УДК 519.872

ОДНОКАНАЛЬНА СИСТЕМА ОБСЛУГОВУВАННЯ ІЗ ЕРЛАНГІВСЬКИМ РОЗПОДІЛОМ ЧАСУ ЦИКЛУ ОРБІТИ

С.В. ПУСТОВА

Розглядається одноканальна система масового обслуговування з поверненнями без втрат і двофазним ерлангівським розподілом часу перебування викликів на циклі орбіти. Побудовано аналітичну модель системи типу $M/M/1/0///E_2$. Розроблено алгоритм обчислення показників ефективності її функціонування. Проведено аналіз результатів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається система масового обслуговування (СМО) з експоненціально розподіленими вхідним потоком викликів та часом обслуговування, з c каналами обслуговування, без місць чекання, з необмеженою орбітою (з поверненнями, повторними викликами), без втрат і двофазним ерлангівським розподілом часу перебування викликів на циклі орбіти.

Згідно із класифікацією Кендалла СМО з поверненнями описуються як

$$A/B/s/m/O/H\ ,$$

де A і B — позначення законів розподілу інтервалів часу між надходженнями викликів у систему і часу обслуговування, відповідно; s — кількість каналів обслуговування; m — кількість місць чекання плюс кількість каналів обслуговування; O — ємність орбіти або (як у роботі [1]) кількість джерел навантаження; H — показник того, чи дана модель з втратами, чи ні.

Час повернення не описано у позначенні. Як правило, його беруть експоненційно розподіленим з параметром θ.

Показник H можна описати рядом $H_0, H_1, H_2,...$ Коли $H_k = 1$ для $k > 0$, система стає системою без втрат (будь-яка заявка, зрештою, буде обслуговуватися, якщо тільки O необмежена). У цьому випадку H запишемо як *NL* (no loss). Коли $H_k = \alpha < 1$ для $k > 0$, система називається системою з геометричними втратами, і H записується як GL (geometric loss).

Якщо в позначеннях Кендалла моделі СМО m, O, H відсутні, то беруть $m = s$, $O = \infty$, $H = NL$ [2].

Слід зауважити, що орбіта — це віртуальне середовище накопичення викликів, які одразу не отримали обслуговування і які, можливо, будуть виконувати повторні спроби обслужитися. В позначеннях Кендалла відсутня позиція для типу розподілу часу перебування викликів на циклі орбіти. Оскільки дотепер розглядався експоненціальний розподіл і передбачалося, що (за наявності п’ятої позиції в позначенні Кендалла) час перебування виклику на циклі орбіти розподілений експоненціально, ми вважаємо за необхідне ввести ще одну, сьому, позицію для позначення розподілу часу перебування виклику на циклі орбіти.

Являє собою інтерес ерлангівський розподіл викликів на циклі орбіти. А.К. Ерланг відмітив надзвичайну простоту експоненціального розподілу і побачив у ньому потужний засіб дослідження СМО [1, с. 137]. Він також побачив, що експоненціальний розподіл не завжди дозволяє адекватно описати справжню картину розподілу часу обслуговування (і проміжків часу між вхідними викликами), а тому запропонував розкласти розподіл часу обслуговування в набір складових експоненціальних розподілів.

Сімейство розподілів Ерланга має таку щільність розподілу:

$$d(x) = \frac{r\nu (r\nu x)^{r-1} e^{-r\nu x}}{(r-1)!}, \; x \ge 0,$$

де r — кількість фаз ерлангівського розподілу; ν — його параметр. Розподіл Ерланга порядку r позначається E_r.

Таким чином, описану СМО можна позначити $M/M/c/0///E_2$.

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Відзначимо, що теорія СМО з повторними викликами (з поверненнями) [наприклад, 3, 4] є важливим розділом ТМО, який інтенсивно розвивається два останні десятиріччя.

СМО характеризуються такою поведінкою: якщо виклик надійшов до системи, де усі прилади і місця для очікування (за їх наявності) зайняті, то він залишає систему на деякий випадковий час, інакше кажучи, йде на орбіту, а потім виконує повторні спроби отримати обслуговування. Ігнорування даного ефекту може призвести до значних похибок при прийнятті інженерних рішень.

