

Стабилизация положения магнитного резонанса согласованным полем

Е.А. Иванченко

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,
Институт теоретической физики, ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: yevgeny@kipt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 14 января 2005 г.

В формализме матрицы плотности в двухуровневой системе исследована периодическая во времени модуляция магнитного поля, стабилизирующая положение магнитного резонанса. Найдено точное решение для матрицы плотности при резонансе. Показано, что при резонансе вероятность перехода с переворотом спина не зависит от формы поля, т.е. основной резонанс стабилен относительно согласованного изменения продольного и поперечного магнитного поля. Вычислен вектор поляризации Блоха и геометрическая фаза при резонансе. Получено дифференциальное уравнение для вероятности перехода. Численно исследована зависимость усредненной по времени вероятности переворота спина от нормированной ларморовой частоты при различных параметрах модели. Показано, что положение основного резонанса не зависит от деформации поля, изменяется только ширина резонансного пика при деформации. Изучены нечетные параметрические (многофотонные) резонансные переходы. Рассмотрена статическая намагниченность, индуцированная согласованным полем. Проведенное исследование может найти применение при анализе интерференционных экспериментов, для совершенствования конструкций магнитных спектрометров, управления q-битами.

У формалізмі матриці густини в дворівневій системі досліджено періодичну у часі модуляцію магнітного поля, яка стабілізує положення магнітного резонансу. Знайдено точне рішення для матриці густини при резонансі. Показано, що при резонансі імовірність переходу з переворотом спіну не залежить від форми поля, тобто основний резонанс стабільний відносно узгодженого змінення поздовжнього та поперечного магнітного поля. Обчислено вектор поляризації Блоха та геометричну фазу при резонансі. Отримано диференціальне рівняння для імовірності переходу. Чисельно досліджено залежність усередненої по часу імовірності перевороту спіну від нормованої ларморової частоти при різних параметрах моделі. Показано, що положення основного резонансу не залежить від деформації поля, змінюється тільки ширина резонансного піку при деформації. Вивчено непарні параметричні (багатофотонні) резонансні переходи. Розглянуто статичну намагніченість, індуковану узгодженим полем. Проведено дослідження може знайти застосування при аналізі інтерференційних експериментів, для удосконалення конструкцій магнітних спектрометрів, керування q-бітами.

PACS: **33.35.+r**, **76.30.-k**, 02.30.Hq, 85.35.Gv

1. Введение

В стандартной реализации магнитного резонанса постоянное магнитное поле перпендикулярно линейно поляризованному переменному во времени t монохроматическому магнитному полю. При этом происходит сдвиг резонансной частоты (сдвиг Блоха–Зигерта [1]). Цель работы состоит в предложении и исследовании такой конфигурации магнитного поля, при ко-

торой положение главного резонанса определяется только ларморовой частотой при произвольных параметрах системы. Эта цель может быть достигнута путем обобщения модели Раби [2]. Раби изучил временную динамику частицы с дипольным магнитным моментом и спином $1/2$ в постоянном магнитном поле H_0 , направленным по оси z , и перпендикулярным ему равномерно вращающимся с частотой $\omega/2\pi$ перемен-

ным магнитным полем $H_x = h_0 \cos \omega t$, $H_y = h_0 \sin \omega t$; H_0, h_0 — амплитуды поля.

Существует ряд способов модуляции магнитного поля при изучении магнитного резонанса в зависимости от цели исследования (см. работы [3] и ссылки в них). В настоящей работе исследована временная эволюция частицы с дипольным магнитным моментом и спином $1/2$ в деформированном магнитном поле вида

$$\mathbf{H}(t) = (h_0 \operatorname{cn}(\omega t, k), h_0 \operatorname{sn}(\omega t, k), H_0 \operatorname{dn}(\omega t, k)), \quad (1)$$

в котором $\operatorname{cn}, \operatorname{sn}, \operatorname{dn}$ — эллиптические функции Якоби [4]. Такая модуляция поля при изменении модуля эллиптических функций от нуля до единицы описывает целый класс форм поля от тригонометрических [2],

($\operatorname{cn}(\omega t, 0) = \cos \omega t$, $\operatorname{sn}(\omega t, 0) = \sin \omega t$, $\operatorname{dn}(\omega t, 0) = 1$),
до импульсных экспоненциальных [5],

$$(\operatorname{cn}(\omega t, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} \omega t}, \operatorname{sn}(\omega t, 1) = \operatorname{th} \omega t, \operatorname{dn}(\omega t, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} \omega t}).$$

Эллиптические функции $\operatorname{cn}(\omega t, k), \operatorname{sn}(\omega t, k)$ имеют вещественный период $4K/\omega$, в то время как у функции $\operatorname{dn}(\omega t, k)$ вещественный период в два раза меньше. Здесь K — полный эллиптический интеграл первого рода [4]. Другими словами, хотя поле является периодическим с общим вещественным периодом $4K/\omega$, но, как видим, частота амплитудной модуляции продольного поля в два раза больше частоты амплитудной модуляции поперечного поля. Такое поле мы назовем согласованным.

