Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2014, т. 40, № 5, с. 560–569

Симметрия и релаксационная динамика магнетиков со спином $s = 1$

М.Ю. Ковалевский, А.В. Глущенко

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: mikov51@mail.ru

Статья поступила в редакцию 7 октября 2013 г.

Рассмотрены чистые и смешанные квантовые состояния магнетиков со спином $s = 1$, для которых введена поляризационная матрица плотности. Найдены одноосные и двухосные квадрупольные упорядочения, соответствующие чистым магнитным состояниям, и вычислены степени поляризации. Выяснены типы нормальных и вырожденных магнитных состояний, связанные с существованием подалгебр скобок Пуассона магнитных степеней свободы. Вычислены спектры коллективных магнитных возбуждений с учетом затухания в нормальном и вырожденном состояниях.

Розглянуто чисті та змішані квантові стани магнетиків зі спіном $s = 1$, для яких введено поляризаційну матрицю щільності. Знайдено одновісні та двовісні квадрупольні впорядкування, які відповідають чистим магнітним станам, та обчислено ступені поляризації. З'ясовано типи нормальних і вироджених магнітних станів, які пов'язані з існуванням подалгебр дужок Пуассона магнітних ступенів свободи. Обчислено спектри колективних магнітних збуджень з урахуванням загасання в нормальному та виродженому станах.

PACS: **75.10.–b** Общая теория и модели магнитного упорядочения.

Ключевые слова: спин, поляризационная матрица, симметрия, динамика, релаксация, спектры.

Введение

В настоящее время большой интерес вызывают исследования магнетиков, частицы которых обладают спином $s \geq 1$. Эти исследования актуальны благодаря теоретическим и экспериментальным работам по физике квазикристаллических структур, созданных на основе технологии оптических решеток [1,2]. Возможность регулирования геометрических параметров решетки и, тем самым, интенсивности межчастичного взаимодействия делает их привлекательными при изучении коллективных свойств квантовых объектов. Дополнительный стимул связан с бозе-эйнштейновской конденсацией нейтральных атомов с ненулевым спином [3,4]. Имеющиеся данные о квадрупольных магнитных состояниях [5–7] выявляют ограниченность применимости традиционной физики магнетизма в ее приложении к высокоспиновым системам.

В работах [8–11] исследованы состояния равновесия магнетиков со спином $s = 1$ и рассмотрены модели гамильтонианов с сильным биквадратичным взаимодействием. На этой основе проанализированы фазовые состояния низкоразмерных магнетиков и предсказана возможность нематических магнитных состояний. Неравновесные процессы в нормальных состояниях магнетиков со спином $s = 1$ рассмотрены в [12–14]. Авторы этих работ использовали набор динамических величин, соответствующий чистым квантовым состояниям. В работах [15,16] построены динамические уравнения для магнитных величин, характеризующих смешанные состояния. В [17,18] изучены процессы релаксации в нормальных состояниях магнетиков со спином $s = 1$. В [17] установлена структура диссипативных потоков в динамических уравнениях для случая SU(3) симметричного гамильтониана. В [18] найден характер затухания магнитных возбуждений и отмечена важность влияния симметрии на механизм релаксации.

Описание вырожденных магнитных состояний приводит к расширению необходимости увеличения числа магнитных степеней свободы. Известно, что одноосное спонтанное нарушение симметрии соответствует случаю антиферромагнетика и магнитной фазе сверхтекучего He^3-A, а двухосное нарушение симметрии реализуется в спиновых стеклах, сверхтекучей фазе He^3-B [19].

Ожидаемые новые физические явления в магнетиках со спином s = 1 в основном обусловлены тремя факторами. С увеличением значения спина частиц расширяется набор величин, необходимых для макроскопически полного описания состояний среды. Наличие нескольких возможностей симметрии обменного магнитного взаимодействия для спинов $s \ge 1$ ведет к более разнообразной структуре равновесного состояния и неравновесных динамических процессов. В этих магнетиках возможны несколько типов нарушения симметрии состояния равновесия, обусловленные трансформационными свойствами параметра порядка, который имеет векторный или тензорный характер.

Структура статьи такова: в разд. 1 рассмотрены чистые и смешанные квантовые состояния магнетиков со спином s = 1 на основе поляризационной матрицы плотности. Для этих состояний введены магнитные степени свободы, проанализировано их количество и области изменения. В разд. 2 получены подалгебры скобок Пуассона, характеризующие нормальные и вырожденные состояния. В разд. 3 и 4 установлены уравнения релаксационной динамики нормальных и вырожденных состояний и вычислены спектры коллективных возбуждений.

1. Чистые и смешанные квантовые состояния. Магнитные степени свободы для спина s = 1/2 и s = 1

Количество параметров, характеризующих магнитную систему, связывают с числом величин, которые описывают одночастичные спиновые состояния. Волновая функция чистых квантовых состояний частицы со спином s имеет вид

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^{s} A_m \,|s,m\rangle\,. \tag{1.1}$$

Здесь $|s,m\rangle$ — собственные функции операторов квадрата спина и проекции спина на ось квантования: $\hat{s}^2\,|s,m\rangle = s(s+1)\,|s,m\rangle$, $\hat{s}_z\,|s,m\rangle = m\,|s,m\rangle$. Суммирование идет по дискретной спиновой переменной, которая принимает 2s + 1 значение. Условие нормировки $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ и физическая эквивалентность состояний $|\psi\rangle$ и $|\psi\rangle_\theta \equiv e^{i\theta}\,|\psi\rangle$ ведут к числу действительных независимых параметров чистого состояния, равному $N_{\text{pure}} = 4s$ [20]. Смешанные одночастичные состояния частицы со спином s описываются поляризационной матрицей плотности $\hat{\rho}$, которая имеет размерность (2s+1) × (2s+1). Условие нормировки $\mathrm{tr}\hat{\rho} = \sum_{m=-s}^{s} \rho_{mm} = 1$ и эрмитовости этой матрицы приводят к числу действительных параметров $N_{\text{mixed}} = 4s(s+1)$, которые в общем случае не являются независимыми. Анализ состояний изучаемых физических систем удобно осуществить, используя разложение матрицы плотности по поляризационным операторам [21] или другим матричным функциям, которые имеют смысл магнитных степеней свободы

$$\hat{\rho}(\mathbf{x},t) \equiv (2s+1)^{-1}\hat{I} + \hat{g}(\mathbf{x},t)\,. \tag{1.2}$$

Здесь $\hat{I}$ — единичная матрица. Локальные магнитные степени свободы $\hat{g}(\mathbf{x},t)$ в общем случае являются функциями координаты и времени. Чтобы обеспечить условие нормировки, последняя матрица должна быть бесследной $\mathrm{tr}\hat{g}(\mathbf{x}) = 0$. Для упрощения записи мы опускаем далее временную зависимость в этих величинах.