У роботах [5−7] детально розглянуто СМО типу $M/M/c/0$ з поверненнями і втратами, отримано аналітичні вирази для деяких показників. У [6–8] побудовано статистичну модель.

При аналізі літературних джерел виявлено, що майже всі результати, як аналітичні, так і чисельні, отримані для експоненціально розподіленого часу перебування викликів на орбіті.

ЦІЛІ

Мета даної роботи — побудова аналітичної моделі СМО типу $M/M/1/0///E_2$, порівняння деяких показників функціонування СМО типів $M/M/1/0///E_2$ і $M/M/1/0///M$.

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ

Нехай на c каналів обслуговування надходить пуассонівський потік первинних викликів з інтенсивністю λ (щільність розподілу $a(x) = \lambda e^{-\lambda x}$). Якщо при надходженні виклику до системи будь-який із каналів обслуговування вільний, то виклик негайно займає цей канал і залишає систему після обслуговування. Однак, якщо на момент надходження нового виклику усі c каналів зайняті, то виклик йде на орбіту (деяке віртуальне середовище накопичення вимог, яким було відмовлено в обслуговуванні) і намагається отримати обслуговування пізніше (рис. 1).

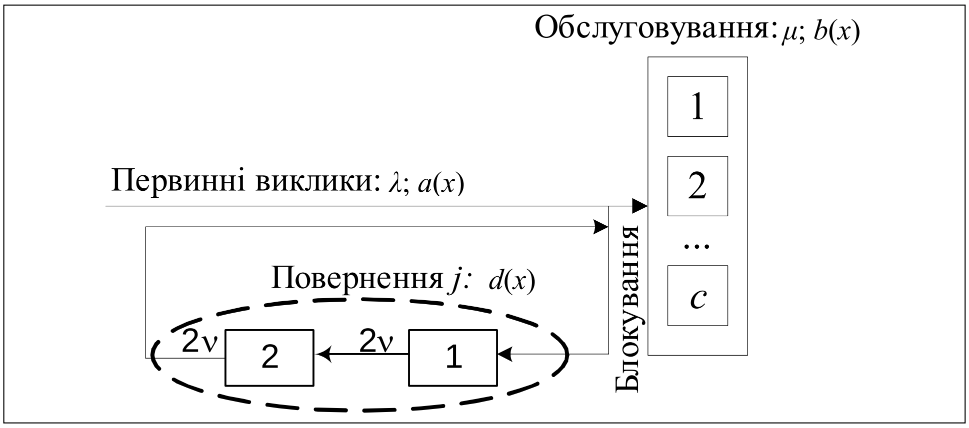

Рис. 1. СМО типу $M/M/c/0///E_2$

Кожний виклик, що знаходиться на циклі орбіти, виконує повторні спроби отримати обслуговування через деякі проміжки часу, тривалість яких розподілена за двофазним ерлангівським розподілом з параметром ν (щільність розподілу $d(x)=(2\nu)^2 xe^{-(2\nu)x}$), незалежно від інших викликів. Виклики з орбіти виконують спроби отримати обслуговування доти, доки їм не вдасться зайняти канал обслуговування, іншими словами, виклики з орбіти є абсолютно наполегливими.

Нехай часи обслуговування розподілені експоненціально з параметром μ (щільність розподілу $b(x)=\mu e^{-\mu x}$). Припустимо, що інтервали між надходженнями первинних і повторних викликів і часи обслуговування є взаємонезалежними.

Функціонування наведеної системи можна описати за допомогою тривимірного процесу $(X(t),\, Y(t),\, Z(t))$, де $X(t)$ — кількість зайнятих каналів обслуговування (для одноканальної системи: канал зайнятий/канал не зайнятий); $Y(t)$ — кількість вимог на орбіті на першій фазі; $Z(t)$ — кількість вимог на орбіті на другій фазі у момент t; сума $Y(t)+Z(t)$ являє собою кількість вимог на орбіті у момент часу t. Процес $(X(t),\, Y(t),\, Z(t))$ визначений на множині станів $S=\{0,1,...,c\}\times\{0,1,...\}\times\{0,1,...\}$. Оскільки досить складно одразу побудувати і отримати розв'язки для багатоканальної системи, спростимо задачу і розглянемо одноканальну систему.