Уравнение Шредингера для волновой функции $\Psi(t)$, описывающей динамику частицы со спином $1/2$ и магнитным моментом в переменном магнитном поле $\mathbf{H}(t)$, имеет вид

$$i\hbar \partial_t \Psi(t) = \frac{g\mu_0}{2} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}(t) \Psi(t), \quad (2)$$

где g — фактор Ланде, μ_0 — магнетон Бора, матрицы Паули равны

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Решение уравнения Шредингера можно представить в виде разложения по собственным функциям матрицы σ_z :

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Psi_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Psi_2(t). \quad (3)$$

Функции $\Psi_1(t), \Psi_2(t)$ являются амплитудами вероятности без переворота спина и с переворотом спи-

на соответственно, подчинены, по определению, условию нормировки

$$|\Psi_1(t)|^2 + |\Psi_2(t)|^2 = 1 \quad (4)$$

и считаются заданными в начальный момент времени t .

2. Общие свойства модели

В данной работе, являющейся продолжением работы [6], от описания с помощью волновой функции (3) перейдем к формализму матрицы плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} \Psi_1 \Psi_1^* & \Psi_1 \Psi_2^* \\ \Psi_2 \Psi_1^* & \Psi_2 \Psi_2^* \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Введем безразмерную независимую переменную $\tau = \omega t$. Из уравнения (2) следует уравнение для матрицы плотности

$$i\partial_\tau \rho = [\hat{H}, \rho]_- \quad (6)$$

с эрмитовым гамильтонианом

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0}{2\omega} \operatorname{dn}(\tau, k) & \frac{\omega_1}{2\omega} (\operatorname{cn}(\tau, k) - i \operatorname{sn}(\tau, k)) \\ \frac{\omega_1}{2\omega} (\operatorname{cn}(\tau, k) + i \operatorname{sn}(\tau, k)) & -\frac{\omega_0}{2\omega} \operatorname{dn}(\tau, k) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

в котором $\omega_0 = g\mu_0 H_0/\hbar$ — частота Лармора, $\omega_1 = g\mu_0 h_0/\hbar$ — амплитуда поперечного поля в единицах угловой частоты. Из определения матрицы плотности следуют ее свойства: $\operatorname{Sp} \rho = 1$, $\rho^+ = \rho$, $\rho^2 = \rho$. Далее, как и в работе [6], будем считать, что в начальный момент $\begin{pmatrix} \Psi_1(0) \\ \Psi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е.

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Выполним замену $\rho = \alpha^{-1} r \alpha$ с матрицей $\alpha = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f^* \end{pmatrix}$,

где функция f имеет вид

$$f = \sqrt{\operatorname{cn} \tau - i \operatorname{sn} \tau} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cn} \tau}{2}} - i \operatorname{sgn}(\operatorname{sn} \tau) \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn} \tau}{2}}. \quad (9)$$

Уравнение для преобразованной матрицы принимает форму

$$i\partial_\tau r = \frac{\omega_1}{2\omega} [\sigma_x, r]_- + \frac{\delta_r}{2\omega} \operatorname{dn} \tau [\sigma_z, r]_-, \quad (10)$$

где расстройка δ_r равна

$$\delta_r = \omega_0 - \omega. \quad (11)$$

Поскольку расстройка входит в уравнение в явном виде, то положение главного резонанса не претерпевает сдвига при изменениях параметров модели. При остром резонансе, когда $\omega_0 = \omega$, получаем уравнение

$$i\partial_\tau r^{(0)} = \frac{\omega_1}{2\omega} [\sigma_x, r^{(0)}]_-, \quad r^{(0)}(0) = \rho(0) \quad (12)$$

с решением

$$r^{(0)}(\tau) = \exp\left(-i\frac{\omega_1}{2\omega}\tau\sigma_x\right)r^{(0)}(0)\exp\left(i\frac{\omega_1}{2\omega}\tau\sigma_x\right). \quad (13)$$

Поэтому при резонансе матрица плотности имеет вид

$$\rho^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\omega_1}{2\omega} \tau & if^2 \sin \frac{\omega_1}{2\omega} \tau \cos \frac{\omega_1}{2\omega} \tau \\ -if^{*2} \sin \frac{\omega_1}{2\omega} \tau \cos \frac{\omega_1}{2\omega} \tau & \sin^2 \frac{\omega_1}{2\omega} \tau \end{pmatrix} \quad (14)$$

и, следовательно, вероятность перехода

$$P_{\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}}(\tau, \delta_r = 0) = \sin^2 \frac{\omega_1}{2\omega} \tau \quad (15)$$

не содержит модуля k , т.е. не зависит от согласованной деформации поля [6].

