

Нелинейное возбуждение температурных волн в сверхтекучих растворах ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ за счет поглощения СВЕТОВЫХ ВОЛН

Н.И. Пушкина

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Воробьевы Горы, Москва, 119992, Россия

E-mail: N.Pushkina@mererand.com

Статья поступила в редакцию 29 декабря 2006 г.

Рассматривается нелинейное возбуждение температурных волн в сверхтекучих растворах ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$ оптическими волнами за счет их поглощения. Выведено нелинейное уравнение, описывающее такое взаимодействие, получено выражение для длины нелинейного взаимодействия и оценен порядок ее величины, при которой второй звук, возбуждаемый двумя световыми волнами, может быть усилен от флуктуаций до наблюдаемых значений.

Розглянуто нелінійне збудження температурних хвиль у надплинних розчинах ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$ оптичними хвилями за рахунок їхнього поглинання. Виведено нелінійне рівняння, що описує таку взаємодію, отримано вираз для довжини нелінійної взаємодії й оцінено порядок її величини, при якій другий звук, що збуджено двома світловими хвилями, може бути посилений від флуктуацій до спостережуваних значень.

PACS: 47.37.+q Гидродинамические аспекты сверхтекучести, квантовые жидкости.

Ключевые слова: сверхтекучий гелий, растворы, второй звук, оптическая волна, нелинейное взаимодействие, поглощение.

Тип нелинейных волновых взаимодействий, принципиально обусловленных поглощением волн в среде, впервые исследован в классических средах в рамках нелинейной оптики в работах [1–4]. В работе [1] дана теория вынужденного рассеяния света на диффузионной температурной «волне», а экспериментальные наблюдения такого рассеяния в жидкостях и газовых смесях представлены в [2–4]. Для случая гидродинамики вызванный наличием поглощения нелинейный процесс — вынужденное рассеяние второго звука в сверхтекучей жидкости — рассмотрен в [5,6]. В данной статье впервые исследовано обусловленное поглощением нелинейное оптическое возбуждение слабозатухающей температурной волны — второго звука в квантовой жидкости. Нелинейное взаимодействие рассмотрено для случая, когда в сверхтекучем растворе ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ распространяются под углом друг к другу две световые волны с немного отличающимися частотами, и за счет энергии, которая выделяется при

поглощении этих волн, возбуждается волна второго звука на разностной частоте.

Теория процесса

Описание нелинейного взаимодействия проведем, используя гамильтонов формализм. Гамильтоновыми переменными для сверхтекучих растворов ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ являются три канонически сопряженных пары (ρ, α) , (S, β) и (N, ξ) (см. [7]). Физический смысл этих переменных следующий: ρ — плотность раствора; величина α определяет скорость сверхтекучей компоненты $\mathbf{v}_s = \nabla\alpha$; S — плотность энтропии; N — число частиц ${}^3\text{He}$ в единице объема; величины β и ξ определяют импульс \mathbf{j} единицы объема жидкости в системе, движущейся со скоростью \mathbf{v}_s :

$$\mathbf{j} = \rho_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = S\nabla\beta + N\nabla\xi,$$

где ρ_n, \mathbf{v}_n — плотность и скорость нормальной компоненты раствора; при этом импульс единицы объема жидкости \mathbf{I} в неподвижной системе отсчета равен

$$\mathbf{I} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n = \mathbf{j} + \rho \mathbf{v}_s$$

(ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты).