В разд. 2 на примере магнетиков со спином $s = 1$ получены скобки Пуассона для средних значений матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$ (см. соотношения (2.3)). Подобную алгебру можно получить также для магнетиков с произвольным спином. Эта алгебра содержит 2s инвариантов Казимира, поэтому число независимых магнитных параметров в смешанных состояниях равно 2s(2s + 1).

В случае спина s = 1/2 матрица $\hat{g}(\mathbf{x})$ имеет вид $\hat{g}(\mathbf{x}) = p_\alpha(\mathbf{x})\hat{\sigma}_\alpha/2$, где $p_\alpha(\mathbf{x})/2 = s_\alpha(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\hat{\rho}(\mathbf{x})\hat{s}_\alpha$ — вектор поляризации и $\hat{\sigma}_\alpha$ — матрицы Паули, связанные с оператором спина соотношением $\hat{s}_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha/2$. Условие $\mathrm{tr}\hat{\rho}^2 \le 1$ задает область изменения вектора поляризации. В чистом состоянии $\mathrm{tr}\hat{\rho}^2 = \mathrm{tr}\hat{\rho}$, откуда $p = 1$, направление вектора поляризации произвольное. Для смешанных состояний $\mathrm{tr}\hat{\rho}^2 < \mathrm{tr}\hat{\rho}$, поэтому $0 \le p < 1$. Неполяризованное квантовое состояние отвечает значению $p = 0$.

Для магнетиков со спином s = 1 число независимых величин, характеризующих чистое состояние, равно четырем. Смешанное состояние такой магнитной среды можно задать с помощью поляризационной матрицы $\hat{\rho}(\mathbf{x})$, размерностью 3×3, которая содержит восемь действительных величин. Разложим поляризационную матрицу (1.2) по полному набору неприводимых (3×3) матриц:

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \hat{I}/3 + s_\alpha(\mathbf{x})\hat{s}_\alpha/2 + q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\,\hat{q}_{\beta\alpha}\,. \tag{1.3}$$

Здесь матричные элементы операторов спина $\hat{s}_\alpha$ и квадрупольного тензора $\hat{q}_{\beta\alpha}$, согласно [21], имеют вид

$$(\hat{s}_\alpha)_{\mu\nu} \equiv -i\varepsilon_{\alpha\mu\nu},$$

$$(\hat{q}_{\beta\alpha})_{\mu\nu} \equiv (\delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} + \delta_{\beta\nu}\delta_{\alpha\mu} - 2\delta_{\beta\alpha}\delta_{\mu\nu}/3)/2 \tag{1.4}$$

и удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\mathrm{tr}\hat{s}_\alpha = 0,\ \ \mathrm{tr}\hat{q}_{\alpha\beta} = 0,\ \ \mathrm{tr}\hat{s}_\gamma\hat{q}_{\alpha\beta} = 0,\ \ \mathrm{tr}\hat{s}_\alpha\hat{s}_\beta = 2\delta_{\alpha\beta},$$

$$\mathrm{tr}\hat{q}_{\gamma\rho}\hat{q}_{\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho}/3)/2\,,$$

$$\mathrm{tr}\hat{s}_\alpha\hat{s}_\beta\hat{s}_\gamma\hat{s}_\rho = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\gamma\beta}\,. \tag{1.5}$$

Учитывая эти равенства, получим связь средних значений плотности спина $s_\alpha(\mathbf{x})$ и квадрупольной матрицы $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ с поляризационной матрицей: $\mathrm{tr}\hat\rho(\mathbf{x})\hat s_\alpha = s_\alpha(\mathbf{x})$, $\mathrm{tr}\hat\rho(\mathbf{x})\hat q_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$. Поэтому имеем

$$\mathrm{tr}\hat\rho(\mathbf{x})\hat g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x})/2\,, \quad (1.6)$$

где $\hat g_{\alpha\beta} \equiv \hat q_{\alpha\beta} - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat s_\gamma/2$. Квадрупольная матрица — действительная, симметричная и бесследная $q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}$, $q_{\alpha\alpha} = 0$. Пять ее независимых компонент параметризуем соотношением

$$q_{\alpha\beta} = q_1(e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3) + q_2(f_\alpha f_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)\,. \quad (1.7)$$

Здесь q_1, q_2 — скалярные параметры этой матрицы. Векторы d_α, e_α, $f_\alpha = (\mathbf{d}\times\mathbf{e})_\alpha$ образуют ортонормированный репер и имеют физический смысл осей магнитной анизотропии квадрупольного упорядочения. Магнитные состояния, в которых $q_1 \neq 0$, $q_2 = 0$ или $q_2 \neq 0$, $q_1 = 0$ являются одноосными. Случай $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, отвечает двухосному квадрупольному магнитному упорядочению.

