

Зарядовое упорядочение и межслойная фазовая когерентность в квантовых холловских сверхрешетках

С.И. Шевченко

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua*

Д.В. Филь

Институт монокристаллов НАН Украины, пр. Ленина, 60, г. Харьков, 61001, Украина

А.А. Яковлева

НТУ «Харьковский политехнический институт», ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина

Статья поступила в редакцию 10 октября 2003 г.

Изучена возможность существования состояний со спонтанной межслойной фазовой когерентностью в многослойных электронных системах в сильном перпендикулярном магнитном поле. Показано, что в таких системах фазовая когерентность может устанавливаться только внутри отдельных пар ближайших слоев, а между слоями различных пар такая когерентность отсутствует. Определены условия устойчивости состояния с межслойной фазовой когерентностью относительно перехода в зарядово-упорядоченное состояние. Показано, что в системе с числом слоев $N \leq 10$ устойчивость имеет место при любых расстояниях между слоями d . При $N > 10$ имеется два интервала устойчивости: при достаточно больших и при достаточно малых d . При $N \rightarrow \infty$ интервал устойчивости в области малых d исчезает.

Вивчено можливість існування станів зі спонтанною міжшаровою фазовою когерентністю в багат шарових електронних системах у сильному перпендикулярному магнітному полі. Показано, що в таких системах фазова когерентність може установлюватися тільки усередині окремих пар найближчих шарів, а між шарами різних пар така когерентність відсутня. Визначено умови стабільності стану з міжшаровою фазовою когерентністю відносно переходу в зарядово-упорядкований стан. Показано, що в системі з числом шарів $N \leq 10$ стабільність має місце при будь-яких відстанях між шарами d . При $N > 10$ існує два інтервали стабільності: при достатньо великих і при достатньо малих d . При $N \rightarrow \infty$ інтервал стабільності в області малих d зникає.

PACS: 73.43.Cd, 73.21.Ac, 73.21.Cd

1. Введение

В последние 10 лет большое внимание при изучении квантового эффекта Холла и явлений, ему сопутствующих, уделяется двухслойным системам. Одной из наиболее интересных особенностей двухслойных квантовых холловских систем является возможность реализовать в них сверхтекучую фазу, обусловленную межслойной спонтанной фазовой

когерентностью носителей заряда. Это явление аналогично сверхтекучести электрон-дырочных пар с пространственно разделенными компонентами. Возможность сверхтекучести такого типа в двухслойной электрон-дырочной системе в нулевом магнитном поле была впервые предсказана в [1,2] (см. также [3,4]). В работе [5] было показано, что приложении сильного перпендикулярного магнитного

поля к двухслойной электрон-дырочной системе способствует образованию сверхтекучей фазы (см. также [6–9], где проведено более детальное изучение этого вопроса), так как в отличие от ситуации, рассмотренной в [1,2], в последнем случае не требуется выполнения условия нестинга ферми-поверхностей электронов и дырок.

Вследствие электрон-дырочной симметрии двухслойные электрон-электронные системы в квантующем магнитном поле с факторами заполнения слоев равными ν и $1 - \nu$ ($\nu < 1$) являются практически полным аналогом электрон-дырочных двухслойных систем и в них также возможен переход в сверхтекучую фазу [10–16]. Интерес к этому вопросу в последнее время значительно возрос в связи с экспериментами [17,18], в которых наблюдался эффект типа эффекта Джозефсона (резкое возрастание дифференциального туннельного контактанса при малой разности потенциалов между слоями). Кроме того, в недавнем эксперименте по межслойному увлечению в двухслойных системах [19] наблюдалось резкое подавление продольного увлечения и возрастание холловской компоненты увлечения в ситуации, когда значение суммарного фактора заполнения слоев становилось близким к единице. Эффекты [17–19] можно объяснить, исходя из предположения о возникновении в системе спонтанной межслойной фазовой когерентности и переходе системы в сверхтекучее состояние. Отметим также, что недавно было получено не прямое экспериментальное доказательство (на основе измеренной температурной зависимости спектров люминесценции) бозе-конденсации межъямных экситонов (фотовозбужденных электрон-дырочных пар с пространственно разделенными компонентами) в двойных квантовых ямах в нулевом магнитном поле [20].

Естественным развитием этого направления является изучение сверхтекучих свойств многослойных электронных систем. Многослойные системы представляют особый интерес для исследования коллективных свойств сверхтекучего состояния электрон-дырочных пар оптическими и акустическими методами, поскольку интегральная интенсивность взаимодействия таких систем с внешними полями возрастает пропорционально числу слоев. Настоящая работа посвящена изучению эффекта межслойной фазовой когерентности в квантовых холловских сверхрешетках.

О реализации многослойных квантовых холловских систем сообщалось в работах [21–23]. Исследования [21–23] в основном касались анализа свойств киральных краевых состояний в таких системах.

Ранее вопрос о межслойной фазовой когерентности в многослойных квантовых холловских системах рассматривался в [24,25]. Авторы работы [25] показали, что в таких системах может реализоваться состояние, в котором фазовая когерентность возникает между всеми слоями (ниже обозначаемое как состояние с глобальной фазовой когерентностью). В работе [24] было показано, что в многослойной квантовой холловской системе может возникать другое состояние (которое мы будем называть димерным), при котором система разбивается на пары рядом расположенных слоев и межслойная фазовая когерентность устанавливается лишь внутри пар, а между слоями, которые принадлежат различным парам, такая когерентность отсутствует. В связи с этим возникает вопрос о согласовании результатов [24] и [25]. В настоящей работе мы показываем, что состояния [24] и [25] соответствуют двум различным решениям уравнений самосогласования на параметры порядка, описывающие межслойную фазовую когерентность. Нами найдено, что энергия димерного состояния меньше энергии состояния [25], и, следовательно, именно димерное состояние должно рассматриваться в качестве кандидата на основное состояние такой системы.