ОДНОКАНАЛЬНА СИСТЕМА

СМО типу $M/M/1/0///E_2$ описується тривимірним процесом ($X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$), визначеним на множині станів $S=\{0,1\}\times\{0,1,...\}\times\{0,1,...\}$.

Випишемо інтенсивності переходів процесу $(X(t), Y(t), Z(t))$ за проміжок часу $(t, t+dt)$.

Зі стану $(0,i,j)$, $i \ge 0$, $j \ge 0$ за час dt система (рис.2, *а*) може з ймовірністю

- λdt перейти у стан $(1,i,j)$ (надійшов новий первинний виклик і одразу ж отримав обслуговування);
- $j \cdot 2\nu dt$ — у стан $(1,i,j-1)$, $j \ge 1$ (один із j повторних викликів на другій фазі виконав вдалу спробу отримати обслуговування);
- $i \cdot 2\nu dt$ — у стан $(0,i-1,j+1)$, $i \ge 1$ (один із i повторних викликів на першій фазі перейшов до другої фази).

Зі стану $(1,i,j)$, $i \ge 0$, $j \ge 0$ за час dt система (рис. 3, *а*) може з ймовірністю

- λdt перейти у стан $(1,i+1,j)$ (надійшов новий первинний виклик і, знайшовши канал обслуговування зайнятим, пішов на орбіту на першу фазу);
- $i \cdot 2\nu dt$ — у стан $(1,i-1,j+1)$, $i \ge 1$ (один із i повторних викликів на першій фазі перейшов до другої фази);
- μdt — у стан $(0,i,j)$ (завершилось обслуговування вимоги, один із каналів звільнився).

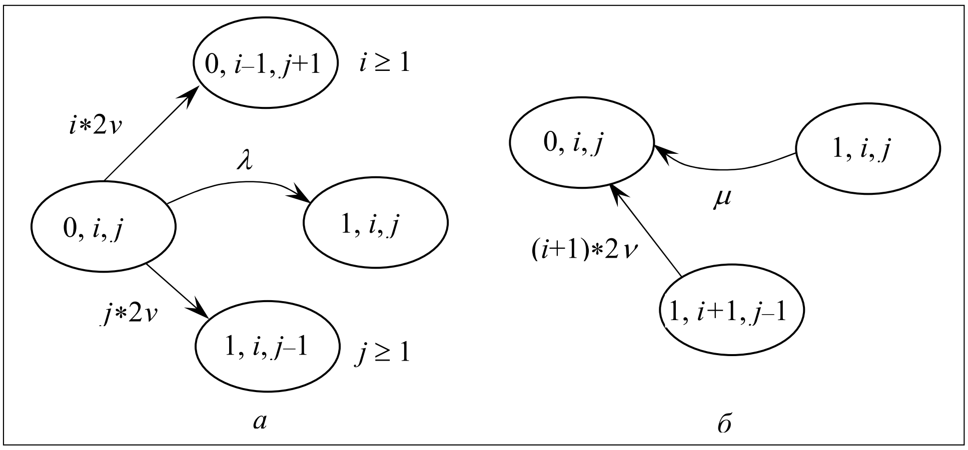

Рис. 2. Граф переходів СМО типу $M/M/1/0///E_2$: *а* — для переходу зі стану (0, *i*, *j*); *б* — для переходу в стан (0, *i*, *j*)

Тоді інтенсивності переходів процесу $(X(t),Y(t),Z(t))$ $q_{(k,i,j)}(g,m,n)$, $k,g \in \{0,1\}$, $i,j,m,n \in \{0,1,...\}$ (інфітезімальні перехідні інтенсивності, тобто $q_{(k,i,j)}(g,m,n)$ означає інтенсивність переходу системи зі стану (k,i,j) в стан (g,m,n) за час dt) задаються так:

1. При $k=0$

$$q_{(0ij)}(g,m,n) = \begin{cases} \lambda & \text{при } (g,m,n)=(1,i,j), \\ j \cdot 2\nu & \text{при } (g,m,n)=(1,i,j-1),\ j \ge 1, \\ i \cdot 2\nu & \text{при } (g,m,n)=(0,i-1,j+1),\ i \ge 1, \\ -(\lambda + i \cdot 2\nu + j \cdot 2\nu) & \text{при } (g,m,n)=(0,i,j). \end{cases} \qquad (1)$$