Исследуем решение уравнения (10) в виде ряда по степеням параметра разложения $\delta_r/2\omega$:

$$r(\tau) = r^{(0)}(\tau) + r^{(1)}(\tau) + \dots \quad (16)$$

Подставим разложение (16) в уравнение (10) и приравняем слагаемые с одинаковыми степенями

$\delta_r/2\omega$. В результате получим систему уравнений для нахождения $r^{(l)}(\tau)$:

$$ir_\tau^{(0)} = \frac{\omega_1}{2\omega} [\sigma_x, r^{(0)}]_-, \quad (17)$$

$$ir_\tau^{(l)} = \frac{\omega_1}{2\omega} [\sigma_x, r^{(l)}]_- + \frac{\delta_r}{2\omega} \text{dn} \tau [\sigma_z, r^{(l-1)}]_-, \quad (18)$$

где $l = 1, 2, \dots$

Умножим уравнение (18) слева на матрицу $\exp\left(i\frac{\omega_1}{2\omega}\tau\sigma_x\right)$ и справа на матрицу $\exp\left(-i\frac{\omega_1}{2\omega}\tau\sigma_x\right)$ (построение интегрирующего множителя). Теперь слагаемые $r^{(l)}$ в ряде (16) определяются с помощью предыдущих $r^{(l-1)}$:

$$r^{(l)} = -i \exp\left(-i\frac{\omega_1}{2\omega}\tau\sigma_x\right) \times \left\{ \int_0^\tau d\tau' \exp\left(i\frac{\omega_1}{2\omega}\tau'\sigma_x\right) \frac{\delta_r}{2\omega} \text{dn} \tau' [\sigma_z, r^{(l-1)}(\tau')]_- \times \exp\left(-i\frac{\omega_1}{2\omega}\tau'\sigma_x\right) \right\} \exp\left(i\frac{\omega_1}{2\omega}\tau\sigma_x\right). \quad (19)$$

Поскольку коммутатор $[\sigma_z, r^{(0)}(\tau')]_- = i \sin \frac{\omega_1}{\omega} \tau' \sigma_x$, первая поправка

$$r^{(1)}(\tau) = \frac{\delta_r}{2\omega} \int_0^\tau d\tau' \text{dn} \tau' \sin \frac{\omega_1}{\omega} \tau' \sigma_x \quad (20)$$

не дает вклада в вероятность перехода. Используя алгебру матриц Паули, получаем матрицу плотности с учетом второй поправки

$$\rho^{(\text{II})} = \alpha^{-1}(r^{(0)} + r^{(1)} + r^{(2)})\alpha =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\omega_1}{2\omega} \tau + \left(\frac{\delta_r}{2\omega}\right)^2 F_2 & if^2 \sin \frac{\omega_1}{2\omega} \tau \cos \frac{\omega_1}{2\omega} \tau + \frac{\delta_r}{2\omega} f^2 S - \left(i\frac{\delta_r}{2\omega}\right)^2 f^2 F_1 \\ -if^{*2} \sin \frac{\omega_1}{2\omega} \tau \cos \frac{\omega_1}{2\omega} \tau + \frac{\delta_r}{2\omega} f^{*2} S + i\left(\frac{\delta_r}{2\omega}\right)^2 f^{*2} F_1 & \sin^2 \frac{\omega_1}{2\omega} \tau - \left(\frac{\delta_r}{2\omega}\right)^2 F_2 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где

$$F_1 = 2(\Phi_1 \sin \frac{\omega_1}{\omega} \tau + \Phi_2 \cos \frac{\omega_1}{\omega} \tau),$$

$$F_2 = 2(-\Phi_1 \cos \frac{\omega_1}{\omega} \tau + \Phi_2 \sin \frac{\omega_1}{\omega} \tau),$$

$$\Phi_1 = \frac{S^2}{2}, \quad S = \int_0^\tau d\tau' \text{dn} \tau' \sin \frac{\omega_1}{\omega} \tau',$$

$$\Phi_2 = \int_0^\tau d\tau' \text{dn} \tau' \cos \frac{\omega_1}{\omega} \tau' S(\tau'). \quad (22)$$

Нетрудно показать, что в любом порядке по $\delta_r/2\omega$ диагональные элементы матрицы ρ , характеризую-