В работе [25] было показано, что условия существования состояния с межслойной фазовой когерентностью в многослойных системах являются более жесткими, чем в двухслойных системах. Многослойная квантовая холловская система, в отличие от двухслойной, демонстрирует тенденцию к образованию зарядово-упорядоченного состояния (когда факторы заполнения соседних слоев становятся равными 0 и 1). В [25] условия устойчивости состояния с межслойной фазовой когерентностью были проанализированы в предположении, что фазовая когерентность имеет глобальный характер. Поскольку это предположение не подтверждается, условия устойчивости требуют пересмотра. Нами найдено, что в пределе бесконечного числа слоев (случай, рассмотренный в работе [25]) димерное состояние является устойчивым относительно перехода в зарядово-упорядоченное состояние уже при $d > d_c \approx 1,45l_B$ (l_B — магнитная длина), что ниже критического значения ($d_c \approx 1,7l_B$), полученного в [25].

В связи с тем, что свойства систем с числом слоев $N = 2$ и $N \rightarrow \infty$ существенно различны, а в реальных физических системах число слоев всегда конечно, возникает важный вопрос о том, как условия устойчивости зависят от N . В настоящей работе мы рассматриваем этот вопрос, ограничиваясь случаем четного числа слоев. Найдено, что при $N \leq 10$ состояние с межслойной фазовой когерентностью

является устойчивым при произвольных d . При $N > 10$ устойчивость имеет место либо при $d < d_{c1}$, либо при $d > d_{c2}$, где d_{c1} убывает, а d_{c2} возрастает с ростом N , оставаясь в интервале $0 \leq d_{c1} < d_{c2} \leq d_c$.

2. Межслойная фазовая когерентность в двухслойной системе с полным фактором заполнения $\nu_{tot} = 1$

Прежде чем переходить к многослойным системам, мы на примере простейшего случая $N = 2$ опишем подход, используемый в настоящей работе, и напомним ситуацию, имеющую место в двухслойной системе.

Рассмотрим двухслойную электронную систему в сильном перпендикулярном к слоям магнитном

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n,n'=1,2} \iint d^2r_n d^2r_{n'} \Psi_n^+(\mathbf{r}_n) \Psi_{n'}^+(\mathbf{r}_{n'}) V_{nn'}(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}|) \Psi_{n'}(\mathbf{r}_{n'}) \Psi_n(\mathbf{r}_n) - \sum_{n=1,2} \int d^2r_n \mu_n \Psi_n^+(\mathbf{r}_n) \Psi_n(\mathbf{r}_n) + H_{BG}, \quad (1)$$

где Ψ^+ , Ψ — операторы ферми-полей,

$$V_{nn'}(r) = \frac{e^2}{\epsilon[r^2 + (n - n')^2 d^2]^{1/2}} \quad (2)$$

— кулоновский потенциал, d — расстояние между слоями, ϵ — диэлектрическая константа, μ_n — химический потенциал в слое n . Слагаемое H_{BG} в (1) описывает взаимодействие электронов с положительно заряженными примесями в допирующих слоях. Для определенности мы рассмотрим случай, когда плотности положительного компенсирующего заряда в допирующих слоях одинаковы. Для простоты будем также предполагать, что z -координаты электронных слоев и допирующих слоев совпадают (различие z -координат электронных и допирующих слоев, которое имеет место в реальной физической ситуации, не влияет на эффекты, изучаемые в настоящей работе).

Для проведения дальнейшего анализа удобно перейти к операторам фурье-компонент электронной плотности $\rho_n(\mathbf{q})$, в терминах которых гамильтониан (1) можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2S} \sum_{n,n'=1,2} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ V_{nn'}(q) \left[\rho_n(\mathbf{q}) \rho_{n'}(-\mathbf{q}) - \delta_{nn'} \exp\left(-\frac{q^2 l_B^2}{2}\right) \rho_n(0) \right] \right\} - \sum_{n=1,2} \mu_n \rho_n(0) + H_{BG}, \quad (3)$$

где S — площадь слоя. Величина $\rho(\mathbf{q})$ следующим образом выражается через операторы рождения и

поле с полным фактором заполнения $\nu_{tot} = \nu_1 + \nu_2$, равным единице. Туннелирование между слоями будем считать настолько слабым, что в гамильтониане этим взаимодействием можно пренебречь. Если циклотронная частота существенно больше всех других характерных энергий задачи, то для описания такой системы можно ограничиться приближением нижнего уровня Ландау, в котором пренебрегается влиянием верхних незаполненных уровней Ландау на динамику системы.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

уничтожения электронов на нижнем уровне Ландау ($a^+(X)$, $a(X)$) с центром орбиты в точке X :

$$\rho_n(\mathbf{q}) = \sum_X a_n^+ \left(X + \frac{q_y l_B^2}{2} \right) a_n \left(X - \frac{q_y l_B^2}{2} \right) \times \exp\left(i q_x X - \frac{q^2 l_B^2}{4} \right). \quad (4)$$

В (3) величина

$$V_{nn'}(q) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon q} \exp(-qd|n - n'|) \quad (5)$$

есть фурье-компонента кулоновского потенциала.