2. При $k=1$

$$q_{(1ij)}(g,m,n)=\begin{cases}\lambda & \text{при } (g,m,n)=(1,i+1,j),\\ i\cdot 2\nu & \text{при } (g,m,n)=(1,i-1,j+1),\ i\ge 1,\\ \mu & \text{при } (g,m,n)=(0,i,j),\\ -(\lambda+i\cdot 2\nu+\mu) & \text{при } (g,m,n)=(1,i,j).\end{cases} \quad (2)$$

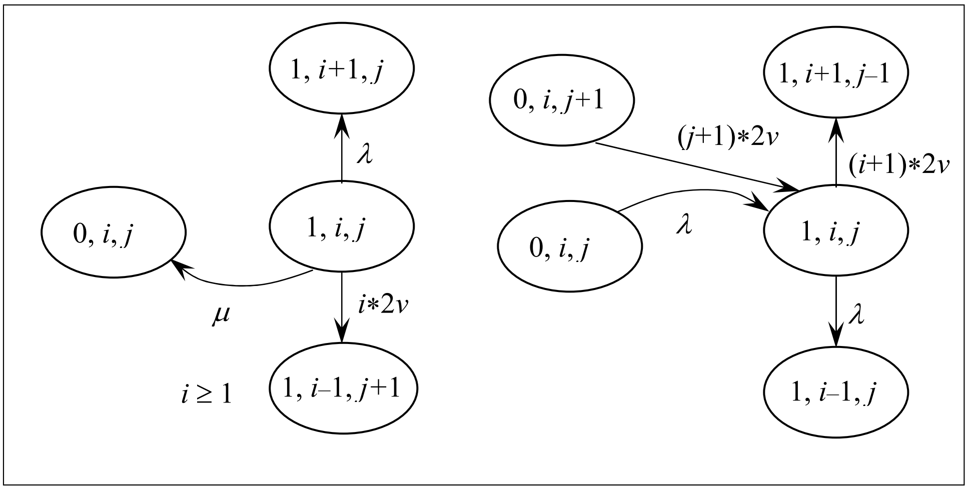

Рис. 3. Граф переходів СМО типу $M/M/1/0///E_2$: *а* — для переходу зі стану (1, *i*, *j*); *б* — для переходу в стан (1, *i*, *j*)

Позначимо $p_{kij}(t)=P\{X(t)=k,\ Y(t)=i,\ Z(t)=j\}$ ймовірність того, що у момент t система знаходиться у стані (k,i,j), тобто у системі зайнято k каналів (для одноканальної системи: канал зайнятий/не зайнятий) і на орбіті знаходиться $(i+j)$ викликів, i з яких на першій, j на другій фазі; p_{kij} — відповідні стаціонарні ймовірності.

Згідно із рис. 2, 3 і формулами (1), (2) для стаціонарного режиму визначені ймовірності задовольняють системі рівнянь Колмогорова ($p_{kij}=0$, якщо $\forall k,i,j<0$)

$$(\lambda+j\cdot 2\nu+i\cdot 2\nu)p_{0ij}=\mu p_{1ij}+(i+1)2\nu p_{0,i+1,j-1},\ i\ge 0,\ j\ge 0, \quad (3)$$

$$(\lambda+i\cdot 2\nu+\mu)p_{1ij}=\lambda p_{0ij}+\lambda p_{1,i-1,j}+(j+1)2\nu p_{0,i,j+1}+(i+1)2\nu p_{1,i+1,j-1},$$

$$i\ge 0,\ j\ge 0, \quad (4)$$

і умові нормування

$$\sum_{k=0}^{1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_{kij}=1. \quad (5)$$

СИСТЕМА З ОБМЕЖЕНОЮ ЄМНІСТЮ ОРБІТИ

Оскільки для даної системи досить складно отримати аналітичний розв’язок, зробимо це, обмеживши ємність орбіти досить великою константою M (метод запропоновано Уїлкінсоном (Wilkinson)). Тобто розглянемо СМО типу $M/M/1/0/M///E_2$. Тоді система рівнянь (3)−(5) буде скінченною, а СМО — ергодичною за будь-яких умов. Формули (1), (2) набудуть вигляду

