов проводимости в металлах, из которых состоит частица, определяются как

$$n_1 = 2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \int f_0 d^3 v = 2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{4}{3} \pi u_F^3,$$

$$n_2 = 2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \int f_0 d^3 v = 2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{4}{3} \pi v_F^3.$$

При интегрировании выражений (14) и (15) следует иметь в виду, что место отражения электронов

внутри частицы определяется полярным углом  $\alpha$  в пространстве скоростей.

Для электронов внутри ядра  $\alpha = 0 - \pi$ . Под функцией  $f_1$  в этом случае понимается  $f_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  ( $t' = t_1$ ).

Для электронов внутри металлической оболочки частицы можно выделить три области:

1. Если выполняется неравенство  $\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi - \alpha_0$ , где угол  $\alpha_0$  определяется выражением

$$\alpha_0 = \arccos \left( \frac{\sqrt{r^2 - R_1^2}}{r} \right), \quad (16)$$

то траектория электрона не пересекается с ядром и он претерпевает отражение от внешней границы металлического слоя частицы. Под функцией  $f_1$  в этом случае понимается  $f_{13}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  ( $t' = t_3$ ).

2. Если  $\pi - \alpha_0 < \alpha \leq \pi$ , то электроны летят к ядру частицы и под функцией  $f_1$  снова подразумевается  $f_{13}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  ( $t' = t_3$ ).

3. Наконец, если  $0 < \alpha \leq \alpha_0$ , то электроны летят от ядра частицы и под функцией  $f_1$  имеется в виду  $f_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  ( $t' = t_2$ ).

Легко заметить, что в первых двух случаях интегралы можно объединить.

Сечение поглощения электромагнитного излучения  $\sigma$  находим, разделив среднюю диссипируемую мощность  $\bar{Q}$  (см. (3)) на средний поток энергии в волне  $cH_0^2/8\pi$ :

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{8\pi}{cH_0^2} \operatorname{Re} \left\{ \int j_\varphi E_\varphi^* d^3 r \right\},$$

или, учитывая (14) и (15),

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{1}{2} \frac{8\pi}{cH_0^2} \operatorname{Re} \left\{ \int \frac{3n_1 e^2 E_\varphi}{4\pi u_F^3 v_1} \left[ \int v_\varphi^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) [1 - \exp(-v_1 t')] d^3 v \right] E_\varphi^* d^3 r + \right. \\ & \left. + \int \frac{3n_2 e^2 E_\varphi}{4\pi v_F^3 v_2} \left[ \int v_\varphi^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) [1 - \exp(-v_2 t')] d^3 v \right] E_\varphi^* d^3 r \right\}. \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись (13), имеем

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{1}{2} \frac{8\pi}{cH_0^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{3n_1 e^2}{4\pi u_F^3 v_1} \int \frac{i\omega}{2c} r H_0 \sin \theta \exp(-i\omega t) \left[ \int v_\varphi^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) [1 - \exp(-v_1 t')] d^3 v \right] \times \right. \\ & \times \frac{(-i\omega)}{2c} r H_0 \sin \theta \exp(i\omega t) d^3 r + \frac{3n_2 e^2}{4\pi v_F^3 v_2} \int \frac{i\omega}{2c} r H_0 \sin \theta \exp(-i\omega t) \times \\ & \left. \times \left[ \int v_\varphi^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) [1 - \exp(-v_2 t')] d^3 v \right] \frac{(-i\omega)}{2c} r H_0 \sin \theta \exp(i\omega t) d^3 r \right\}. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получаем

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{3n_1 e^2 \omega^2}{4mc^3 u_F^4 v_1} \int \left[ \int v_\phi^2 \delta(v - u_F) [1 - \exp(-v_1 t')] d^3 v \right] r^2 \sin^2 \theta d^3 r + \right. \\ \left. + \frac{3n_2 e^2 \omega^2}{4mc^3 v_F^4 v_2} \int \left[ \int v_\phi^2 \delta(v - v_F) [1 - \exp(-v_2 t')] d^3 v \right] r^2 \sin^2 \theta d^3 r \right\}.$$