Рассмотрим квадрупольную матрицу и спин в чистых и смешанных квантовых состояниях. Для чистых состояний $\hat\rho^2 = \hat\rho$. Отсюда, используя (1.3), (1.4)–(1.6), получим уравнения для средних значений магнитных параметров:

$$\frac{1}{2}s^2 + \mathrm{tr}\hat q^2 = \frac{2}{3}, \quad s_\alpha = -3s_\beta q_{\alpha\beta},$$

$$-\frac{1}{4}s_\alpha s_\beta + (\hat q^2)_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{4}s^2 + \mathrm{tr}\hat q^2\right) = \frac{1}{3}q_{\alpha\beta}\,. \quad (1.8)$$

С помощью первых двух соотношений (1.8) исключим спиновый вектор и получим уравнение для квадрупольной матрицы в чистом состоянии:

$$2 - 9\mathrm{tr}\hat q^2 + 18\mathrm{tr}\hat q^3 = 0\,. \quad (1.9)$$

Для таких состояний, в силу (1.9), скалярный параметр квадрупольной матрицы не обращается в нуль. В начале рассмотрим случай одноосной квадрупольной матрицы. Уравнение (1.9) имеет два решения, характеризующие чистое квантовое состояние: $q = 1$, $q = -1/2$. Поэтому

$$1.\ \ s_\alpha = 0, \quad q_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\,;$$

$$2.\ \ s_\alpha = \pm e_\alpha, \quad q_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)\,. \quad (1.10)$$

Первое из них описывает магнитное состояние, в котором спиновый момент отсутствует и имеется квадрупольный момент, который отвечает стержнеподобному нематическому упорядочению [22]. Второе решение является спин-квадрупольным: для таких чистых состояний спин и квадрупольная матрица не обращаются в нуль. При этом ось анизотропии квадрупольной матрицы коллинеарна вектору спинового момента. Отрицательное значение скалярного параметра квадрупольной матрицы отвечает дископодобному нематическому упорядочению [22].

В случае двухосных квадрупольных состояний (1.7), учитывая равенства $\mathrm{tr}\hat q^2 = 2(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2)/3$ и $\mathrm{tr}\hat q^3 = (q_1 + q_2)(2q_1 - q_2)(q_1 - 2q_2)/9$, из (1.9) получим связь величин q_1 и q_2 в чистом состоянии $(q_1 + q_2)\times(2q_1 - q_2)(q_1 - 2q_2) - 3(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2) = 1$. Для физической системы, обладающей симметрией относительно последовательности маркировки параметров $q_1 \Leftrightarrow q_2$, эти величины равны: $q_1 = q_2 \equiv q$. Поэтому приходим к уравнению $1 - 3q^2 - 2q^3 = 0$, решениями которого являются $q = -1$ и $q = 1/2$. Далее замечая справедливость соотношения $e_\alpha e_\beta + f_\alpha f_\beta + d_\alpha d_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, видим, что в обоих случаях квадрупольная матрица сводится к одноосному виду и решения приобретают вид $q_{\alpha\beta} = (d_\alpha d_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)$, $s_\alpha = 0$; $q_{\alpha\beta} = -(d_\alpha d_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)/2$, $s_\alpha = \pm e_\alpha$, что аналогично одноосным решениям уравнений (1.8). Вид степеней поляризаций подобен рассмотренному ранее одноосному случаю.

Нетрудно видеть, что система уравнений (1.8) имеет двухосные решения, которые можно представить в виде

$$s_\alpha = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}u_\beta v_\gamma, \quad q_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta + v_\alpha v_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\,. \quad (1.11)$$

Здесь действительные векторы $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ удовлетворяют соотношению $u^2 + v^2 = 1$. Комплексные коэффициенты разложения A_α волновой функции (1.1) для спина $s = 1$ в декартовом базисе связаны с векторами u_α, v_α равенством $A_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha \equiv \eta_\alpha \exp i\varphi_\alpha$. Фазовое преобразование $\varphi_\alpha \to \varphi'_\alpha \equiv \varphi_\alpha + \theta$ приводит к трансформационному соотношению $A_\alpha \to A'_\alpha = u'_\alpha + iv'_\alpha \equiv \eta_\alpha \exp i\varphi'_\alpha$ и оставляет без изменения вектор спина и квадрупольную матрицу:

$$s_\alpha(\eta,\varphi) \to s'_\alpha \equiv s_\alpha(\eta,\varphi') = s_\alpha(\eta,\varphi),$$

$$q_{\alpha\beta}(\eta,\varphi) \to q'_{\alpha\beta} \equiv q_{\alpha\beta}(\eta,\varphi') = q_{\alpha\beta}(\eta,\varphi).$$

Поэтому магнитные величины зависят от четырех независимых параметров. Воспользуемся этой инвариантностью и выберем коэффициенты разложения A'_α волновой функции (1.1) таким образом, чтобы выполнялось соотношение $u'_\alpha v'_\alpha = 0$. Из этого условия получим уравнение для угла θ: $\mathbf{uv}\,\mathrm{tg}^2\theta + (v^2 - u^2)\mathrm{tg}\,\theta - \mathbf{uv} = 0$, решением которого является равенство

$$\mathrm{tg}\,\theta = (u^2 - v^2 \pm \sqrt{(u^2 - v^2)^2 + 4(\mathbf{uv})^2})/2(\mathbf{uv}).$$

Отсюда следует связь средних значений плотности спина и квадрупольной матрицы с коэффициентами $A'_\alpha = u'_\alpha + iv'_\alpha$:

$$u'^2 = q_1,\ v'^2 = q_2,\ u'_\alpha/u' = e_\alpha,\ v'_\alpha/v' = f_\alpha,\ s'_\alpha = 2d_\alpha u'v'.$$

Для магнитных систем со спином $s = 1$ вводят в рассмотрение степени векторной поляризации $p \equiv \sqrt{\mathbf{s}^2}$, тензорной поляризации $T \equiv \sqrt{3\mathrm{tr}\hat{q}^2/2}$ и общей поляризации $d \equiv \sqrt{3\mathbf{s}^2/4+T^2}$ [23]. Чистое состояние, соответствующее решению 1 в (1.10), дает значения поляризаций: $p=0$, $T=1$, $d=1$. Для второго решения в (1.10) получим: $p=1$, $T=1/2$, $d=1$. Значения плотности спина и квадрупольной матрицы (1.11) приводят к степеням поляризации:

$$p = 2\sqrt{u^2v^2-(\mathbf{uv})^2}, \quad T=\sqrt{1-3(u^2v^2-(\mathbf{uv})^2)}, \quad d=1.$$