1. При $k=0$, $i+j\le M$

$$q_{(0ij)}(g,m,n)=$$

$$=\begin{cases} \lambda & \text{при } (g,m,n)=(1,i,j), \\ j\cdot 2\nu & \text{при } (g,m,n)=(1,i,j-1),\ i\le M-1,\ j\ge 1, \\ i\cdot 2\nu & \text{при } (g,m,n)=(0,i-1,j+1),\ i\ge 1,\ j\le M-1, \\ -(\lambda+i\cdot 2\nu+j\cdot 2\nu) & \text{при } (g,m,n)=(0,i,j),\ i\le M-1,\ j\le M-1, \\ -(\lambda+M\cdot 2\nu) & \text{при } (g,m,n)=(0,i,j),\ \{i=0,\ j=M\}\cup \\ & \cup\{i=M,\ j=0\}. \end{cases} \tag{6}$$

2. При $k=1$, $i+j\le M$

$$q_{(1ij)}(g,m,n)=$$

$$=\begin{cases} \lambda & \text{при } (g,m,n)=(1,i+1,j),\ i\le M-1,\ j\le M-1, \\ & \qquad i+j\le M-1, \\ i\cdot 2\nu & \text{при } (g,m,n)=(1,i-1,j+1),\ i\ge 1,\ j\le M-1, \\ \mu & \text{при } (g,m,n)=(0,i,j), \\ -(\lambda+i\cdot 2\nu+\mu) & \text{при } (g,m,n)=(1,i,j),\ i\le M-1,\ j\le M-1, \\ -(\lambda+i\cdot 2\nu+\mu) & \text{при } (g,m,n)=(1,i,j),\ i=M,\ j=0, \\ -(\mu) & \text{при } (g,m,n)=(1,i,j),\ i=0,\ j=M. \end{cases} \tag{7}$$

Для формул (3)–(5), згідно (6), (7), маємо ($p_{kij}=0$, якщо $\forall\, k,i,j<0$ або $\forall\, k,i,j>M$)

$$(\lambda+j\cdot 2\nu+i\cdot 2\nu)p_{0ij}=\mu p_{1ij}+(i+1)2\nu\, p_{0,i+1,j-1},$$

$$0\le i\le M,\ 0\le j<M,\ i+j<M, \tag{8}$$

$$(\lambda+M\cdot 2\nu)p_{0iM}=\mu p_{1iM},\ \{i=0, j=M\}\cup\{i=M, j=0\}, \tag{9}$$

$$(\lambda+i\cdot 2\nu+\mu)p_{1ij}=\lambda p_{0ij}+\lambda p_{1,i-1,j}+(j+1)2\nu p_{0,i,j+1}+(i+1)2\nu p_{1,i+1,j-1},$$

$$0\le i<M,\ 0\le j<M,\ i+j<M, \tag{10}$$

$$(M\cdot 2\nu+\mu)p_{1Mj}=\lambda p_{0Mj}+\lambda p_{1,M-1,j}+(j+1)2\nu p_{0,M,j+1},\ i=M, j=0, \tag{11}$$

$$(\mu)p_{1MM}=\lambda p_{0MM}+\lambda p_{1,M-1,M},\ i=0,\ j=M, \tag{12}$$

і умову нормування

$$\sum_{k=0}^{1}\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{M} p_{kij}=1,\ \ i+j<M. \tag{13}$$

Система (8) – (13) може бути розв'язана на комп'ютері за допомогою стандартних процедур шляхом написання програми на Borland Delphi 7 із використанням алгоритму на основі LU-декомпозиції, взятого з роботи [9].

Оскільки усі алгоритми для розв'язання систем лінійних рівнянь працюють лише з двовимірними матрицями, необхідно було знизити розмір матриці $q_{(k,i,j)}(g,m,n)$, для чого запропоновано замінити три індекси на один таким чином: у програмі задається тривимірний масив $q[k,i,j]$ (за позначеннями в лістингу програми; не плутати із $q_{(k,i,j)}(g,m,n)$), який містить порядкові номери $0,1,2,\ldots$, що відповідно замінюють собою послідовності з трьох цифр індексів масиву q в порядку зростання, тобто $q[0,0,0]=0$, $q[0,0,1]=1$, $q[0,1,0]=2,\ldots$ Остання цифра цієї послідовності буде визначати розмір відповідного двовимірного масиву $p[i,j]$ (i,j — імена змінних в лістингу програми). Наприклад, якщо остання цифра послідовності дорівнюватиме 7, то розмір відповідного двовимірного масиву $s=7+1=8$. Цей двовимірний масив $p[i,j]$, $i\le s$, $j\le s$ буде містити розв'язки системи (8) – (13) для $p_{(k,i,j)}$.