Учитывая, что  $v_\phi = v \sin \alpha \cos \beta$ , и подставляя пределы интегрирования во внутренних интегралах суммы, приходим к выражению

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{3n_1 e^2 \omega^2}{4mc^3 u_F^4 v_1} \int \left[ \int_0^{u_F} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v^4 \sin^3 \alpha \cos^2 \beta \delta(v - u_F) [1 - \exp(-v_1 t')] dv d\alpha d\beta \right] r^2 \sin^2 \theta d^3 r + \right. \\ \left. + \frac{3n_2 e^2 \omega^2}{4mc^3 v_F^4 v_2} \int \left[ \int_0^{v_F} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v^4 \sin^3 \alpha \cos^2 \beta \delta(v - v_F) [1 - \exp(-v_2 t')] dv d\alpha d\beta \right] r^2 \sin^2 \theta d^3 r \right\}.$$

Проинтегрировав по переменным  $v$  и  $\beta$ , а также подставляя пределы интегрирования во внешних интегралах суммы, имеем

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{3n_1 e^2 \omega^2}{4mc^3 u_F^4 v_1} u_F^4 \pi \int_0^{R_1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi [1 - \exp(-v_1 t')] \sin^3 \alpha d\alpha \right] r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\phi + \right. \\ \left. + \frac{3n_2 e^2 \omega^2}{4mc^3 v_F^4 v_2} v_F^4 \pi \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi [1 - \exp(-v_2 t')] \sin^3 \alpha d\alpha \right] r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\phi \right\}.$$

Интегралы по переменным  $\theta$  и  $\phi$  элементарные, поэтому

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{3n_1 e^2 \omega^2}{4mc^3 u_F^4 v_1} v_F^4 \pi \frac{4}{3} 2\pi \int_0^{R_1} r^4 dr \int_0^\pi [1 - \exp(-v_1 t')] \sin^3 \alpha d\alpha + \right. \\ \left. + \frac{3n_2 e^2 \omega^2}{4mc^3 v_F^4 v_2} v_F^4 \pi \frac{4}{3} 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr \int_0^\pi [1 - \exp(-v_2 t')] \sin^3 \alpha d\alpha \right\}.$$

Окончательно получаем

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi^2 n_1 e^2 \omega^2}{mc^3 v_1} \int_0^{R_1} r^4 dr \int_0^\pi [1 - \exp(-v_1 t')] \sin^3 \alpha d\alpha + \right. \\ \left. + \frac{2\pi^2 n_2 e^2 \omega^2}{mc^3 v_2} \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr \int_0^\pi [1 - \exp(-v_2 t')] \sin^3 \alpha d\alpha \right\}. \quad (17)$$

Для дальнейших вычислений и анализа результатов сложное выражение (17), по которому определяется сечение поглощения, удобно представить в виде

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (18)$$

где

$$\sigma_1 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi^2 n_1 e^2 \omega^2}{mc^3 v_1} \int_0^{R_1} r^4 dr \int_0^\pi [1 - \exp(-v_1 t_1)] \sin^3 \alpha d\alpha \right\}, \quad (19)$$

$$\sigma_2 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi^2 n_2 e^2 \omega^2}{mc^3 v_2} \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr \int_0^{\alpha_0} [1 - \exp(-v_2 t_2)] \sin^3 \alpha d\alpha \right\}, \quad (20)$$

$$\sigma_3 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi^2 n_2 e^2 \omega^2}{mc^3 v_2} \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr \int_{\alpha_0}^{\pi} [1 - \exp(-v_2 t_3)] \sin^3 \alpha d\alpha \right\}. \quad (21)$$

Введем новые переменные

$$\xi = \frac{r}{R_2}, \quad z = v_2 \frac{R_2}{v_F} = \left( \frac{1}{\tau_2} - i\omega \right) \frac{R_2}{v_F} = x - iy,$$

$$K = \frac{R_1}{R_2}, \quad \gamma = \frac{u_F}{v_F}, \quad \delta = \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