В смешанных квантовых состояниях справедливы неравенства $\mathrm{tr}\hat{\rho}^2<1$, $\mathrm{tr}\hat{\rho}^3<1$, которые задают область изменения магнитных степеней свободы. В неполяризованном состоянии $s_\alpha=0$, $q_{\alpha\beta}=0$. Поэтому степени поляризации изменяются в пределах $0\le p\le 1$, $0\le T\le 1$, $0\le d\le 1$. В дальнейшем изучении особенностей динамических процессов в магнетиках со спином $s = 1$ мы полагаем, что такие сплошные среды находятся в смешанном квантовом состоянии, которое описывается определенным набором степеней свободы, характеризующих это состояние, и образуют замкнутую алгебру скобок Пуассона в гамильтоновой механике. Только для магнетиков со спином $s = 1/2$ количество независимых параметров, характеризующих чистые и смешанные состояния, совпадает. Для магнетиков со спином $s\ge 1$ число параметров, характеризующих смешанное состояние, превышает количество параметров, соответствующих чистым состояниям, и требует коррекции теории. Кроме того, рассмотрение смешанных состояний, в частности, позволяет учесть процессы релаксации в квантовых системах.

2. Алгебра скобок Пуассона физических величин

Для построения гамильтоновой механики магнетиков со спином $s = 1$, в соответствии с [16], введем эрмитовы 3×3 матрицы $b_{\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta}$ $(\hat{a}=\hat{a}^+,\ \hat{b}=\hat{b}^+)$, которые являются канонически сопряженными величинами. Это значит, что справедливы скобки Пуассона

$$\{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), b_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\}=0, \quad \{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), a_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\}=0,$$
$$\{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), a_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\}=-\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \qquad (2.1)$$

Свяжем эти матрицы с физическими величинами теории магнетизма. С этой целью введем в рассмотрение эрмитову и бесследную матрицу:

$$\hat{g}(\mathbf{x}) \equiv i[\hat{b}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x})]. \qquad (2.2)$$

Матрица $\hat{G}\equiv\int d^3x\hat{g}(\mathbf{x})$ является генератором SU(3) симметрии обменного гамильтониана: $\{\hat{G},H\}=0$. Используя определение (2.2) и формулы (2.1), найдем скобку Пуассона для этой величины:

$$i\{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),\ g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\}=(g_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho}-g_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta})\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \qquad (2.3)$$

Независимые инварианты Казимира этой алгебры скобок Пуассона имеют вид

$$g_2(\mathbf{x})\equiv \mathrm{tr}\,\hat{g}^2(\mathbf{x}), \quad g_3(\mathbf{x})\equiv \mathrm{tr}\,\hat{g}^3(\mathbf{x}), \qquad (2.4)$$

так что $\{g_n(\mathbf{x}),\ g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')\}=0$, $n=2,3$. Для чистых квантовых состояний, учитывая (1.2), получим $g_2=2/3$ и $g_3=2/9$. Для смешанных состояний справедливы неравенства $g_2<2/3$, $g_2+g_3<8/9$. Магнитными степенями свободы являются: спиновый вектор — $s_\alpha(\mathbf{x})$ и квадрупольная матрица — $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, которые связаны с матрицей $\hat{g}(\mathbf{x})$ соотношениями

$$s_\alpha = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}g_{\beta\gamma}, \qquad q_{\alpha\beta}=(g_{\alpha\beta}+g_{\beta\alpha})/2. \qquad (2.5)$$

Легко видеть, что в силу (2.3), (2.5) для вектора спина справедливы скобки Пуассона:

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), s_\beta(\mathbf{x}')\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x}). \qquad (2.6)$$

Для оставшихся величин найдем

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')[\varepsilon_{\alpha\beta\rho}q_{\rho\gamma}(\mathbf{x})+\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}q_{\rho\beta}(\mathbf{x})],$$
$$\{q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),\ q_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')s_\gamma(\mathbf{x})\times$$
$$\times(\varepsilon_{\gamma\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}+\varepsilon_{\gamma\beta\mu}\delta_{\alpha\nu}+\varepsilon_{\gamma\beta\nu}\delta_{\alpha\mu}+\varepsilon_{\gamma\alpha\mu}\delta_{\beta\nu})/4. \qquad (2.7)$$

Формулы (2.1), (2.2) позволяют найти скобки Пуассона матриц $\hat{a}$ и $\hat{g}$

$$i\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\}=[a_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho}-a_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta}]\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \qquad (2.8)$$

В силу (2.8) $\{\mathrm{tr}\,\hat{a}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x})\}=0$ и в виду линейности ее правой части положим $\mathrm{tr}\,\hat{a}=0$, так что матрица $\hat{a}$ содержит восемь независимых величин. Аналогичным образом свяжем эрмитову матрицу $\hat{a}(\mathbf{x})$ с физическими величинами соотношением

$$a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\equiv m_{\alpha\beta}(\mathbf{x})-i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma(\mathbf{x})/2.$$

Вектору $\mathbf{n}$ мы придаем физический смысл вектора спонтанной магнитной анизотропии (вектор антиферромагнетизма). При преобразованиях отражения времени T-векторы антиферромагнетизма и спина меняют знак: $\mathrm{T}\mathbf{n}=-\mathbf{n}$, $\mathrm{T}\mathbf{s}=-\mathbf{s}$. Тензор $\hat{m}$ симметричный и бесследный. Он имеет смысл T-четного параметра порядка нематического упорядочения. Эта величина и квадрупольная матрица не изменяются при операции отражения времени: $\mathrm{T}\hat{m}=\hat{m}$, $\mathrm{T}\hat{q}=\hat{q}$. Для введенных величин получим скобки Пуассона:

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), n_\beta(\mathbf{x}')\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma(\mathbf{x}),$$
$$\{n_\alpha(\mathbf{x}), q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')[\varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\rho\gamma}(\mathbf{x})+\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\rho\beta}(\mathbf{x})],$$

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), m_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')[\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\beta\rho}(\mathbf{x})+\varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\gamma\rho}(\mathbf{x})],$$
$$\{m_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), q_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')n_\gamma(\mathbf{x})\times$$
$$\times(\varepsilon_{\alpha\nu\gamma}\delta_{\beta\mu}+\varepsilon_{\beta\mu\gamma}\delta_{\alpha\nu}+\varepsilon_{\beta\nu\gamma}\delta_{\alpha\mu}+\varepsilon_{\alpha\mu\gamma}\delta_{\beta\nu})/4. \qquad (2.9)$$

Формулы (2.6)–(2.9) позволяют выявить подалгебры скобок Пуассона и установить динамику магнетиков со спином $s = 1$ для следующих типов упорядочения.