Для того щоб матриця системи (8) – (12) не була виродженою, замінимо будь-яке рівняння (наприклад, останнє (12)) на (13).

Нехай A — головна матриця системи (8) – (12), масив з нумерацією елементів $[1\ldots s, 1\ldots s]$; B — вектор-стовпець правої частини, $B=\{0, 0,\ldots,1\}$.

Заміна трьох індексів на один відбувається таким чином (код написано на мові Pascal):

```
s := 0; // розмір матриці системи
for k := 0 to 1 do //цикл по k
for i := 0 to M do //цикл по i
for j := 0 to M do //цикл по j
if (i + j ≤ M) then
begin
q[k,i,j] := s + 1; s := s + 1;
end;
```

Елементи масиву $p[i,j]$, який містить елементи головної матриці системи (8) – (12), заповнюються згідно із формулами (6), (7) по стовпцям

```
for k1 := 0 to c do for i1 := 0 to M do for j1 := 0 to M do
begin
   if (i1 + j1 ≤ M) then j := q[k1,i1,j1] + 1;
   for k2 := 0 to 1 do for i2 := 0 to M do for j2 := 0 to M do
begin
   if (i2 + j2 ≤ M) then i := q[k2,i2,j2] + 1;
   if (k1 := 0) then
begin
```

```
            if ((k2=1) and (i2=i1) and (j2=j1)) then p[i, j]:=lambda;
            if ((k2=1) and (j1≥1) and (j2=j1−1) and (i2=i1)) then
                        p[i, j]:= j1*2*nu ;
            if ((i1≥1) and (k2=0) and (i2:=i1−1) and (j2:=j1+1) and
                        (j1≤M−1)) then p[i, j]:= j1*2*nu ;
            if ((j1<M) and (i1=i2) and (k1=k2) and (j1=j2) then
                        p[i, j]:=−lambda+i1*2*nu+j1*2*nu );
            if ((j1=M) and (i1=i2) and (k1=k2) and (j1=j2)) then
                        p[i, j]:=−(lambda+j1*2*nu) ;
    end;
    if (k2=1) then
  begin
    if ((k2=1) and (i2=i1+1) and (j2=j1) and
                        (i1≤M−1)) then p[i, j]:=lambda ;
    if ((k2=1) and (i2=i1−1) and (j2=j1+1) and (i1≥1) and
                        (j1≤M−1)) then p[i, j]:=i1*2*nu ;
    if ((k2=0) and (i2=i1) and (j2=j1)) then p[i, j]:=mu ;
    if ((i1<M) and (j1<M) and (i1=i2) and (k1=k2) and
                  (j1=j2)) then p[i, j]:=−(lambda+i1*2*nu+mu);
    if ((i1=0) and (j1=M) and (i1=i2) and (k1=k2) and (j1=j2)) then
                              p[i, j]:=−mu ;
    if((i1=M) and (j1=M) and (i1=i2) and (k1=k2) and (j1=j2) )then
                              p[i, j]:=−(i1*2*nu+mu) ;
  end;
  end;
  end;
```

Якщо цю ж послідовність дій запрограмувати у середовищі Maple 7 (наприклад, задавши $M=2$), то матриця $A=p[i,j]$ набуде вигляду

$$A=p[i,j]=\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda-2\nu & 2\nu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-2\nu & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & 2\nu & 0 & -\lambda-\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -\mu & 2\nu \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 & -2\nu-\mu \end{bmatrix}.$$

У результаті роботи програми було отримано таку залежність ймовірності зайнятості каналу $B=\lim_{t\to\infty} P\{X(t)=c\}$ від середнього часу перебування на циклі орбіти $\tau=1/\nu$ і від інтенсивності вхідного потоку λ: зі збільшенням інтенсивності вхідного потоку ймовірність зайнятості каналу збільшується (рис. 4).