и преобразуем формулы (10)–(12) и (16):

$$t_1 = \frac{R_2}{u_F} \mu, \quad \mu = \xi \cos \alpha + \sqrt{K^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha},$$

$$t_2 = \frac{R_2}{v_F} \psi, \quad \psi = \xi \cos \alpha - \sqrt{K^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha},$$

$$t_3 = \frac{R_2}{v_F} \eta, \quad \eta = \xi \cos \alpha + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha},$$

$$\alpha_0 = \arccos \left( \sqrt{1 - \frac{K^2}{\xi^2}} \right).$$

Здесь мы учли, что  $\mathbf{rv} = ru_F \cos \alpha$  или  $\mathbf{rv} = rv_F \cos \alpha$  (все электроны на поверхности Ферми внутри металлического ядра частицы движутся со скоростями  $u_F$ , а скорости всех электронов на поверхности Ферми внутри металлического слоя частицы равны  $v_F$ ).

Выражая характеристики металлического ядра частицы ( $v_1$  и  $n_1$ ) через характеристики металлической оболочки частицы ( $v_2 = v$ ,  $n_2 = n$ ,  $\tau_2 = \tau$ ), имеем

$$v_1 = v + \frac{1 - \delta}{\delta \tau} = \left( \frac{x}{\delta} - iy \right) \frac{v_F}{R_2} = z' \frac{v_F}{R_2}, \quad n_1 = n\gamma^3.$$

Тогда формулы (19)–(21) принимают следующий вид:

$$\sigma_1 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi^2 n e^2 v_F R_2^4}{mc^3} \frac{\gamma^3 \delta y^2}{x - iy\delta} \int_0^K \xi^4 d\xi \int_0^\pi [1 - \exp(-z' \mu / \gamma)] \sin^3 \alpha d\alpha \right\},$$

$$\sigma_2 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi^2 n e^2 v_F R_2^4}{mc^3} \frac{y^2}{z} \int_K^1 \xi^4 d\xi \int_0^{\alpha_0} [1 - \exp(-z\psi)] \sin^3 \alpha d\alpha \right\},$$

$$\sigma_3 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi^2 n e^2 v_F R_2^4}{mc^3} \frac{y^2}{z} \int_K^1 \xi^4 d\xi \int_{\alpha_0}^\pi [1 - \exp(-z\eta)] \sin^3 \alpha d\alpha \right\}.$$

Сечение поглощения (18) представляем в виде

$$\sigma = \sigma_0 (F_1 + F_2 + F_3),$$

где

$$\sigma_0 = \frac{2\pi^2 n e^2 v_F R_2^4}{mc^3}, \quad (22)$$

$$F_1 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma^3 \delta y^2}{x - iy\delta} \int_0^K \xi^4 d\xi \int_0^\pi [1 - \exp(-z' \mu / \gamma)] \sin^3 \alpha d\alpha \right\}, \quad (23)$$

$$F_2 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{y^2}{z} \int_K^1 \xi^4 d\xi \int_0^{\alpha_0} [1 - \exp(-z\psi)] \sin^3 \alpha d\alpha \right\}, \quad (24)$$

$$F_3 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{y^2}{z} \int_K^1 \xi^4 d\xi \int_{\alpha_0}^\pi [1 - \exp(-z\eta)] \sin^3 \alpha d\alpha \right\}. \quad (25)$$

Формулы (23)–(25) позволяют рассчитать безразмерное сечение поглощения неоднородной сферической частицы

$$F(x, y, K, \gamma, \delta) = F_1(x, y, K, \gamma, \delta) + F_2(x, y, K, \gamma, \delta) + F_3(x, y, K, \gamma, \delta) \quad (26)$$

и сечение поглощения электромагнитного излучения

$$\sigma = \sigma_0 F(x, y, K, \gamma, \delta). \quad (27)$$

Когда  $K = 0$  или  $1$  (так как частица однородная, то  $\gamma = 1$  и  $\delta = 1$ ), из (26) следует, что

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ y^2 \int_0^1 \xi^4 d\xi \int_0^\pi \frac{1 - \exp(-z\eta)}{z} \sin^3 \alpha d\alpha \right\}.$$

Это выражение совпадает с результатом, полученным в работе [3], для однородной сферической частицы из металла.