щие квантовую динамику вероятности без переверота спина и с переворотом спина, содержат слагаемые только четной степени по $\delta_r/2\omega$, а недиагональные элементы зависят как от четных, так и нечетных степеней параметра разложения, так же как

и в точной матрице плотности в модели Раби ρ^R , давно используемой в резонансной спектроскопии нейтронных, атомных и молекулярных пучков:

$$\rho^R = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\Omega_R}{2\omega} \tau + \frac{\delta_r^2}{\Omega_R^2} \sin^2 \frac{\Omega_R}{2\omega} \tau & (i \frac{\omega_1}{\Omega_R} \sin \frac{\Omega_R}{\omega} \tau + \frac{\delta_r \omega_1}{2\Omega_R^2} \sin^2 \frac{\Omega_R}{2\omega} \tau) e^{-i\tau} \\ (-i \frac{\omega_1}{2\Omega_R} \sin \frac{\Omega_R}{\omega} \tau + \frac{\delta_r \omega_1}{\Omega_R^2} \sin^2 \frac{\Omega_R}{2\omega} \tau) e^{i\tau} & \frac{\omega_1^2}{\Omega_R^2} \sin^2 \frac{\Omega_R}{2\omega} \tau \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где $\Omega_R = \sqrt{\delta_r^2 + \omega_1^2}$ – частота Раби.

3. Дифференциальные уравнения для определения вероятности перехода

В общем случае при произвольной расстройке δ_r (11) представим матрицу r в виде разложения по полному набору матриц Паули:

$$r = \frac{1}{2}(1 + \sigma \mathbf{R}), \quad r = r^+, \quad \text{Sp } r = 1. \quad (24)$$

Из условия $\det \rho = 0$ получаем связь между искомыми функциями $(R_x, R_y, R_z) = \mathbf{R}$:

$$R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = 1 \quad (25)$$

для всех τ . Подставим выражение для r (24) в уравнение (10). В результате получаем систему трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно искомых вещественных функций R_x, R_y, R_z :

$$\partial_\tau R_x = -\frac{\delta_r}{\omega} \text{dn } \tau R_y, \quad (26)$$

$$\partial_\tau R_y = \frac{\delta_r}{\omega} \text{dn } \tau R_x - \frac{\omega_1}{\omega} R_z, \quad (27)$$

$$\partial_\tau R_z = \frac{\omega_1}{\omega} R_y \quad (28)$$

с начальными условиями $R_x(0) = R_y(0) = 0, R_z(0) = 1$. Система уравнений (26)–(28) эквивалентна векторному уравнению $\partial_\tau \mathbf{R} = [\mathbf{f}, \mathbf{R}]$, где $\mathbf{f} = (\frac{\omega_1}{\omega}, 0, \frac{\delta_r}{\omega} \text{dn } \tau)$, и формально совпадает с уравнениями Френе (для первых компонент подвижного трехгранника) пространственной кривой на сфере. Поэтому, следуя [7], введем комплексную функцию

$$y = \frac{R_z + iR_y}{1 - R_x}.$$

Введение этой функции с учетом закона сохранения (25) позволяет редуцировать систему трех дифференциальных уравнений (26)–(28) к одному комплексному уравнению Риккати:

$$\partial_\tau y = -i \frac{\omega_1}{\omega} y - i \frac{\delta_r}{2\omega} \text{dn } \tau + i \frac{\delta_r}{2\omega} \text{dn } \tau y^2, \quad y(0) = 1. \quad (29)$$

Зная y , легко найти функции R_x, R_y, R_z :

$$R_x = \frac{yy^* - 1}{1 + yy^*}, \quad R_y = i \frac{y^* - y}{1 + yy^*}, \quad R_z = \frac{y + y^*}{1 + yy^*}. \quad (30)$$

Теперь в терминах R_x, R_y, R_z матрица плотности ρ принимает вид

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + R_z & f^2(R_x - iR_y) \\ f^{*2}(R_x + iR_y) & 1 - R_z \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Вероятность перехода с переворотом спина равна матричному элементу ρ , т.е.

$$P_{\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}}(\tau, \delta_r, k) = \frac{1}{2}(1 - R_z). \quad (32)$$

Используя выражение (32) и систему (26)–(28), легко получить дифференциальное уравнение третьего порядка для вероятности перехода, которое мы здесь не выписываем.