Будем рассматривать взаимодействие между электронами в приближении среднего поля. В этом приближении гамильтониан (3) принимает вид

$$H_{MF} = \sum_X \{ \epsilon_1 a_1^+(X) a_1(X) + \epsilon_2 a_2^+(X) a_2(X) - [J \Delta a_1^+(X) a_2(X) + \text{h. c.}] \}. \quad (6)$$

Энергии ϵ_n в (6) имеют вид

$$\epsilon_n = V_n - I \nu_n - \mu_n, \quad (7)$$

где V_n есть фурье-компоненты кулоновского взаимодействия при $q = 0$ с учетом его экранировки положительно заряженными допирующими примесями. Для двухслойной системы эти величины равны

$$V_1 = \frac{1}{2\pi l_B^2} \lim_{q \rightarrow 0} \left[V_{11}(q) \left(v_1 - \frac{1}{2} \right) + V_{12}(q) \left(v_2 - \frac{1}{2} \right) \right] = W\tilde{v},$$

$$V_2 = \frac{1}{2\pi l_B^2} \lim_{q \rightarrow 0} \left[V_{22}(q) \left(v_2 - \frac{1}{2} \right) + V_{21}(q) \left(v_1 - \frac{1}{2} \right) \right] = -W\tilde{v}. \quad (8)$$

Параметр $\tilde{v} = (v_1 - v_2)/2$ описывает величину межслойного разбаланса факторов заполнения. В (6) Δ — параметр порядка, определенный как $\Delta = \langle a_2^+(X)a_1(X) \rangle$. В общем случае $\Delta = |\Delta| e^{i\varphi}$ является комплексной величиной. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда модуль параметра порядка $|\Delta|$ и его фаза φ от X не зависит. При выводе (6) учтено также, что средние $\langle a_n^+(X)a_n(X) \rangle$ равны v_n .

В уравнениях (6), (7) и (8) использованы следующие энергетические параметры. Параметр W , равный

$$W = \frac{e^2 d}{\epsilon l_B^2}, \quad (9)$$

описывает энергию прямого кулоновского взаимодействия между слоями. Параметры

$$I = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{q}} V_{11}(q) \exp\left(-\frac{q^2 l_B^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon l_B} \quad (10)$$

и

$$J = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{q}} V_{12}(q) \exp\left(-\frac{q^2 l_B^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon l_B} \exp\left(\frac{d^2}{2l_B^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{l_B \sqrt{2}}\right) \quad (11)$$

описывают энергию обменного внутрислойного и межслойного взаимодействия.

В состоянии, в котором параметр порядка Δ отличен от нуля, движение электронов в одном слое скоррелировано с движением дырок (одночастичных состояний на нижнем уровне Ландау незанятых электронами) в другом слое. Это состояние можно рассматривать как газ электрон-дырочных пар, которые являются составными бозонами. Бозе-конденсат таких пар (истинный конденсат при $T = 0$ либо квазиконденсат с флуктуирующей фазой при $T \neq 0$) будет обладать сверхтекучими свойствами. При сверхтекучем движении электрон-дырочных пар бездиссипативный электрический ток в одном слое сопровождается равным ему и противоположным по направлению бездиссипативным электрическим током в другом слое.

Для нахождения уравнений самосогласования для параметра порядка Δ и химических потенциалов μ_1, μ_2 совершим над операторами a_1, a_2 $(u-v)$ -преобразование следующего вида:

$$a_1 = u\alpha + v^* \beta^+, \quad a_2 = u^* \beta^+ - v\alpha. \quad (12)$$

Операторы α и β будут удовлетворять фермиевским коммутационным соотношениям, если $|u|^2 + |v|^2 = 1$. Это позволяет искать коэффициенты $(u-v)$ -преобразования в виде $u = \cos(\Theta/2)$ и $v = \sin(\Theta/2) e^{i\chi}$. Из условий зануления недиагональных по α и β слагаемых в преобразованном гамильтониане находим, что

$$\sin \Theta = \frac{J|\Delta|}{\sqrt{\tilde{\epsilon}^2 + (J|\Delta|)^2}}, \quad \cos \Theta = \frac{\tilde{\epsilon}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}^2 + (J|\Delta|)^2}}, \quad (13)$$

а величина χ совпадает с фазой параметра порядка φ . Здесь введено обозначение $\tilde{\epsilon} = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/2$.

Используя (12) и (13), получаем следующие уравнения самосогласования

$$v_1 + v_2 = 1 = \langle a_1^+ a_1 \rangle + \langle a_2^+ a_2 \rangle = 1 + N_F(\mathcal{E}_\alpha) - N_F(\mathcal{E}_\beta), \quad (14)$$

$$2\tilde{v} = \langle a_1^+ a_1 \rangle - \langle a_2^+ a_2 \rangle = -\frac{\tilde{\epsilon}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}^2 + (J|\Delta|)^2}} [1 - N_F(\mathcal{E}_\alpha) - N_F(\mathcal{E}_\beta)], \quad (15)$$

$$\Delta = \langle a_2^+ a_1 \rangle = \frac{J\Delta}{2\sqrt{\tilde{\epsilon}^2 + (J|\Delta|)^2}} [1 - N_F(\mathcal{E}_\alpha) - N_F(\mathcal{E}_\beta)], \quad (16)$$

где

$$\mathcal{E}_{\alpha(\beta)} = \sqrt{\tilde{\epsilon}^2 + (J|\Delta|)^2} \pm \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$$