Случай 1. Подалгебра скобок Пуассона (2.6) состоит из компонент спинового вектора и содержит один инвариант Казимира — s_α^2. Гамильтонов формализм и SO(3) симметрия обменного взаимодействия ведут к уравнениям динамики, совпадающим с теорией Ландау–Лифшица [24] для магнетиков со спином $s = 1/2$.

Случай 2. Обменный гамильтониан и состояние равновесия SU(3) симметрично. Динамика состояний магнетиков формулируется для плотности спина и квадрупольной матрицы, скобки Пуассона (2.6), (2.7) которых образуют замкнутую подалгебру и имеют два инварианта Казимира (2.4). В пренебрежении диссипативными процессами динамика таких магнетиков ранее рассмотрена в [15,16].

Случай 3. Обменный гамильтониан имеет SO(3) симметрию. Состояние равновесия таких магнетиков спонтанно нарушено T-нечетным образом. Векторный параметр порядка характеризует одноосное нарушение SO(3) симметрии. Скобки Пуассона (2.6), (2.9) для плотности спина и вектора антиферромагнетизма образуют подалгебру и ведут к динамике, эквивалентной случаю антиферромагнетика. В этом случае имеются два инварианта Казимира: $s_\alpha n_\alpha$ и n_α^2.

Случай 4. Обменный гамильтониан SO(3) симметричен. Состояние равновесия спонтанно нарушено T-четным параметром порядка $m_{\alpha\beta}$. Вектор спина и тензорный параметр порядка $m_{\alpha\beta}$ формируют подалгебру скобок Пуассона (2.6), (2.9). Этот физически новый случай нарушения SO(3) симметрии отсутствует у магнетиков со спином $s = 1/2$. Набор магнитных степеней свободы имеет два инварианта Казимира: $\mathrm{tr}\hat{m}^2$ и $\mathrm{tr}\hat{m}^3$.

Случай 5. Гамильтониан SU(3) симметричен. Состояние равновесия полностью спонтанно нарушено по отношению к этой симметрии. Набор магнитных величин состоит из эрмитовых матриц $a_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$. Формулы (2.3), (2.8) позволяют получить уравнения динамики магнетиков со спином $s = 1$ в условиях такого нарушения симметрии. Однако в виду громоздкости этого случая он в этой работе не рассмотрен.

3. Релаксационные процессы и спектры магнитных возбуждений. Случай 2

В этом и следующем разделах рассмотрена релаксационная динамика смешанных квантовых состояний магнетиков со спином $s = 1$ для случаев 2 и 4. В случае 2 симметрия гамильтониана SU(3) и состояния равновесия совпадают. В случае 4 симметрия состояния равновесия ниже SO(3) симметрии гамильтониана. Основные взаимодействия в магнетиках носят обменный характер. Рассмотрение динамических процессов в таких средах требует формулировки законов сохранения в дифференциальной форме с учетом симметрии гамильтониана. Состояние изучаемой магнитной среды в случае 2 характеризуется плотностью обменной энергии, которая является функцией плотности энтропии σ матрицы $g_{\alpha\beta}$ и ее градиента $e = e(\sigma, \hat{g}, \nabla_k \hat{g})$. Для дифференциала плотности энергии справедливо равенство

$$de = \frac{\partial e}{\partial \sigma} d\sigma + \mathrm{tr}\frac{\partial \hat{e}}{\partial g} d\hat{g} + \mathrm{tr}\frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g} d\,\nabla_k \hat{g}\,, \qquad (3.1)$$

имеющее физический смысл второго начала термодинамики. Используя стандартное уравнение динамики в форме Гамильтона $\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = \{\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{H}(\hat{g}(\mathbf{x}'))\}$, получим, учитывая (2.3), уравнение движения для этой матрицы:

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g})}{\delta g(\mathbf{x})}\right], \qquad (3.2)$$

которое обобщает уравнение Ландау–Лифшица на рассматриваемую магнитную среду со спином $s = 1$. Квадратные скобки обозначают коммутатор двух матриц. Так как матрицы $\hat{\rho}$ и $\hat{g}$ связаны соотношением (1.2), то из (3.2) следует аналогичное уравнение динамики для одночастичной матрицы плотности, $\dot{\hat{\rho}}(\mathbf{x}) = i[\hat{\rho}(\mathbf{x}), (\delta\hat{H}(\hat{\rho})/\delta\rho(\mathbf{x})]$. Такого типа уравнение получается в рамках ферми-жидкостного подхода (см., например, [25]) для одночастичной матрицы плотности, имеющей размерность (2×2). Эта матрица описывает нормальные состояния магнетиков со спином $s = 1/2$. Последнее уравнение, или эквивалентное ему (3.2), можно рассматривать как обобщение ферми-жидкостного подхода на нормальные бозе-системы со спином $s = 1$.