4. Визуализация динамики на сфере Блоха. Геометрическая фаза при резонансе

Сфера Блоха широко используется для наглядности динамики двухуровневых систем [8,9]. Вектор Блоха (вектор поляризации) \mathbf{P} определяется для чистых состояний как

$$\mathbf{P} = \text{Sp } \rho \sigma. \quad (33)$$

В резонансном случае матрица ρ представлена формулой (14). Простое вычисление по формуле (33) приводит к результату:

$$\mathbf{P} = (\text{sn}(\omega_0 t, k) \sin \omega_1 t, -\text{cn}(\omega_0 t, k) \sin \omega_1 t, \cos \omega_1 t). \quad (34)$$

Вектор поляризации удовлетворяет уравнению Блоха

$$\partial_t \mathbf{P} = \gamma_m [\mathbf{H}, \mathbf{P}], \quad \gamma_m = \frac{g\mu_0}{\hbar}, \quad \mathbf{P}^2 = 1. \quad (35)$$

При временах $\{t_n: \omega_1 t_n = 2\pi n, n = 1, 2, \dots\}$ вектор \mathbf{P} принимает исходное значение $(0, 0, 1)$, т.е. на сфере Блоха конец вектора вычерчивает замкнутую траекторию.

В работе [9] построен эрмитовый «фазовый» оператор для двухуровневых систем:

$$X_\Psi = \frac{1}{2} (|\Psi\rangle\langle\Psi A| + |A\Psi\rangle\langle\Psi|), \quad (36)$$

где $A = CU$, C — оператор комплексного сопряжения, $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Информация об изменениях фазы движения получается из «фазового» трехмерного вектора

$$\mathbf{c} = \text{Sp} X_\Psi \boldsymbol{\sigma}, \quad (37)$$

явный вид которого следующий:

$$\mathbf{c} = (\text{cn}(\omega_0 t, k), \text{sn}(\omega_0 t, k), 0), \quad \mathbf{c}^2 = 1, \quad [\mathbf{c}, \mathbf{P}] = 0. \quad (38)$$

«Фазовый» вектор \mathbf{c} удовлетворяет векторному уравнению

$$\partial_t \mathbf{c} = \gamma_m [\mathbf{H}, \mathbf{c}], \quad \mathbf{c}(0) = (1, 0, 0). \quad (39)$$

Таким образом, с помощью введенного вектора \mathbf{c} можно определить геометрическую (топологическую) фазу, поскольку скалярное произведение

$$\mathbf{c}(0) \cdot \mathbf{c}(t) = \text{cn}(\omega_0 t, k) \quad (40)$$

при циклической эволюции не совпадает со значением при $t = 0$. И только в исключительном случае, когда $(\omega_0/\omega_1)2\pi n = 4Kn_1$ ($n_1 = 1, 2, \dots$) «фазовый» вектор не дает информации о фазе. Третий орт $\mathbf{a} = [\mathbf{P}, \mathbf{c}]$, как нетрудно убедиться, удовлетворяет векторному уравнению

$$\partial_t \mathbf{a} = \gamma_m [\mathbf{H}, \mathbf{a}], \quad \mathbf{a}(0) = (0, 1, 0) \quad (41)$$

и равен

$$\mathbf{a} = (-\text{sn}(\omega_0 t, k) \cos \omega_1 t, \text{cn}(\omega_0 t, k) \cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t), \quad \mathbf{a}^2 = 1. \quad (42)$$

Эволюция полученной ортогональной положительно ориентированной триады $\mathbf{P}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ определяет динамику двухуровневой системы и допускает наглядное представление с помощью сферы Блоха.

5. Численные результаты

5.1. Усредненная по времени вероятность перехода

Усредненная по времени вероятность перехода с переворотом спина определяется выражением

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \frac{1 - R_z(\tau)}{2}. \quad (43)$$

Найдем зависимость вероятности (43) от формы поля, изменяя модульный параметр k при разных значениях δ_r , численно решая систему (26)–(28), или, что эквивалентно, уравнение (29).

На рис. 1 представлена зависимость усредненной вероятности (43) от нормированной ларморовой частоты ω_0/ω и формы поля k при различных параметрах модели. Видно, что нет сдвига положения главного резонанса. При точном резонансе вероятность перехода не зависит от деформации магнитного поля. Численный расчет подтверждает, что вероятность (43) не зависит от знака δ_r/ω . Как указывалось в работе [6], параметрические резонансы (многофотонные резонансы по терминологии формализма Флоке [10]) возникают только при отличных от нуля расстройке δ_r и модуле k , поскольку расстройка и деформация в уравнение (10) входят в виде произведения. Когда один из параметров δ_r или k равен нулю, параметрические резонансы отсутствуют. Увеличение деформации поля приводит к уширению резонансных пиков. Положение резонансов определяется заданным начальным значением спина (8). Первый резонанс соответствует одному поглощенному резонансному фотону, второй определяется поглощением–испусканием–поглощением и так далее. Положение нечетных параметрических резонансов крайне близко к $\omega_0/\omega = 2p + 1$, где $p = 1, 2, \dots$, но имеет тенденцию заметного сдвига с увеличением отношения ω_1/ω (рис. 1, z).