— энергии элементарных возбуждений и $N_F(\mathcal{E}) = [\exp(\mathcal{E}/T) + 1]^{-1}$ есть функция распределения Ферми. Из уравнения (14) следует равенство $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_\beta$, что приводит к условию $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$. Из уравнений (15) и (16) легко найти зависимость модуля параметра порядка от величины разбаланса и температуры. Ниже мы ограничимся рассмотрением случая нулевых температур, когда эта зависимость имеет вид

$$|\Delta(\tilde{v})| = \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{v}^2}. \quad (18)$$

Дифференциал свободной энергии двухслойной системы при $v_1 + v_2 = 1$ и $T = 0$ равен

$$dF = \mu_1 dv_1 + \mu_2 dv_2 = 2\tilde{\mu} d\tilde{v}, \quad (19)$$

где введено обозначение $\tilde{\mu} = (\mu_1 - \mu_2)/2$. Здесь и ниже энергия дана в пересчете на один электрон. Если явный вид зависимости $\tilde{\mu}(\tilde{v})$ известен, то, ис-

пользуя (19), легко найти энергию системы при заданной величине разбаланса:

$$F(\tilde{\nu}) = F(-1/2) + 2 \int_{-1/2}^{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu}' \tilde{\mu}(\tilde{\nu}'), \quad (20)$$

где $F(-1/2)$ — энергия системы при $\tilde{\nu} = -1/2$, т.е. при $\nu_1 = 0$ и $\nu_2 = 1$. При таких факторах заполнения энергия системы есть сумма энергий прямого кулоновского взаимодействия между слоями и обменного внутрислойного взаимодействия в слое 2, т.е. $F(-1/2) = W/4 - I/2$. Используя уравнение (7) и соотношение $\tilde{\epsilon} = -J\tilde{\nu}$ (которое следует из (15), (16)), находим для величины $\tilde{\mu}$ следующее выражение:

$$\tilde{\mu}(\tilde{\nu}) = (W - I + J)\tilde{\nu}.$$

Соответственно,

$$F(\tilde{\nu}) = -\frac{I+J}{4} + (W - I + J)\tilde{\nu}^2. \quad (21)$$

Выражение (21) полезно также представить в виде

$$F = W\tilde{\nu}^2 - \frac{I}{2}[v_1^2 + (1 - v_1)^2] - J|\Delta|^2, \quad (22)$$

из которого становится очевидным физический смысл каждого из слагаемых. Первое слагаемое — энергия прямого кулоновского взаимодействия при разбалансе факторов заполнения $\tilde{\nu}$. Второе слагаемое — сумма энергий внутрислойного обменного взаимодействия в слоях 1 и 2. Третье слагаемое — энергия, связанная с возникновением межслойной фазовой когерентности.

Поскольку энергия (22) не зависит от фазы параметра порядка ϕ , то межслойная фазовая когерентность носит спонтанный характер. Минимум энергии состояния с межслойной фазовой когерентностью достигается в случае, когда модуль и фаза параметра порядка не зависят от координаты. Сверхтекучее токовое состояние, которое возникает при отличных от нуля градиентах фазы, лежит выше по энергии, но в случае, когда градиент фазы меньше критического значения (зависящего от отношения d/l_B), такое состояние устойчиво относительно возникновения элементарных возбуждений, приводящих к диссипации энергии (т.е. выполняется критерий сверхтекучести Ландау).

В заключение настоящего раздела обратим внимание на важный вывод, следующий из формулы (21). Используя уравнения (9)–(11), легко убедиться, что коэффициент при $\tilde{\nu}^2$ в правой части (21) является положительным при произвольных $d \neq 0$. Это играет принципиальную роль с точки зрения возможности реализации состояния с межслой-

ной фазовой когерентностью в двухслойных системах. Действительно, если бы знак выражения $W - I + J$ был отрицательный, то система бы перешла в состояние с максимальным разбалансом факторов заполнения $\tilde{\nu} = \pm 1/2$, при котором $|\Delta| = 0$ (см. (18)) и, следовательно, межслойная фазовая когерентность отсутствует. Забегая вперед, отметим, что в многослойных системах, в отличие от двухслойных, такой механизм разрушения фазовой когерентности действительно может реализоваться в некотором диапазоне значений d . Детальному анализу этого вопроса посвящен разд. 4.

3. Состояния с межслойной фазовой когерентностью в многослойной системе

Рассмотрим систему с числом слоев $N \rightarrow \infty$ со средним фактором заполнения на слой равным $1/2$. Гамильтониан такой системы можно представить в форме (3), заменив в ней суммы по двум слоям на суммы по бесконечному числу слоев. Переходя к приближению среднего поля, имеем

$$H_{MF} = \sum_n \sum_X \{ \epsilon_n a_n^+ a_n - \frac{1}{2} \sum_{m \neq 0} [J_m \Delta(n, m) a_n^+ a_{n+m} + \text{h. c.}] \}, \quad (23)$$

где энергетические параметры J_m равны

$$J_m = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon l_B} \exp\left(\frac{d^2 m^2}{2l_B^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{d|m|}{l_B \sqrt{2}}\right) \quad (24)$$

(параметр J , введенный в предыдущем разделе, совпадает с $J_{\pm 1}$) и параметры порядка определены как

$$\Delta(n, m) = \langle a_{n+m}^+ a_n \rangle. \quad (25)$$

В общем случае величины $\Delta(n, m)$ могут быть отличны от нуля при произвольных m , а не только при $m = \pm 1$. Это соответствует ситуации, когда в системе возникает корреляция между электронами не только ближайших, но и сколь угодно далеких слоев. Поскольку кулоновский потенциал является дальнедействующим, такие корреляции вносят заметный вклад в энергию и их учет важен для нахождения основного состояния системы.