Отдельно можно выделить случай сложной частицы из одного вещества ( $\gamma = 1, \delta = 1$ ) (когда оболочка и ядро частицы разделены бесконечно тонким слоем диэлектрика). В этом случае дополнительное рассеяние электронов на поверхности, разделяющей ядро и оболочку, приводит к отличию физических свойств такой частицы от свойств однородной сферической частицы из металла.

Численный расчет  $F(x, y, K, \gamma, \delta)$  представлен на рис. 1–4 (для упрощения анализа полученных результатов все рисунки выполнены в предположении  $\tau_1 = \tau_2$ ).

### 3. Поглощение в низкочастотном и высокочастотном режимах

Подробно остановимся на случае, когда частота внешнего поля  $\omega$  и частота столкновений электронов в объеме металла ( $1/\tau$ ) низки по сравнению с частотой столкновения электронов с поверхностями металлического слоя частицы. Другими словами, рассмотрим случай  $|z| \ll 1$ .

Экспоненты, входящие в выражения (23)–(25), можно в этом случае разложить по известной формуле Тейлора, ограничиваясь двумя первыми членами разложения. В результате получаем

$$F_1 = y^2 \gamma^2 \int_0^K \xi^4 d\xi \int_0^\pi (\xi \cos \alpha + \sqrt{K^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha}) \sin^3 \alpha d\alpha, \quad (28)$$

$$F_2 = y^2 \int_K^1 \xi^4 d\xi \int_0^{\alpha_0} (\xi \cos \alpha - \sqrt{K^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha}) \sin^3 \alpha d\alpha, \quad (29)$$

$$F_3 = y^2 \int_K^1 \xi^4 d\xi \int_{\alpha_0}^\pi (\xi \cos \alpha + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha}) \sin^3 \alpha d\alpha. \quad (30)$$

Выражения (28)–(30) удается рассчитать аналитически. Далее приводится готовый результат:

$$F_1 = y^2 \gamma^2 \frac{1}{6} K^6,$$

$$F_2 = y^2 \left[ -\frac{1}{16} K + \frac{1}{24} K^3 + \frac{1}{8} K^4 - \frac{1}{16} K^5 - \frac{1}{24} K^6 + \frac{1}{32} (1 - K^2 - K^4 + K^6) \ln \frac{1+K}{1-K} \right],$$

$$F_3 = y^2 \left[ \frac{1}{6} - \frac{1}{16} K + \frac{1}{24} K^3 - \frac{3}{8} K^4 - \frac{1}{16} K^5 + \frac{7}{24} K^6 + \frac{1}{32} (1 - K^2 - K^4 + K^6) \ln \frac{1+K}{1-K} \right].$$

Тогда для сечения поглощения получаем следующий результат:

$$\sigma = \sigma_0 y^2 \left[ \frac{1}{6} - \frac{1}{8} K + \frac{1}{12} K^3 - \frac{1}{4} K^4 - \frac{1}{8} K^5 + \frac{1}{4} K^6 + \frac{\gamma^2}{6} K^6 + \frac{1}{16} (1 - K^2 - K^4 + K^6) \ln \frac{1+K}{1-K} \right]. \quad (31)$$

Рассмотрим возможные предельные случаи.

1. В случае металлической частицы без ядра ( $K = 0$  или  $1$ ) (так как частица однородная, то  $\gamma = 1$  и  $\delta = 1$ ) из (31) с учетом (22) следует

$$\sigma = \frac{\pi^2 n e^2 v_F R_2^4}{3mc^3} y^2,$$

что совпадает с результатом, полученным в работах [3,5,6].

Если внутри частицы имеется металлическое ядро, радиус которого во много раз меньше радиуса частицы, т. е. когда  $K \ll 1$ , то можно найти поправку к поглощению, выполнив разложение формулы (31) в ряд:

$$\sigma \approx \sigma_0 y^2 \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{3}{2} K^4 - \frac{8}{5} K^5 + \gamma^2 K^6 \right).$$