5.2. Генерация статического магнитного поля

Усредненные по времени компоненты вектора поляризации определяются формулами

$$n_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau (cR_x + sR_y), \quad (44)$$

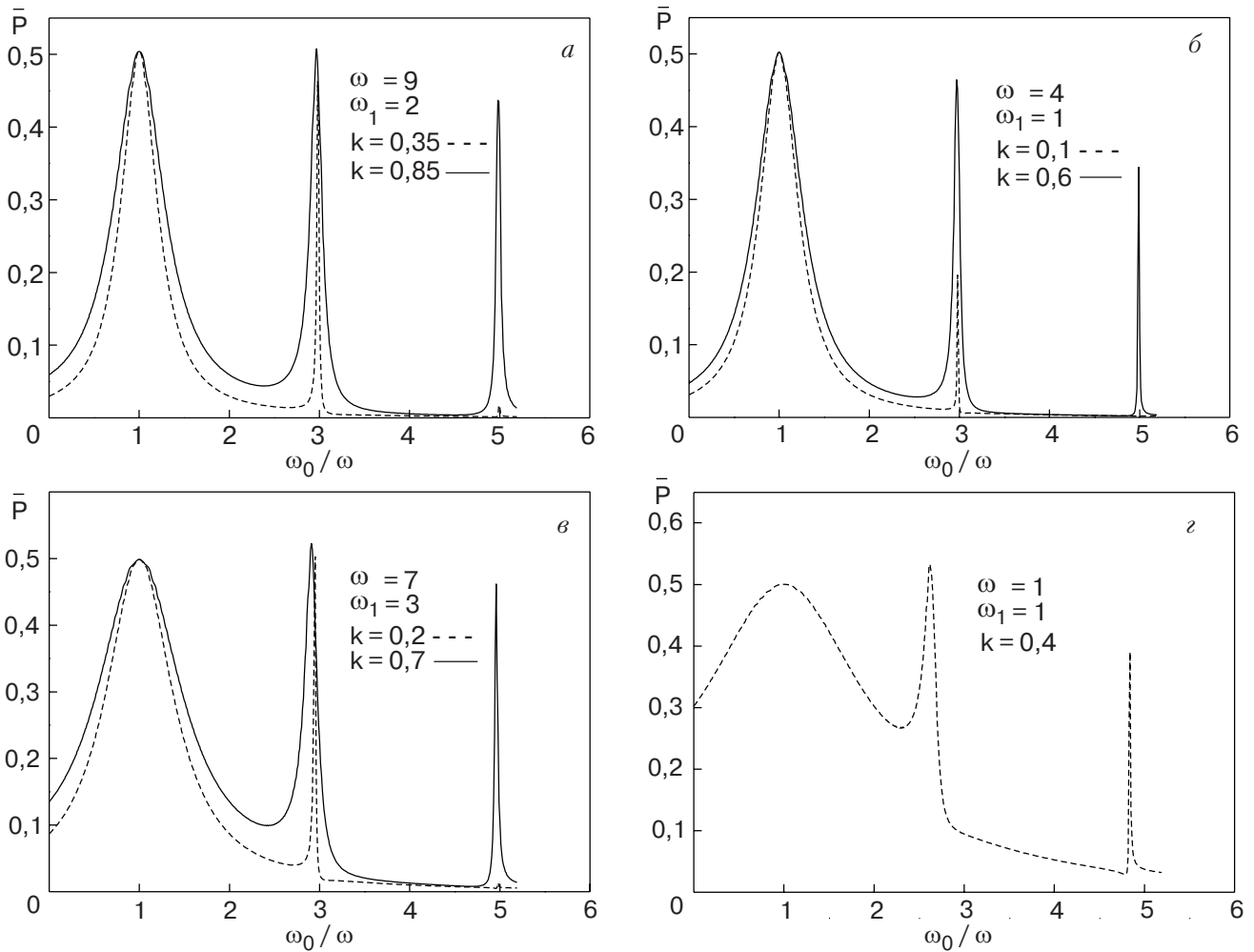


Рис. 1. Усредненная по времени вероятность перехода при различных параметрах как функция нормированной ларморовой частоты.

$$n_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau (sR_x - cR_y), \quad (45)$$

$$n_z = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau R_z, \quad (46)$$

где $c = \text{cn}^2(\tau, k) - \text{sn}^2(\tau, k)$, $s = -2\text{sn}(\tau, k)\text{cn}(\tau, k)$. Как видно на рис. 2, происходит генерация статического магнитного поля (при резонансе в плоскости xOy), обусловленная согласованным магнитным полем. Если модульный параметр стремится к нулю, то, как следует из формулы (34), генерация исчезает. Компоненты статической поляризации n_x, n_y имеют резкие всплески по амплитуде в окрестностях параметрических резонансов, но с увеличением параметра ω_0/ω уменьшается их амплитуда и ширина резонансных пиков. Следует отметить, что возникновение нулевой гармоники вызвано только деформацией поля без учета диссипации, в

то время как в работах [11] при другой модуляции магнитного поля этот же эффект исчезает в отсутствие диссипации.