Из физических соображений естественно ожидать, что если в такой системе возникнет разбаланс факторов заполнения, он будет иметь периодический характер. Рассмотрим ситуацию, когда период не превышает удвоенного расстояния между ближайшими слоями. Как показано ниже, удвоение периода системы может возникать и в отсутствие разбаланса факторов заполнения, когда в системе

реализуется состояние с межслойной фазовой когерентностью димерного типа.

Пусть факторы заполнения слоев равны $v_n = 1/2 + (-1)^n \tilde{v}$. В данном случае величину \tilde{v} можно рассматривать как параметр зарядового упорядочения. Исходя из предположения о периодичности системы, параметры порядка $\Delta(n, m)$ будем искать в виде

$$\Delta(n, m) = \Delta_1(m) + (-1)^n \Delta_2(m). \quad (26)$$

В общем случае величины $\Delta_{1(2)}(m)$ могут быть комплексными, т.е. содержать фазовые множители $e^{i\varphi_{1(2)}(m)}$. Фазовые множители уже нельзя задавать независимым образом, поскольку уравнения самосогласования накладывают определенные условия на разности фаз $\varphi_{1(2)}(m)$. Однако эти условия не фиксируют все фазы и остается определенный произвол в выборе величин $\varphi_{1(2)}(m)$. Можно показать, что энергия системы не зависит от фаз параметров порядка, если последние удовлетворяют уравнениям самосогласования (подчеркнем, что рассматривается случай, когда модули и фазы параметров порядка не зависят от X). Произвол в выборе фаз есть отражение того, что фазовая когерентность является спонтанной. В связи с вышесказанным для нахождения основного состояния системы можно ограничиться рассмотрением наиболее простого для анализа случая, когда все фазы равны нулю, т.е. величины $\Delta_1(m)$ и $\Delta_2(m)$ являются вещественными.

Переходя в (23) к фурье-компонентам операторов a_n

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q_z} e^{iq_z n} a_{q_z}, \quad (27)$$

получим следующее выражение для гамильтониана системы:

$$H_{MF} = \sum_X \sum_{q_z} \{ [\varepsilon - \Delta_1(q_z)] a_{q_z}^+ a_{q_z} + [\tilde{\varepsilon} - \Delta_{2r}(q_z) - i\Delta_{2i}(q_z)] a_{q_z+\pi}^+ a_{q_z} \}. \quad (28)$$

Здесь введены обозначения $\varepsilon = (\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2k-1})/2$, $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_{2k} - \varepsilon_{2k-1})/2$. Величины ε и $\tilde{\varepsilon}$ ввиду предполагаемой периодичности по z от k не зависят. Функции $\Delta_1(q_z)$ и $\Delta_{2r(i)}(q_z)$ в (28) определены как

$$\Delta_1(q_z) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m \Delta_1(m) \cos(mq_z), \quad (29)$$

$$\Delta_{2r}(q_z) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m} \Delta_2(2m) \cos(2mq_z), \quad (30)$$

$$\Delta_{2i}(q_z) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1} \Delta_2(2m+1) \sin[(2m+1)q_z]. \quad (31)$$

Диагонализуя гамильтониан (28) и вычисляя средние (26), приходим к уравнениям самосогласования для параметров порядка. Приведем эти уравнения для случая $T = 0$:

$$\tilde{v} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dq_z \frac{\tilde{\varepsilon} - \Delta_{2r}(q_z)}{E(q_z)}, \quad (32)$$

$$\Delta_1(2m) = 0, \quad (33)$$

$$\Delta_1(2m+1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dq_z \frac{\cos[(2m+1)q_z] \Delta_1(q_z)}{E(q_z)}, \quad (34)$$

$$\Delta_2(2m) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dq_z \frac{\cos(2mq_z) [\tilde{\varepsilon} - \Delta_{2r}(q_z)]}{E(q_z)}, \quad (35)$$

$$\Delta_2(2m+1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dq_z \frac{\sin[(2m+1)q_z] \Delta_{2i}(q_z)}{E(q_z)}. \quad (36)$$

В уравнениях (32), (34)–(36) спектр энергий элементарных возбуждений $E(q_z)$ определяется следующим соотношением:

$$E(q_z) = \sqrt{[\tilde{\varepsilon} - \Delta_{2r}(q_z)]^2 + \Delta_1^2(q_z) + \Delta_{2i}^2(q_z)}. \quad (37)$$

Как видно из уравнений самосогласования, в системе может реализоваться состояние с глобальной фазовой когерентностью. Состояние, рассмотренное в [25], соответствует случаю, когда все величины $\Delta_2(2m+1)$ равны нулю тождественно (при этом уравнение (36) удовлетворяется автоматически), но $\Delta_1(2m+1) \neq 0$ для сколь угодно больших m . Это означает, что фазовая когерентность устанавливается между всеми слоями.

Однако легко убедиться, что уравнениям самосогласования (32)–(36) удовлетворяет также решение существенно иного типа: $\Delta_1(\pm 1) = \pm \Delta_2(\pm 1) \neq 0$ и $\Delta_1(m) = \Delta_2(m) = 0$ при $m \neq \pm 1$. В этом случае $\Delta(2k, 1) = \Delta(2k+1, -1) \neq 0$ (либо $\Delta(2k-1, 1) = \Delta(2k, -1) \neq 0$, а все остальные $\Delta(n, m)$ зануляются). В состоянии, отвечающем такому решению, система разбивается на пары слоев и межслойная фазовая когерентность устанавливается лишь внутри каждой пары. Такое состояние мы называем димерным.