В случае SU(3) симметрии обменного гамильтониана в набор интегралов движения $(H, G_{\alpha\beta}) = \gamma_a \equiv$ $\equiv \int d^3x \zeta_a(\mathbf{x})$, $(a = 0, \alpha\beta)$ входит гамильтониан и матрица $G_{\alpha\beta}$. Последняя величина имеет смысл генератора SU(3) симметрии. Для плотности энергии обменного взаимодействия справедливо соотношение симметрии

$$\{G_{\alpha\beta}, e(\mathbf{x})\} = 0\,. \qquad (3.3)$$

Учитывая его, найдем уравнения динамики плотностей аддитивных интегралов движения $\zeta_a(\mathbf{x}) \equiv e(\mathbf{x})$, $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ $(a = 0, \alpha\beta)$:

$$\dot{g}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -\nabla_k g_{\alpha\beta,k}(\mathbf{x})\,,$$

$$\mathrm{g}_{\alpha\beta,k}(\mathbf{x}) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'), e(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}')\}. \qquad (3.4)$$

Здесь $\mathrm{g}_{\alpha\beta,k}(\mathbf{x})$ — плотность потока, соответствующая сохраняющейся величине $G_{\alpha\beta}$. Разделяя действительную и мнимую части этого уравнения, приходим к уравнениям

$$\dot{s}_\alpha(\mathbf{x}) = -\nabla_k j_{\alpha k}(\mathbf{x}), \quad \dot{q}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -\nabla_k q_{\alpha\beta,k}(\mathbf{x}).$$

В силу (2.5) и (3.4) получим соотношение $g_{\alpha\beta,k}(\mathbf{x}) = q_{\alpha\beta,k}(\mathbf{x}) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j_{\gamma k}(\mathbf{x})/2$, связывающее плотности потоков квадрупольной матрицы и спина с соответствующим потоком матрицы $\hat{g}$. Для плотности обменной энергии уравнение динамики имеет вид

$$\dot{e}(\mathbf{x}) = -\nabla_k q_k(\mathbf{x}),$$

$$q_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \,\{e(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}'), e(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}')\}. \tag{3.5}$$

Принимая во внимание формулы (2.3), (3.1), (3.3)–(3.5), вычислим плотности потоков аддитивных интегралов движения:

$$\hat{g}_k = i\left[\hat{g}, \frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k g}\right] = \hat{g}_k^{(0)}, \quad q_k = \mathrm{tr}\,\frac{\delta\hat{H}}{\delta g}\hat{g}_k \equiv q_k^{(0)}. \tag{3.6}$$

Эти формулы замыкают уравнения динамики для плотностей аддитивных интегралов движения и описывают неравновесные процессы в адиабатическом приближении: $\dot{\sigma} = 0$.

Рассмотрим релаксационные процессы в магнетиках со спином s = 1. Их учет приводит к возникновению в уравнениях динамики для плотностей аддитивных интегралов движения диссипативных слагаемых:

$$\dot{\zeta}_a = -\nabla_k(\zeta_{ak}^{(0)} + \zeta_{ak}^{(1)}) \equiv \dot{\zeta}_a^{(1)} + \dot{\zeta}_a^{(2)}. \tag{3.7}$$

Здесь первое слагаемое справа описывает адиабатические процессы в магнетике, а второе учитывает диссипативные процессы. Из термодинамического соотношения (3.1) и уравнения (3.7) следуют уравнения динамики для плотности энтропии:

$$\dot{\sigma} = -\nabla_k j_{\sigma k}^{(1)} + I, \tag{3.8}$$

где

$$j_{\sigma k}^{(1)} = Y_a\zeta_{ak}^{(1)}, \quad I = \zeta_{al}^{(1)}\nabla_l Y_a, \tag{3.9}$$

соответственно, плотность диссипативного потока и производство энтропии представлены в терминах диссипативных потоков аддитивных интегралов движения. Здесь $Y_a(\mathbf{x}) = \delta\Sigma/\delta\zeta_a(\mathbf{x})$ — термодинамические силы, ($T \equiv Y_0^{-1}$ — температура и $h_{\beta\alpha} \equiv -Y_{\beta\alpha}/Y_0 = \delta H/\delta g_{\alpha\beta}$ — эффективное поле), сопряженные аддитивным интегралам движения. Энтропия всей системы определяется равенством $\Sigma \equiv \int d^3x\sigma(\mathbf{x})$. Далее удобно выделить симметричную и антисимметричную части эффективного поля: $\hat{h} = \hat{h}^{(a)} + \hat{h}^{(s)}$, $h_{\alpha\beta}^{(a)} \equiv -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}h_\gamma = 2\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\mathbf{h})$, $h_{\alpha\beta}^{(s)} \equiv (h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha})/2$. Вектор $\mathbf{h}$ имеет физический смысл внутреннего магнитного поля. Требование положительности производства энтропии выполняется, если диссипативные потоки являются линейными функциями градиентов термодинамических сил:

$$\zeta_{al}^{(1)} = K_{al,bj}\nabla_j Y_b, \tag{3.10}$$

где обобщенные кинетические коэффициенты $K_{al,bj}$ удовлетворяют принципу симметрии Онзагера $K_{al,bj} = K_{bj,al}$. Поскольку матрицы $\hat{g}$ бесследные, то справедливы дополнительные соотношения $K_{\alpha\alpha l,bj} = 0$, $K_{al,\gamma\gamma j} = 0$. Введем в рассмотрение диссипативную функцию рассматриваемой магнитной среды и ее плотность

$$R \equiv \frac{1}{2}\int d^3x\nabla_l Y_a(\mathbf{x})K_{al,bj}(\mathbf{x})\nabla_j Y_b(\mathbf{x}) = \int d^3xr(\mathbf{x}). \tag{3.11}$$

Принимая во внимание формулы (3.7), (3.10), видим, что диссипативная функция связана с плотностями диссипативных потоков аддитивных интегралов движения равенством

$$\dot{\zeta}_a^{(2)} = -\nabla_k\zeta_{ak}^{(1)} = \frac{\delta R}{\delta Y_a}. \tag{3.12}$$

В обменном приближении тензорная структура обобщенных кинетических коэффициентов такова, что пространственные и спиновые индексы не перепутываются в виду отсутствия выделенных направлений в конфигурационном пространстве. Поэтому $K_{ak,bl} = \delta_{kl}K_{ab}$. Кроме того, используем принцип Кюри [26], согласно которому кинетические коэффициенты не равны нулю для потоков одинаковой тензорной размерности. Поэтому для диссипативных плотностей потоков аддитивных интегралов движения получим выражения

$$q_k^{(1)} = -\kappa\nabla_k T, \quad j_{\alpha k}^{(1)} = -\sigma_{\alpha\beta}\nabla_k h_\beta,$$

$$q_{\alpha\beta,k}^{(1)} = -\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}\nabla_k h_{\rho\gamma}^{(s)}. \tag{3.13}$$