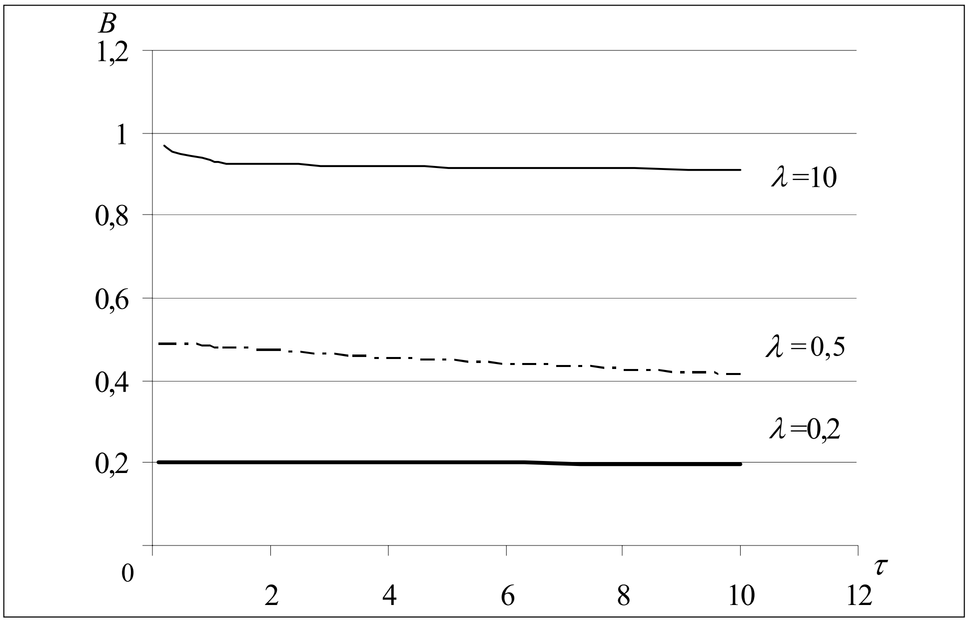

Рис. 4. Залежність ймовірності зайнятості каналу (*B*) від середнього часу перебування на циклі орбіти (*τ*) і від інтенсивності вхідного потоку (*λ*) при $M = 2$, $\mu = 1$

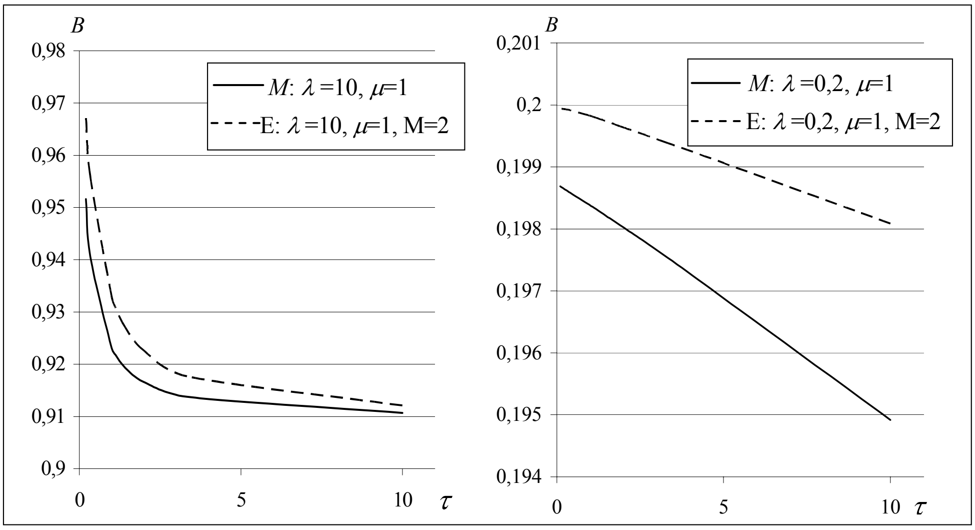

Рис. 5. Залежність ймовірності зайнятості каналу (*B*) від середнього часу перебування на циклі орбіти (*τ*): *M* — експоненціальний розподіл; *E* — ерлангівський

Також отримано залежність ймовірності зайнятості каналу B від середнього часу перебування виклику на циклі орбіти $\tau = 1/\nu$ з урахуванням типу розподілу викликів на циклі орбіти (рис. 5) і максимальної кількості вимог на орбіті M (рис. 6): ймовірність зайнятості каналу більша у випадку ерлангівського розподілу часу перебування викликів на циклі орбіти у порівнянні з експоненціальним розподілом. Окрім цього, з рис. 6 видно, що зі збільшенням розміру орбіти (максимальної кількості викликів на орбіті) ймовірність зайнятості каналу збільшується. При цьому в обох випадках вона більша при ерлангівському розподілі часу перебування вимог на циклі орбіти.