2. В случае тонкой металлической оболочки, когда  $K \rightarrow 1$ , для нахождения поправки к поглощению по формуле (31) необходимо выполнить другое разложение в ряд по малому параметру  $(1 - K)$ . Сечение поглощения определяется в этом случае как

$$\sigma \approx \sigma_0 y^2 \left\{ \frac{5}{4} \left[ 1 - \frac{2}{5} \ln \frac{1-K}{2} \right] (1-K)^2 + \frac{1}{6} \gamma^2 (6K - 5) \right\}.$$

В случае, когда  $|z| \gg 1$ , существует асимптотика выражения (26). Пренебрегая членами с экспонентами ввиду их быстрого затухания и выполнив алгебраические преобразования, приходим к следующему выражению для безразмерного сечения поглощения  $F(z)$ :

$$F(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma^3 \delta y^2}{x - iy \delta} \int_0^K \xi^4 d\xi \int_0^\pi \sin^3 \alpha d\alpha + \frac{y^2}{z} \int_K^1 \xi^4 d\xi \int_0^\pi \sin^3 \alpha d\alpha \right\}.$$

Это выражение легко интегрируется:

$$F(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma^3 \delta y^2}{x - iy \delta} \frac{4}{15} K^5 + \frac{y^2}{x - iy} \frac{4}{15} (1 - K^5) \right\}.$$

В результате проведенных преобразований получаем следующее выражение для сечения поглощения (27):

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \sigma_0 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma^3 \delta y^2}{x - iy \delta} \frac{4}{15} K^5 + \frac{y^2}{x - iy} \frac{4}{15} (1 - K^5) \right\} = \\ &= \sigma_0 \frac{4}{15} \left\{ K^5 \frac{\gamma^3 \delta x y^2}{x^2 + y^2 \delta^2} + (1 - K^5) \frac{x y^2}{x^2 + y^2} \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

В случае металлической частицы без ядра ( $K = 0$ ) это выражение соответствует классическому результату (формула Друде) [3]:

$$\sigma(z) = \sigma_0 \frac{4}{15} \frac{x y^2}{x^2 + y^2}.$$

В случае тонкой металлической оболочки, когда  $K \rightarrow 1$ , для нахождения поправки к поглощению по формуле (32) удобно сделать подстановку  $K = 1 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая величина ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), а также воспользоваться формулами приближенного вычисления.

Действительно, поскольку  $1 - K^5 = 1 - (1 - \varepsilon)^5 \approx 1 - (1 - 5\varepsilon) = 5\varepsilon = 5(1 - K)$ , а  $K^5 = (1 - \varepsilon)^5 \approx 1 - 5\varepsilon = 1 - 5(1 - K) = 5K - 4$ , сечение поглощения определяется в этом случае по формуле

$$\sigma \approx \sigma_0 \frac{4}{3} \left[ \frac{\gamma^3 \delta x y^2}{x^2 + y^2 \delta^2} \left( K - \frac{4}{5} \right) + \frac{x y^2}{x^2 + y^2} (1 - K) \right].$$

#### 4. Анализ результатов

Безразмерное сечение поглощения  $F$  сложным образом зависит от комбинации четырех безразмерных величин:  $x$ ,  $y$ ,  $K$ ,  $\gamma$  (величина  $\delta = \tau_1/\tau_2$  на поведение безразмерного сечения поглощения  $F$  влияет слабо). Наличие ядра заметно сказывается на характере частотной зависимости безразмерного сечения поглощения, так как это приводит к изменению амплитуды и периода осцилляций (заметим, что в классической теории эти осцилляции принципиально не воспроизводятся). Это связано с тем, что, кроме отражения электронов от внешней поверхности

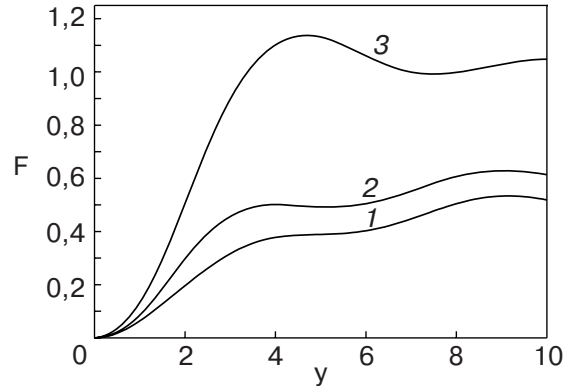


Рис. 1. Зависимость безразмерного сечения поглощения  $F$  от безразмерной частоты  $y$  при  $\gamma = 0,5$  (1), 1 (2), 1,5 (3) ( $x = 0$ ,  $K = 0,8$ ).