Записав дифференциал свободной энергии многослойной системы и проинтегрировав его по \tilde{v} , получим выражение для свободной энергии при произвольных значениях параметров порядка, удовлетворяющих уравнениям (32)–(36). Искомая энергия имеет вид

$$F(\tilde{v}) = V_c(\tilde{v}) - I \left(\frac{1}{4} + \tilde{v}^2 \right) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m [\Delta_1^2(m) + \Delta_2^2(m)], \quad (38)$$

где первое слагаемое $V_c(\tilde{v})$ отвечает энергии прямого кулоновского взаимодействия, которая не зависит от конкретного вида $\Delta_{1(2)}(m)$.

Используя ответ (38), сравним энергии состояния с глобальной фазовой когерентностью и димерного состояния при $\tilde{v} = 0$. В этом случае из уравнений (32)–(36) находим следующие выражения для параметров порядка $\Delta_{1,2}(m)$. Для состояния с глобальной когерентностью имеем

$$\Delta_1(m) = \frac{\sin(\pi m/2)}{m\pi}, \quad \Delta_2(m) = 0. \quad (39)$$

Для димерного состояния $\Delta_1(m) = \pm \Delta_2(m) = \delta_{1,|m|}/4$. Следовательно, разница энергий димерного состояния и состояния с глобальной фазовой когерентностью удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} F_d - F_g &= -\frac{J_1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \\ &\leq -\frac{J_1}{4} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

При получении (40) учтено, что при $d \neq 0$ параметры J_m спадают с ростом m . При $d = 0$, когда все J_m одинаковы, энергии двух рассматриваемых состояний совпадают. Численный анализ уравнений самосогласования показывает, что и при произвольных \tilde{v} и $d \neq 0$ выполняется неравенство $F_d < F_g$. Поскольку энергия состояния с глобальной фазовой когерентностью больше энергии димерного состояния, то именно димерное состояние, а не состояние [25], следует рассматривать в качестве возможного кандидата на основное состояние системы.

4. Сравнение энергий димерного и зарядово-упорядоченного состояний

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости димерного состояния в многослойной системе с четным числом слоев относительно перехода в зарядово-упорядоченное состояние. Для этого найдем явный вид энергии прямого кулоновского взаимодействия $V_c(\tilde{v})$. Эта энергия равна энергии электрического поля внутри сверхрешетки, индуцированного заряженными электронными слоями (поскольку в целом система остается электронейтральной, электрическое поле вне сверхрешетки равно нулю).

Если бы факторы заполнения слоев были равны $\nu_{2k-1} = 1/2 - \tilde{v}$, $\nu_{2k} = 1/2 + \tilde{v}$ ($k = 1, 2, \dots, N/2$), то электрическое поле было бы отлично от нуля между слоями 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6 и т.д., а между слоями 2 и

3, 4 и 5 и т.д. оно бы занулялось. Соответственно, энергия электрического поля в пересчете на один электрон, как и в двухслойной системе, была бы равна $V_c = W\tilde{v}^2$. Однако в отличие от двухслойной системы, в многослойной системе можно достичь существенного выигрыша в энергии прямого кулоновского взаимодействия, изменив факторы заполнения только двух внешних слоев. Действительно, если факторы заполнения внешних слоев станут равными $\nu_1 = 1/2 - \tilde{v}/2$ и $\nu_N = 1/2 + \tilde{v}/2$, то электрическое поле будет индуцироваться между всеми слоями и его абсолютная величина будет в два раза меньше, чем в предыдущем случае (направление поля будет менять знак при переходе через слой). Следовательно, в пересчете на один электрон, энергия V_c будет в два раза меньше (с точностью до $1/N$), чем в двухслойной системе. При $N \rightarrow \infty$ вся энергия будет равна

$$F = -\frac{I+J}{4} + \left(\frac{W}{2} - I + J \right) \tilde{v}^2. \quad (41)$$

При получении (41) учтено, что в димерном состоянии параметр порядка $\Delta = 2\Delta_{1(2)}$ имеет такую же зависимость от \tilde{v} , как и в двухслойной системе (уравнение (18)).

В отличие от (21), знак коэффициента при \tilde{v}^2 в (41) зависит от d : при $d < 1,45l_B$ этот коэффициент отрицательный, а при больших d — положительный. Следовательно, при $d < 1,45l_B$ и $N \rightarrow \infty$ минимуму энергии будет отвечать состояние с максимальным зарядовым упорядочением, в котором все $\Delta(n, m)$ зануляются и фазовая когерентность отсутствует. В случае $d > 1,45l_B$ минимум энергии (41) достигается при $\tilde{v} = 0$, т.е. зарядовое упорядочение становится энергетически невыгодным.

Проведенный анализ легко обобщить и на случай конечных четных N . Рассмотрим конфигурацию, когда внутренние слои находятся в полностью либо частично зарядово-упорядоченном состоянии и для этих слоев разбаланс факторов заполнения равен \tilde{v}_{in} . Разбаланс факторов заполнения крайних слоев будем описывать параметром $\tilde{v}_{ex} = (\nu_N - \nu_1)/2$. Будем предполагать, что фазовая когерентность устанавливается только между внутренними слоями и имеет димерный характер. Энергия такого состояния (в пересчете на один электрон) равна