Все численные результаты при решении системы (26)–(28) выполнены по методу Рунге–Кутты с шагом по $\tau = 0,01$ и шагом по $\omega_0/\omega = 0,01$. Интервал усреднения T был выбран равным 500.

6. Заключение

В формализме матрицы плотности рассмотрено поведение частицы со спином $1/2$ и дипольным магнитным моментом в переменном магнитном поле вида $(h_0 \text{cn}(\omega t, k), h_0 \text{sn}(\omega t, k), H_0 \text{dn}(\omega t, k))$. Изменение параметра k от нуля до единицы порождает широкий набор функций от тригонометрических форм до импульсных экспоненциальных, модулирующих поле. Найдено точное решение для матрицы плотности при резонансе для любого k . Показано, что в этом случае вероятность переворота спина не зависит от k . Вычислен вектор поляризации Блоха и гео-

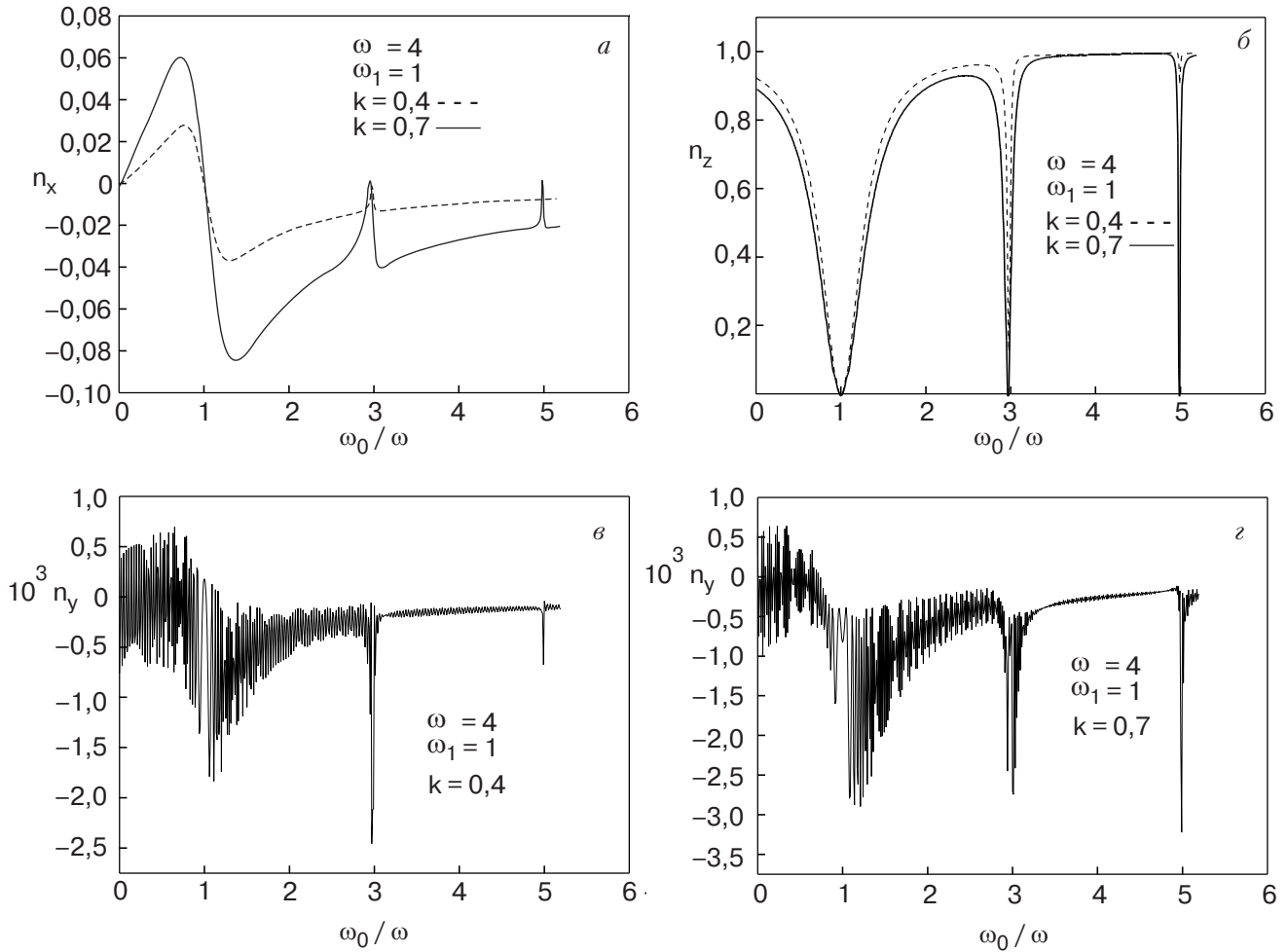


Рис. 2. Статическая поляризация n_x, n_y, n_z как функция нормированной ларморовой частоты.

метрическая фаза при резонансе. Получены дифференциальные уравнения для вероятности перехода. Численно исследована зависимость усредненной по времени вероятности переворота спина от нормированной ларморовой частоты при различных параметрах модели. Показано, что положение основного резонанса не претерпевает сдвига при изменении параметров, а изменяется только ширина резонансного пика. Положение нечетных параметрических (многофотонных) резонансов имеет тенденцию заметного сдвига с увеличением амплитуды поперечного поля при заданной частоте. Увеличение деформации поля приводит к уширению резонансных пиков. Вычислена статическая поляризация, индуцированная согласованным полем.

Целесообразно выполнить эксперимент для проверки теоретических предсказаний относительно стабильности положения магнитного резонанса при различных параметрах модели. Очевидно, что такой эксперимент является расширением экспериментальной ситуации в циркулярно поляризованном поле. Поскольку параметрические резонансы в

согласованном магнитном поле имеют заметную ширину, возможно, предпочтительнее исследовать магнитный резонанс на параметрических частотах. Проведенное исследование может найти применение при анализе интерференционных экспериментов, совершенствовании конструкций магнитных спектрометров.

Автор благодарит А.Г. Андерса и И.А. Громова за интерес к работе и полезные замечания.