Для исследования указанного нелинейного воздействия электромагнитного поля на второй звук достаточно ограничиться линейными гидродинамическими уравнениями с нелинейным по световому полю источником в уравнении для энтропии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\Delta(S_0 \beta + N_0 \xi + \rho_0 \alpha); \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= -\mu; \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} = -T; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\zeta; \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -S_0 \Delta \left(\frac{S_0}{\rho_{n0}} \beta + \frac{N_0}{\rho_{n0}} \xi + \alpha \right) + \frac{Q}{T}; \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -N_0 \Delta \left(\frac{S_0}{\rho_{n0}} \beta + \frac{N_0}{\rho_{n0}} \xi + \alpha \right). \end{aligned} \quad (1)$$

В этих уравнениях μ — химический потенциал раствора, ξ — химический потенциал примеси, T — температура, Q — количество тепла, выделяемое в единицу времени вследствие поглощения электромагнитных волн. Мощность, выделяемая световыми волнами в единице объема, пропорциональна квадрату модуля суммарного поля $|E|^2$. При этом резонансная для второго звука часть с разностной частотой имеет вид

$$Q = \frac{c_l n \gamma_l}{8\pi} E_1 E_2^* \exp(-i\Omega t),$$

где c_l — скорость света, n — показатель преломления, γ_l — амплитудный коэффициент поглощения световых волн, $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, где ω_1 и ω_2 — частоты оптических волн E_1 и E_2 . Если эти волны с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 направлены под углом θ друг к другу, то модуль волнового вектора \mathbf{q} возбуждаемого второго звука равен

$$|\mathbf{q}| \approx 2 \frac{\omega}{c} \sin \frac{\theta}{2},$$

здесь $\omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$.

В уравнениях (1) перейдем к нормальным координатам. Предварительно удобно ввести новые координаты v, ψ, ϕ и η [7]: $\delta \mathbf{S} = \mathbf{S}_0 v$, $\psi = (\mathbf{S}_0 \delta \beta)$, $\phi = \rho_0 \delta \alpha$, $\delta \rho = \rho_0 \eta$. Здесь условно использованы векторные обозначения: $\mathbf{S} = (S, N)$, $\beta = (\beta, \xi)$. Пары (v, ψ) и (η, ϕ) также являются канонически сопряженными переменными. Уравнения (1) в этих переменных приобретают вид (опускаем индекс «0» при равновесных термодинамических величинах):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \Delta(\phi + \psi);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \Delta \left[\left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \right) \psi + \phi \right] + \frac{1}{S+N} \frac{Q}{T};$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho^2 \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \eta - \rho \left(S \frac{\partial \mu}{\partial S} + N \frac{\partial \mu}{\partial N} \right) v;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\rho \left(S \frac{\partial T}{\partial \rho} + N \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) \eta -$$

$$- \left[S \left(S \frac{\partial T}{\partial S} + N \frac{\partial \zeta}{\partial S} \right) + N \left(S \frac{\partial T}{\partial N} + N \frac{\partial \zeta}{\partial N} \right) \right] v.$$

Исключая из этих уравнений ϕ и ψ , получаем

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = K \Delta \eta + L \Delta v; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = M \Delta \eta + R \Delta v + (S+N)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{T} \right).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$K = S \frac{\partial T}{\partial \rho} + N \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho};$$

$$L = \frac{1}{\rho} \left[S \left(S \frac{\partial T}{\partial S} + N \frac{\partial \zeta}{\partial S} \right) + N \left(S \frac{\partial T}{\partial N} + N \frac{\partial \zeta}{\partial N} \right) + S \frac{\partial \mu}{\partial S} + N \frac{\partial \mu}{\partial N} \right];$$

$$M = \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \right) \left(K - \rho_s \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right);$$

$$R = \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \right) \left[L - \frac{\rho_s}{\rho} \left(S \frac{\partial \mu}{\partial S} + N \frac{\partial \mu}{\partial N} \right) \right].$$

Из (2) получим уравнение для амплитуды возбуждаемого второго звука, изменение которой мало на расстоянии порядка длины волны звука вследствие малости нелинейности. Для этого воспользуемся соотношениями, которые связывают фурье-компоненты переменных η и v с нормальными координатами второго звука в слабом сверхтекучем растворе [7]:

$$\eta_q = \gamma B(b_q + b_{-q}^*),$$

$$v_q = (\gamma - 1) B(b_q + b_{-q}^*),$$

$$\gamma = -\frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right)_{c,p} - \frac{c}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{\sigma,p}, \quad (3)$$

$$B = \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\Omega}{2\rho c^2} \right)^{1/2},$$

σ — энтропия единицы массы, c — концентрация раствора, p — давление.