частицы, появляется их дополнительное рассеяние на ядре и внутри ядра.

На рис. 1 представлена зависимость безразмерного сечения поглощения  $F$  от безразмерной частоты внешнего поля  $y$ . Этот рисунок выполнен для случая фиксированных значений безразмерной обратной длины свободного пробега  $x$  и отношения радиуса ядра к радиусу частицы  $K$ , при этом отношение скоростей Ферми в ядре и оболочке разное для каждой кривой на рисунке. Из анализа хода кривых следует, что особенностью поведения безразмерного сечения поглощения является сдвиг по фазе для кривых, построенных при различных значениях  $\gamma$ . На всех частотах сечение поглощения увеличивается с ростом параметра  $\gamma$ . С увеличением радиуса частицы (величины  $x$ ) осцилляции сечения поглощения становятся менее выраженными, что объясняется влиянием объемных столкновений электронов в ядре и оболочке частицы.

На рис. 2 приведены графики зависимости безразмерного сечения поглощения  $F$  от безразмерной

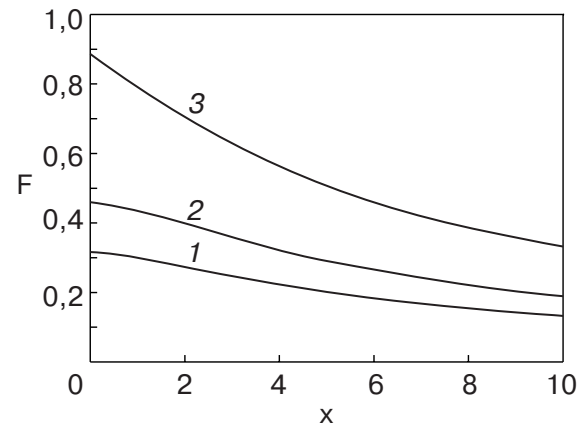


Рис. 2. Зависимость безразмерного сечения поглощения  $F$  от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов  $x$  при  $\gamma = 0,5$  (1), 1 (2), 1,5 (3) ( $y = 3$ ,  $K = 0,8$ ).



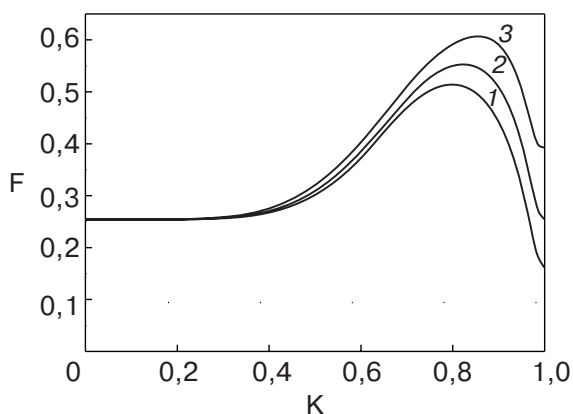


Рис. 3. Зависимость безразмерного сечения поглощения  $F$  от отношения радиуса ядра к радиусу частицы  $K$  при  $\gamma = 0,9$  (1), 1 (2), 1,1 (3) ( $x = 0, y = 7$ ).

обратной длины свободного пробега электронов  $x$ . Если постоянно отношение радиуса ядра к радиусу частицы  $K$  и безразмерная частота внешнего поля  $y$ , то при всех значениях  $x$  безразмерное сечение поглощения  $F$  уменьшается с уменьшением отношения скоростей Ферми в ядре и оболочке частицы  $\gamma$ .