$$\begin{aligned} F(\tilde{v}_{ex}, \tilde{v}_{in}) &= W \left[\tilde{v}_{ex}^2 + \frac{N-2}{N} (\tilde{v}_{in} - \tilde{v}_{ex})^2 \right] - \\ &- I \left[\frac{N-2}{N} \left(\frac{1}{4} + \tilde{v}_{in}^2 \right) + \frac{2}{N} \left(\frac{1}{4} + \tilde{v}_{ex}^2 \right) \right] - \\ &- J \frac{N-2}{N} \left(\frac{1}{4} - \tilde{v}_{in}^2 \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Поскольку функция $F(\tilde{v}_{ex}, \tilde{v}_{in})$ имеет экстремум (либо седловую точку) только при $\tilde{v}_{ex} = \tilde{v}_{in} = 0$, то ее минимальное значение может достигаться либо в точке экстремума, либо на краю области разрешенных значений $\tilde{v}_{ex}, \tilde{v}_{in}$ (когда $|\tilde{v}_{in}| = 1/2, |\tilde{v}_{ex}| \leq 1/2$ либо $|\tilde{v}_{ex}| = 1/2, |\tilde{v}_{in}| \leq 1/2$). Поэтому для определения области стабильности димерной фазы нам достаточно найти минимальное значение выражения (42) на краю разрешенной области и сравнить его с энергией димерной фазы в отсутствие зарядового упорядочения $F_d = -(I + J)/4$.

Если $WN < 2I$, минимум выражения (42) на краю разрешенной области достигается при $\tilde{v}_{in} = \tilde{v}_{ex} = \pm 1/2$ и $F(\pm 1/2, \pm 1/2) = W/4 - I/2 > F_d$.

При выполнении обратного неравенства $WN > 2I$ минимум достигается в точках

$$\tilde{v}_{ex} = \pm \frac{1}{4} \frac{N - 2}{N - 1 - I/W}, \quad \tilde{v}_{in} = \pm \frac{1}{2}, \quad (43)$$

где значение энергии равно

$$\frac{I}{2N} - \frac{I}{2} + \frac{W(WN - 2I)(N - 2)}{2N(WN + I - W)}. \quad (44)$$

Отметим, что из (43), в частности, следует, что $\tilde{v}_{ex} = \tilde{v}_{in}/2 = 1/4$ при $N \rightarrow \infty$.

Величина (44) может быть как больше, так и меньше F_d . Поэтому, в общем случае, имеется область неустойчивости димерной фазы в пространстве параметров (d, N) , которая определяется системой неравенств

$$\frac{I}{2N} - \frac{I - J}{4} + \frac{W(WN - 2I)(N - 2)}{2N(WN + I - W)} < 0, \quad WN > 2I. \quad (45)$$

Численный анализ показывает, что при $N \leq 10$ система неравенств (45) не удовлетворяется ни при каких d . Отсюда следует, что в многослойной системе, в которой число слоев четно и не превышает 10, димерное состояние устойчиво относительно перехода в зарядово-упорядоченную фазу при любых значениях d .

При $N > 10$ условия (45) выполняются в диапазоне $d_{c1} < d < d_{c2}$. В этой области параметров будет иметь место полное зарядовое упорядочение внутренних слоев и фазовая когерентность между этими слоями будет отсутствовать. Зависимость d_{c1} и d_{c2} от N приведена на рис. 1. При $N \rightarrow \infty$ диапазон значений d , при которых может существовать димерное состояние, ограничен условием $d > 1,45l_B$ ($\lim_{N \rightarrow \infty} d_{c1}(N) = 0$). Однако даже при достаточно больших, но конечных N , существует область ма-

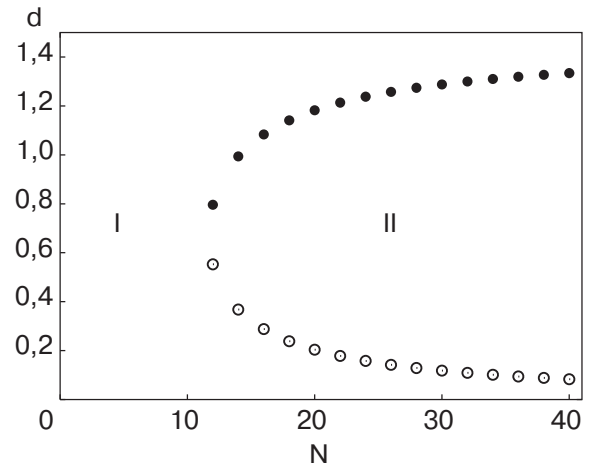


Рис. 1. Области существования димерного (I) и зарядово-упорядоченного (II) состояний. d_{c1} (○), d_{c2} (●) в зависимости от числа слоев N . Межслойное расстояние d дано в магнитных длинах l_B .

лых d ($d \lesssim l_B \sqrt{2\pi}/N$), в которой возможно образование димерного состояния.

В работе [25] было показано, что фактором, работающим в многослойных системах против зарядового упорядочения, является межслойное туннелирование. Основываясь на сравнении энергий системы при $\tilde{v} = 0$ и $\tilde{v} = \pm 1/2$, авторы этой работы пришли к выводу, что в случае, когда туннельный параметр t превышает значение $0,05e^2/\epsilon l_B$, зарядовое упорядочение становится энергетически невыгодным при любых значениях параметра d/l_B .

При наличии туннелирования между слоями фазовая когерентность уже не является спонтанной, поскольку туннелирование приводит к фиксации фазы параметра порядка. В последнем случае сверхтекучие состояния с постоянным градиентом фазы не могут реализоваться, но может существовать сверхтекучесть «солитонного» типа [16, 26, 27]. Согласно результатам работы [16], при $t \gtrsim 0,01e^2/\epsilon l_B$ такое состояние будет неустойчиво относительно возникновения нормальных возбуждений, приводящих к диссипации энергии. Поэтому, с точки зрения реализации сверхтекучего состояния в многослойных системах, туннелирование играет, скорее, отрицательную, чем положительную роль.