Учитывая соотношения (3), справедливые для плоской волны, представим переменную η_q в виде

$$\eta_q = \frac{\gamma}{\gamma-1} v_q + \kappa, \quad (4)$$

где κ — нелинейная поправка к линейному соотношению между фурье-компонентами.

Подставляя соотношение (4) в уравнения (2) и исключая величину κ , приходим к следующему уравнению для изменения с расстоянием амплитуды второго звука:

$$\frac{dv_q}{dx} = \frac{\left[1 - c_2^{-2} \left(G + \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \right] \frac{c_2 c_1 n \gamma_l}{T(S+N)8\pi} E_1 E_2^*}{\frac{1}{c_2^2} \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(DG - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} F \right) + \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \right) \left(-\gamma G + \frac{F}{\rho} \right) - \gamma \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + D}. \quad (5)$$

В уравнении (5) введены следующие обозначения:

$$D = S \frac{\partial \mu}{\partial S} + N \frac{\partial \mu}{\partial N}; \quad G = S \frac{\partial T}{\partial \rho} + N \frac{\partial \zeta}{\partial \rho};$$

$$F = S \left(S \frac{\partial T}{\partial S} + N \frac{\partial \zeta}{\partial S} \right) + N \left(S \frac{\partial T}{\partial N} + N \frac{\partial \zeta}{\partial N} \right).$$

Оценим, на каком расстоянии l интенсивность второго звука может быть усилена от флуктуационных до наблюдаемых значений. Из уравнения (5) имеем

$$|v_q(l)| - |v_q(0)|_{\text{fl}} \approx |v_q(l)| \approx |A| |E|^2 l,$$

где $|v_q(0)|_{\text{fl}}$ — флуктуационное значение амплитуды второго звука, A — коэффициент при $E_1 E_2^*$ в правой части уравнения (5), $|E| \approx |E_1| \approx |E_2|$. Нормальная координата b_q связана с интенсивностью I второго звука соотношением $I = c_2 \Omega |b_q|^2$, поэтому для длины взаимодействия l получаем

$$l \sim \frac{|v_q|}{|A| |E|^2} \approx \left(\frac{I}{2\rho c_2} \frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^{1/2} \frac{1}{c_2 |A| |E|^2}.$$

Анализ выражения для A показывает, что входящие в него термодинамические параметры имеют следующий порядок величины (с учетом, в частности, того, что скорость первого звука c_1 в гелии существенно больше скорости второго звука):

$$\chi = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c} \ll 1; \quad \gamma \sim \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{\rho_n}{\rho_s} \ll 1 \text{ не вблизи } \lambda\text{-точки};$$

$$G + \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \sim \chi c_1^2; \quad DG \sim \chi^2 c_1^4; \quad F \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \sim \frac{\rho_n}{\rho_s} c_1^2 c_2^2;$$

$$G \sim \chi c_1^2; \quad F \sim \chi^2 c_1^2 \rho; \quad \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \sim \frac{\rho_n}{\rho_s} c_2^2; \quad D \sim \chi c_1^2.$$

Учитывая приведенные соотношения, длину возбуждения l буквенно по порядку величины можно представить в виде

$$l \sim \left(\frac{I}{2\rho c_2} \frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^{1/2} \chi \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \frac{T(S+N)}{\gamma_l I_l},$$

где $I_l \sim \frac{|E|^2}{8\pi} c_1 n$ — интенсивность света.