Для анализа зависимости безразмерного сечения поглощения  $F$  от отношения радиуса ядра к радиусу частицы  $K$  воспользуемся рис. 3, на котором приведено безразмерное сечение поглощения биметаллической частицы при фиксированных значениях других параметров ( $x, y$  и  $\gamma$ ). В случае частиц, имеющих внешнюю оболочку из чистого металла (электроны в таких металлах обладают большой длиной свободного пробега), или для очень мелких частиц, когда выполняется условие  $x \ll 1$ , во всем интервале значений  $K$  сечение поглощения больше для частиц, у которых отношение скоростей Ферми в ядре и оболочке  $\gamma$  доминирует по величине.

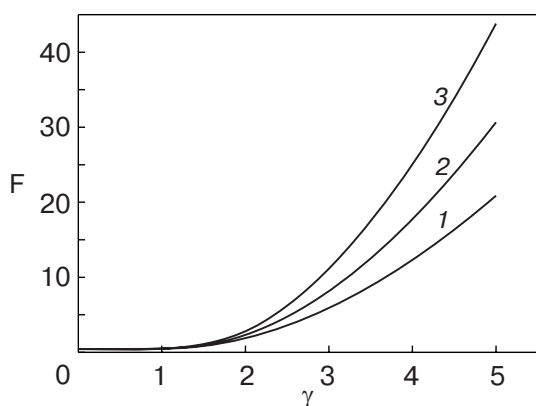


Рис. 4. Зависимость безразмерного сечения поглощения  $F$  от отношения скоростей Ферми в ядре и оболочке частицы  $\gamma$  при  $K = 0,7$  (1), 0,75 (2), 0,8 (3) ( $x = 0, y = 7$ ).

На рис. 4 отображена зависимость безразмерного сечения поглощения  $F$  от отношения скоростей Ферми в ядре и оболочке частицы  $\gamma$ . Рисунок выполнен для случая разного отношения радиуса ядра к радиусу частицы  $K$  (считается, что оболочка частицы изготовлена из чистого металла и частица находится во внешнем электромагнитном поле некоторой фиксированной частоты). При каждом значении  $\gamma$  безразмерное сечение поглощения больше для частиц, имеющих оболочку, объем которой превосходит объем внутреннего ядра.

1. Ю.И. Петров, *Физика малых частиц*, Наука, Москва (1984).
2. Дж. Займан, *Электроны и фононы*, изд-во иностр. лит., Москва (1962).
3. А.Г. Лесскис, В.Е. Пастернак, А.А. Юшканов, *ЖЭТФ* **83**, 310 (1982).
4. А.Г. Лесскис, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов, *Поверхность* № 11, 115 (1987).
5. Н.Ж. Trodahl, *Phys. Rev.* **B19**, 1316 (1979).
6. Н.Ж. Trodahl, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **15**, 7245 (1982).
7. Е.А. Бондарь, *Оптика и спектроскопия* **75**, 837 (1993).
8. Е.А. Бондарь, *Оптика и спектроскопия* **80**, 89 (1996).
9. П.М. Томчук, Б.П. Томчук, *ЖЭТФ* **112**, 661 (1997).
10. Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов, *ЖТФ* **71**, 114 (2001).
11. Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов, *Оптика и спектроскопия* **92**, 851 (2002).
12. Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов, *ЖТФ* **73**, 16 (2003).
13. Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов, *ЖЭТФ* **124**, 1112 (2003).
14. R.J. Kubo, *Phys. Soc. Jpn.* **17**, 975 (1962).
15. Э.А. Манькин, П.П. Полуэктов, Ю.Г. Рубежный, *ЖЭТФ* **70**, 2117 (1976).
16. R.D. Averitt, S.L. Westcott, and N.J.J. Halas, *J. Opt. Soc. Amer.* **B16**, 1824 (1999).
17. A. Henglein, *J. Phys. Chem.* **B104**, 2201 (2000).
18. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
19. У. Харрисон, *Теория твердого тела*, Мир, Москва (1972).
20. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва (1964).

### Electromagnetic absorption of a bimetallic spherical particle

E.V. Zavitaev

The electromagnetic absorption cross-section in a bimetallic spherical particle is calculated. A general case where the ratio of nucleus

to particle radius may be arbitrary is considered. The condition of diffuse reflection of electrons from inner and outer surfaces of the metal layer of the particle is accepted as the boundary condi-

tions of the problem. Limiting cases are considered, and the results obtained are discussed.