Кинетические коэффициенты теплопроводности κ, спиновой $\sigma_{\alpha\beta}$ и квадрупольной диффузии $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}$ связаны с обобщенными кинетическими коэффициентами равенствами $K_{\alpha\beta} = T\sigma_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta,\gamma\rho} = T\sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}$, $K_{0,0} = T^2\kappa$ и удовлетворяют соотношениям симметрии: $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_{\gamma\rho,\alpha\beta}$. Кроме того, в силу симметрии и бесследности квадрупольной матрицы, выполняются равенства $\sigma_{\alpha\alpha,\gamma\rho} = \sigma_{\alpha\beta,\gamma\gamma} = 0$, $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_{\beta\alpha,\gamma\rho}$, $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}$. Используя (3.9), (3.13), представим диссипативный поток и производство энтропии в виде

$$j_{\sigma k}^{(1)} = -(\kappa\nabla_k T - h_\alpha\sigma_{\alpha\beta}\nabla_k h_\beta - h_{\alpha\beta}^{(s)}\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}\nabla_k h_{\gamma\rho}^{(s)})/T,$$

$$I = (\sqrt{\kappa}\nabla_k T/T)^2 + \nabla_k h_{\beta\alpha}^{(s)}(\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}/T)\times$$

$$\times\nabla_k h_{\rho\gamma}^{(s)} + \nabla_k h_\alpha(\sigma_{\alpha\beta}/T)\nabla_k h_\beta. \tag{3.14}$$

Дальнейший анализ и упрощение тензорной структуры кинетических коэффициентов связан с состоянием равновесия системы, вблизи которого происходят динамические процессы. Если в равновесии отсутствуют выделенные направления в спиновом пространстве, т.е. $g_{\alpha\beta}=0$ и $h_{\alpha\beta}=0$, тензорные кинетические коэффициенты приобретут вид

$$\sigma_{\alpha\beta}=\sigma\delta_{\alpha\beta},$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}=\sigma_1(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho}+\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma}-2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho}/3)/2\equiv\sigma_1 B^{(0)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}. \qquad (3.15)$$

Здесь σ,σ_1 — коэффициенты спиновой диффузии и диффузии квадрупольной матрицы, соответствующие изотропному магнитному состоянию. Отсюда получим диссипативные потоки магнитных степеней свободы

$$j^{(1)}_{\alpha k}=-\sigma\nabla_k h_\alpha, \quad q^{(1)}_{\alpha\beta,k}=-\sigma_1\nabla_k h^{(s)}_{\alpha\beta}. \qquad (3.16)$$

Из (3.14)–(3.16) следует выражение для производства энтропии

$$I=\kappa(\nabla_k T)^2/T+\sigma(\nabla_k h)^2/T+2\sigma_1(\nabla_k h^{(s)})^2/3T\geq 0,$$

где $h=|\mathbf{h}|$ и $h^{(s)}=(3tr\hat{h}^{(s)}/2)^{1/2}$. Положительность производства энтропии обеспечивается неравенствами $\kappa>0,\ \sigma>0,\ \sigma_1>0.$

Структура диссипативных потоков вблизи состояния $g_{\alpha\beta}\neq 0$ и $h_{\alpha\beta}=0$ соответствует ферромагнетикам и квадрупольным нематикам. Полагая для простоты, что анизотропия состояния равновесия одноосная, представим тензорную структуру кинетических коэффициентов в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_\perp\delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n})+\sigma_\parallel n_\alpha n_\beta,\ \delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n})\equiv\delta_{\alpha\beta}-n_\alpha n_\beta,$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}=\sigma_1 B^{(1)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}+\sigma_2 B^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}+\sigma_3 B^{(3)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}. \qquad (3.17)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — ось анизотропии в состоянии равновесия. Представление (3.17) будет однозначным, если для этих матриц потребовать свойство ортогональности

$$B^{(k)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}B^{(l)}_{\gamma\rho,\mu\nu}=\delta_{kl}B^{(k)}_{\alpha\beta,\mu\nu}. \qquad k,\,l=1,\,2,\,3.$$

Явный вид матриц $B^{(k)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}$ найден в работе [27]

$$B^{(1)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}=B^{(0)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}-B^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}-B^{(3)}_{\alpha\beta,\gamma\rho},$$

$$B^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}=3(n_\alpha n_\beta-\delta_{\alpha\beta}/3)(n_\gamma n_\rho-\delta_{\gamma\rho}/3)/2,$$

$$B^{(3)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}=(\delta_{\alpha\gamma}n_\rho n_\beta+\delta_{\alpha\rho}n_\gamma n_\beta+\delta_{\beta\gamma}n_\rho n_\alpha+$$
$$+\delta_{\beta\rho}n_\gamma n_\alpha-4n_\alpha n_\beta n_\rho n_\gamma)/2. \qquad (3.18)$$

Учитывая явный вид (3.13), (3.14), (3.17), (3.18), получим производство энтропии

$$I=\kappa(\nabla_k T)^2/T^2+2\sigma_2(\nabla_k h^{(s)})^2/3T+$$
$$+2\sigma_3(h^{(s)})^2(\nabla_k e_\alpha)^2/3T+\sigma_\parallel(\nabla_k h)^2/T+\sigma_\perp h^2(\nabla_k e_\alpha)^2/T,$$

где $\mathbf{e}$ — ось анизотропии в неравновесном состоянии, $\mathbf{e}^2=1$. Отсюда следует положительность кинетических коэффициентов $\sigma_2,\sigma_3,\sigma_\perp,\sigma_\parallel$. В случае перехода равновесного состояния с одноосной симметрией к изотропному состоянию внутреннее эффективное поле исчезает $h^{(s)}\to 0$, $h\to 0$ и для кинетических коэффициентов справедливы соотношения: $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$, $\sigma_\perp=\sigma_\parallel=\sigma.$ Формулы (3.13), (3.15), (3.17), (3.18) дают явный вид диссипативных потоков магнитных степеней свободы в нелинейном случае.