Сделаем численную оценку величины l , используя для физических параметров сверхтекучих растворов результаты экспериментов, приведенные в работах [8,9]. При температуре $T = 1,5$ К для раствора с концентрацией ^3He порядка нескольких процентов имеем

$$c_1 = 2,3 \cdot 10^4 \text{ см/с}; \quad c_2 = 3 \cdot 10^3 \text{ см/с}; \quad \frac{\rho_s}{\rho_n} \approx 3;$$

$$\chi \approx 0,02; \quad \rho = 0,14 \text{ г/см}^3; \quad S = \rho \sigma \approx 5 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3};$$

$$N = \rho c / m_3 \approx 10^{21} \text{ см}^{-3} \quad (m_3 \text{ — масса атома } ^3\text{He});$$

$$\omega \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}; \quad \gamma_l \approx (10^{-2} - 10^{-3}) \text{ см}^{-1}.$$

При интенсивности оптической волны $I_l \sim 10^3 \text{ Вт/см}^2$ второй звук может быть усилен до интенсивности $\sim 10^{-3} \text{ Вт/см}^2$ на длине $l \sim 1$ см. Заметим, что с точки зрения эксперимента в сверхтекучем гелии реальной является и на порядки большая интенсивность световых волн при работе в импульсном режиме (см., например, [10,11]). В этом случае усиление второго звука будет существенно эффективнее.

Заключение

В работе теоретически исследовано нелинейное возбуждение второго звука в сверхтекучих растворах $^3\text{He}-^4\text{He}$ за счет энергии, выделяемой при поглощении двух достаточно интенсивных оптических волн, частоты и волновые векторы которых удовлетворяют резонансным условиям для волн второго звука. Рассмотрение проведено в рамках гамильтонова формализма. Выведено уравнение, описывающее рост амплитуды возбужденного второго звука, и из него получено выражение для длины нелинейного взаимодействия волн. Проведена численная оценка полученных результатов, которая позволяет сделать вывод, что в исследуемом процессе второй звук может быть усилен до наблюдаемых значений при реальных для эксперимента в сверхтекучем гелии значениях длины взаимодействия и интенсивности оптических волн.

1. R.M. Herman and M.A. Gray, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 824 (1967).
2. D.H. Rank, C.W. Cho, N.D. Foltz, and T.A. Wiggins, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 828 (1967).

3. T.A. Wiggins, C.W. Cho, D.R. Dietz, and N.D. Foltz, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 831 (1968).
4. J.L. Emmett and A.L. Schawlow, *Phys. Rev.* **170**, 358 (1968).
5. Н.И. Пушкина, *Сб. тр. XVI сессии Росс. Акуст. Общества*, ГЕОС, Москва (2005), с. 219.
6. Н.И. Пушкина, *ФНТ* **32**, 1467 (2006).
7. В.В. Лебедев, *ЖЭТФ* **72**, 2224 (1977).
8. Б.Н. Есельсон, В.Н. Григорьев, В.Г. Иванцов, Э.Я. Рудавский, Д.Г. Саникидзе, И.Я. Сербин, *Растворы квантовых жидкостей ^3He - ^4He* , Наука, Москва (1973).
9. В.И. Соболев, Б.Н. Есельсон, *ЖЭТФ* **60**, 240 (1971).
10. И.И. Абрикосова, О.М. Бочкова, *Письма в ЖЭТФ* **9**, 285 (1969).
11. W. Heinicke, G. Winterling, and K. Dransfeld, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 170 (1969).

Nonlinear excitation of temperature waves in superfluid solutions ^3He - ^4He due to light waves absorption

N.I. Pushkina

Nonlinear excitation of temperature waves in superfluid solutions ^3He in ^4He by light waves due to their absorption is discussed. Nonlinear wave equations that model the interaction of second-sound waves with light waves are derived, an expression for nonlinear interaction length is obtained and an order-of-magnitude numerical estimate of the distance at which the second-sound wave is amplified from the fluctuation level up to observable values is performed.

PACS: **47.37.+q** Hydrodynamic aspects of superfluidity; quantum fluids.

Keywords: superfluid helium, solutions, second sound, light wave, nonlinear interaction, absorption.