Напротив, использование многослойных систем с параметрами, попадающими в область стабильности димерного состояния (рис. 1), и малой величиной туннелирования представляется более перспективным.

5. Заключение

Таким образом, показано, что в определенном диапазоне параметров в многослойных квантовых холловских системах может реализоваться состояние со спонтанной межслойной фазовой когерентностью. Фазовая когерентность в таких системах имеет не трехмерный, а двумерный характер, а именно, система разбивается на пары рядом расположенных слоев и когерентность устанавливается лишь внутри каждой пары, а между электронами, которые принадлежат различным парам, когерентность отсутствует.

Если число слоев $N \leq 10$, то при произвольном расстоянии между слоями состояние со спонтанной межслойной фазовой когерентностью является устойчивым относительно перехода в зарядово-упорядоченную фазу. Если число слоев $N > 10$, состояние со спонтанной фазовой когерентностью устойчиво либо при достаточно малых, либо достаточно больших расстояниях между слоями. В промежуточном диапазоне расстояний в системе с таким числом слоев имеет место переход в зарядово-упорядоченное состояние, в котором межслойная фазовая когерентность отсутствует.

Поскольку фазовая когерентность имеет двумерный характер, то и сверхтекучесть электрон-дырочных пар будет двумерной. Поэтому многослойную квантовую холловскую систему можно рассматривать как твердотельный аналог ультрахолодных атомарных бозе-газов в оптических сверхрешетках (см., например, [28]). К интересным эффектам, которые наблюдают в таких системах, можно, в частности, отнести эффект бездиссипативного межслойного увлечения сверхтекучего потока [29–31].

Настоящая работа поддержана грантом INTAS № 01-2344. Работа была начата в Институте Макса Планка физики комплексных систем в Дрездене и один из авторов (С.И.Ш.) пользуется случаем поблагодарить проф. Фульде за приглашение в институт и гостеприимство.

1. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *ЖЭТФ* **71**, 738 (1976).
2. С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 505 (1976).
3. И.О. Кулик, С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 1405 (1976).
4. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3242 (1994).
5. Y. Kuramoto and C. Horie, *Solid State Commun.* **25**, 713 (1978).
6. D. Paquet, T.M. Rice, and K. Ueda, *Phys. Rev.* **B32**, 5208 (1985).
7. D. Yoshioka and A.H. MacDonald, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 4211 (1990).
8. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B57**, 14809 (1998).

9. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B67**, 214515 (2003).
10. K. Moon, H. Mori, K. Yang, S.M. Girvin, A.H. MacDonald, L. Zheong, D. Yoshioka, and S.C. Zhang, *Phys. Rev.* **B51**, 5138 (1995).
11. H.A. Fertig, *Phys. Rev.* **B40**, 1087 (1989).
12. A.H. MacDonald and E.H. Rezayi, *Phys. Rev.* **B42**, 3224 (1990).
13. R. Cote, L. Brey, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B46**, 10239 (1992).
14. X.G. Wen and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1811 (1992).
15. K. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 056802 (2001).
16. M. Abolfath, A.H. MacDonald, and L. Radzihovsky, *Phys. Rev.* **B68**, 155318 (2003).
17. I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5808 (2000).
18. I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 036803 (2001).
19. M. Kellogg, I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 126804 (2002).
20. А.А. Дремин, В.Б. Тимофеев, А.В. Ларионов, Й. Хвам, К. Соеренсен, *Письма в ЖЭТФ* **76**, 526 (2002).
21. H.L. Stormer, J.P. Eisenstein, A.C. Gossard, W. Wiegmann, and K. Baldwin, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 85 (1986).
22. J. Jo, M. Santos, M. Shayegan, Y.W. Suen, L.W. Engel, and A.M. Lanzinotto, *Appl. Phys. Lett.* **57**, 2130 (1990).
23. D.P. Druist, P.J. Turley, K.D. Maranowski, E.G. Gwinn, and A.C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 365 (1998).
24. V.A. Bezugly and S.I. Shevchenko, *Physica* **B284–288**, 1205 (2000).
25. C.B. Hanna, J.C. Diaz-Velez, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B65**, 115323 (2002).
26. С.И. Шевченко, *ФНТ* **3**, 605 (1977).
27. T. Iida and M. Tsubota, *Phys. Rev.* **B60**, 5802 (1999).
28. O. Morsch and E. Arimondo, *Ultracold Atoms and Bose-Einstein Condensates in Optical Lattices*, in: *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions*, T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens (eds.), *Lecture Notes in Physics*, V. 602, Springer (2002) (also available as *cond-mat/0209034*).
29. B. Tanatar and A.K. Das, *Phys. Rev.* **B54**, 13827 (1996).
30. С.В. Терентьев, С.И. Шевченко, *ФНТ* **25**, 664 (1999).
31. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *cond-mat/0305290*.

**Charge ordering and interlayer phase coherence
in quantum Hall superlattices**

S.I. Shevchenko, D.V. Fil, and A.A. Yakovleva

The possibility of the existence of states with spontaneous interlayer phase coherence in multilayer electron systems in strong perpendicular magnetic field is studied. It is shown that in such systems the phase coherence may be developed only within separate pairs of nearest layers,

while there is no coherence between layers belonging to different pairs. The conditions of stability of the state with interlayer phase coherence to the transition to a charge ordered state are established. It is shown that in a system with number of layers $N \leq 10$ the stability takes place at any interlayer distances d . At $N > 10$ there are two regions of stability: at rather large d and at rather small d . At $N \rightarrow \infty$ the region of stability at small d disappears.