1. M. Grifoni and P. Hanggi, *Phys. Rep.* **304**, 229 (1998).
2. I.I. Rabi, *Phys. Rev.* **51**, 652 (1937); J. Schwinger, *Phys. Rev.* **51**, 648 (1937).
3. M. Kälin, I. Gromov, and A. Schweiger, *J. Magn. Resonance* **160**, 166 (2003); M. Fedin, I. Gromov, and A. Schweiger, *J. Magn. Resonance* **171**, 80 (2004).
4. *Handbook of Mathematical Functions*, M. Abramovitz and I.A. Stegun (eds.), Dover, New York (1968).
5. N. Rosen and C. Zener, *Phys. Rev.* **40**, 502 (1932); A. Bambini and P.R. Berman, *Phys. Rev.* **A23**, 2496 (1981).

6. E.A. Ivanchenko, *Magnetic Resonance in an Elliptic Magnetic Field*, *ArXiv: quant-ph/0404114* (2004); *Physika* **B358**, 308 (2005).
7. Yu.A. Aminov, *Differential Geometry and Topology of Curves*, Amsterdam (2000).
8. H. Urbantke, *Am. J. Phys.* **59**, 503 (1990).
9. A. Müller, *Phys. Rev.* **A57**, 731 (1998).
10. I. Gromov and Schweiger, *J. Magn. Resonance*, **146**, 110 (2000); J.H. Shirley, *Phys. Rev.* **B138**, 987 (1965).
11. S. Flach and A.A. Ovchinnikov, *Physica* **A292**, 268 (2001); S. Flach, A.E. Miroshnichenko, and A.A. Ovchinnikov, *Phys. Rev.* **B65**, 104438 (2002).

Stabilization of magnetic resonance position by synchronized field

E.A. Ivanchenko

The time-periodic modulation of the magnetic field stabilizing the magnetic resonance position has been investigated density matrix in the

formalism in a two-level system. An exact solution for density matrix at resonance was found. It is shown that the fundamental resonance is stable with respect to consistent variations of longitudinal and transverse magnetic fields. The Bloch vector and the geometric phase at resonance are calculated. A differential equation for transition probability was obtained. The dependence of time-averaged spin flip probability on the normalized Larmor frequency was numerically studied for different parameters of the model. It is shown that the fundamental resonance position does not depend on field distortion, in contrast the resonance peak width. The odd parametric (multi-photon) resonance transitions are studied. The static magnetization induced by the time-periodic modulated magnetic field is considered. The results obtained may be applied to analyze interference experiments, to improve magnetic spectrometers and to vary the field of quantum computing.