Ймовірність зайнятості каналу більша у випадку ерлангівського розподілу приблизно на 0,002–0,008 (рис 5, 6). Це говорить про те, що при моделюванні можна використовувати експоненціальний час розподілу часу орбіти, і це значно спрощує модель і не дає значної похибки в оцінці показників функціонування системи.

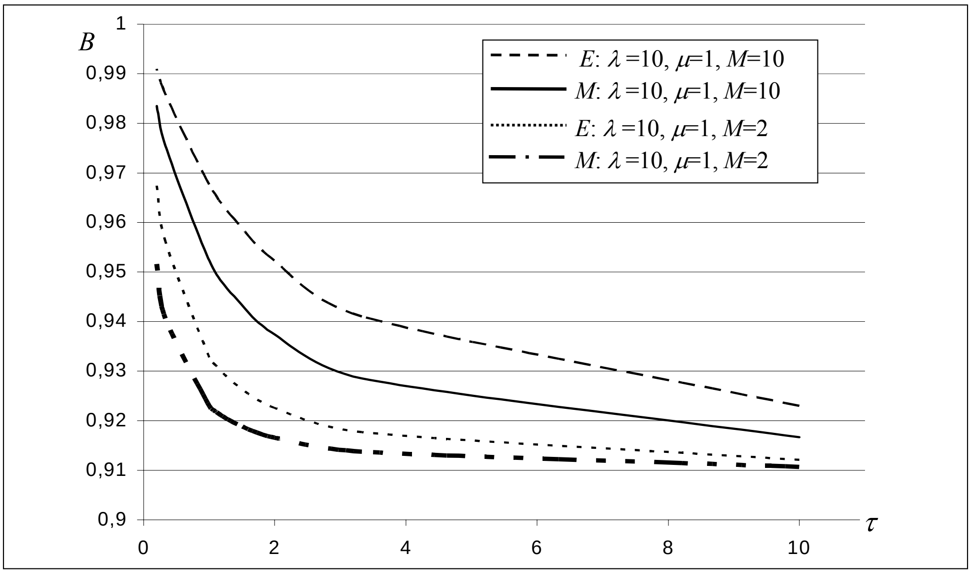

Рис.6. Залежність ймовірності зайнятості каналу (B) від середнього часу перебування на циклі орбіти (τ): M — експоненціальний розподіл; E — ерлангівський

ВИСНОВКИ

При моделюванні системи типу $M/M/1/0///E_2$ для наближеної (грубої) оцінки показників функціонування можна використовувати експоненціальний закон розподілу часу перебування викликів на циклі орбіти, що надасть можливість значно спростити аналітичну модель і чисельні розрахунки.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания / Пер. с англ. И.И. Грушко. — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.
2. *Коба О.В.* Системи обслуговування заявок при детермінованому часі перебування на орбіті // Вісн. НАУ. —–2002 — № 3. — С. 69–73.
3. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — Изд. 3-е, пер. и доп. — М.: URSS, 2005. — 400 с.
4. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. — London: Chapmen & Hall. — 1997. — 395 p.
5. *Pustova S.* Modeling call center operation with taking into account repeated attempts of subscribers // Вісн. НАУ. — 2006. — 3(29). — С. 21–24.
6. *Коба О.В., Пустова С.В.* Аналітична модель функціонування call-центру // Доп. НАН України. — 2007. — № 2. — С. 17–25.
7. *Коба Е.В., Пустовая С.В.* Центр обработки вызовов как система массового обслуживания с возвращениями // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 3. — С. 103–112.
8. *Пустова С.В.* Статистична модель функціонування call-центру // Матеріали VIII МНТК «АВІА-2007». — Т. 1. — Київ: НАУ, 2007. —С. 13.61–13.64.
9. *Алгоритм* LU-декомпозиції. — http://aglib.sources.ru/linequations/general/lu.php.

Надійшла 2.07.2007