Получим линеаризованные уравнения динамики с учетом диссипативных процессов для квадрупольной матрицы и спина. Согласно (3.7), (3.13), имеем

$$\delta\dot{s}_\alpha=-\nabla_k\delta j^{(0)}_{\alpha k}+\sigma_{\alpha\beta}\Delta\delta h_\beta,$$

$$\delta\dot{q}_{\alpha\beta}=-\nabla_k\delta q^{(0)}_{\alpha\beta,k}+\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}\Delta\delta h^{(s)}_{\gamma\rho}. \qquad (3.19)$$

Чтобы найти связь вариаций эффективного поля с вариациями динамических величин и, тем самым, получить линеаризованные уравнения динамики в замкнутом виде, обратимся к модели обменной энергии, которую представим в виде суммы двух слагаемых: $e=e_0+e_n$. Первое из них — плотность однородной части обменной энергии. Эту величину как функцию двух величин возьмем в виде $e_0(s,q)=-Jg_2+Bg_2^2+Aq^2$. Здесь первые два слагаемых обладают SU(3) симметрией, а последнее слагаемое имеет SO(3) симметрию. Для простоты не рассматриваем влияние инварианта Казимира g_3. Неоднородную обменную энергию выберем в виде

$$e_n=\bar{J}\,\mathrm{tr}(\nabla_k\hat{g})^2, \qquad (3.20)$$

здесь $\bar{J}>0$ — постоянная неоднородного обмена. Равновесные значения модулей спина и квадрупольной матрицы, а также устойчивость магнитных состояний найдем из условий

$$\partial e_0/\partial s=0,\quad \partial e_0/\partial q=0,\quad \partial^2 e_0/\partial s^2>0,\quad \partial^2 e_0/\partial q^2>0,$$

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial s^2}\frac{\partial^2 e_0}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 e_0}{\partial s\partial q}\right)^2>0. \qquad (3.21)$$

Нами получены три решения системы уравнений (3.21).

1. Парамагнитное состояние $s_0=q_0=0$ устойчиво, если $J<0$ и $3A>2J$.

2. Ферромагнитное состояние $s_0^2=J/B>0$ и $q_0=0$ устойчиво, если $A>0,\ B>0,\ J>0$.

3. Одноосный спиновый нематик $s_0=0$ и $q_0^2=3(2J-3A)/8B>0$. Состояние существует и устойчиво, если $A<0,\ B>0,\ 2J>3A$. Найдем связь вариаций

эффективного поля с вариациями динамических величин. Для решения 1, используя явный вид плотности обменной энергии, получим $\delta h_\alpha = -n_\alpha J\delta s - \bar{J}\Delta\delta s_\alpha$ и $\delta h^{(s)}_{\alpha\beta} = (n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)[(3A-2J)\delta q - 2\bar{J}\Delta\delta q]$. Здесь введены обозначения вариаций модулей спина и квадрупольной матрицы $\delta s \equiv n_\alpha \delta s_\alpha$, $\delta q \equiv 3n_\alpha \delta q_{\alpha\beta} n_\beta/2$. В линейном приближении $e_\alpha = n_\alpha + \delta e_\alpha$, так что $n_\alpha \delta e_\alpha = 0$. Отсюда следуют линеаризованные уравнения динамики для модулей спина и квадрупольной матрицы:

$$\delta\dot{s} = -\sigma[J\Delta\delta s + \bar{J}\Delta\Delta\delta s],$$

$$\delta\dot{q} = \sigma_1[(3A-2J)\Delta\delta q - 2\bar{J}\Delta\Delta\delta q]. \qquad (3.22)$$

Из (3.22) получим спектры коллективных магнитных возбуждений с учетом затухания: $\omega_s = i\Gamma_s$, $\Gamma_s = \sigma(-Jk^2 + \bar{J}k^4)$ — коэффициент затухания спиновой волны; $\omega_q = i\Gamma_q$, $\Gamma_q = \sigma_1[(3A-2J)k^2 + 2\bar{J}k^4]$ — коэффициент затухания квадрупольной волны.

Поступая аналогично, приведем линеаризованные уравнения для вариаций динамических величин с учетом диссипации для решения 2:

$$\delta\dot{s}_\parallel = 2J\sigma_\parallel \Delta\delta s_\parallel - \bar{J}\sigma_\parallel \Delta\Delta\delta s_\parallel,$$

$$\delta\dot{s}_{\perp\alpha} = \bar{J}s_0 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \delta s_{\perp\gamma} - \bar{J}\sigma_\perp \Delta\Delta\delta s_{\perp\alpha},$$

$$\delta\dot{q}_{\alpha\beta} = \bar{J}[\Delta\delta\hat{q}, \hat{\varepsilon}_0]_{\alpha\beta} + \sigma_2(3A\Delta\delta q_{\alpha\beta} - 2\bar{J}\Delta\Delta\delta q_{\alpha\beta}).$$

Здесь продольные и поперечные составляющие вариаций спина заданы соотношениями $\delta s_\parallel \equiv n_\alpha \delta s_\alpha$, $\delta s_{\perp\alpha} \equiv \delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n})\delta s_\beta$, $(\hat{\varepsilon}_0)_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_0 n_\gamma/2$. Отсюда приходим к спектрам $\omega(k) = \bar{J}s_0 k^2/2$, $\omega(k) = \bar{J}s_0 k^2$. Найдем коэффициенты затухания для продольной $\Gamma_{s_\parallel} = 2\sigma_\parallel Jk^2 + \bar{J}\sigma_\parallel k^4$ и поперечной $\Gamma_{s_\perp} = \bar{J}\sigma_\perp k^4$ компонент спина, а также для модуля квадрупольной матрицы $\Gamma_q = \sigma_2(3Ak^2 + 2\bar{J}k^4)$.

Нетрудно показать, что диссипативные слагаемые в линеаризованных уравнениях динамики, соответствующих решению 3, имеют вид

$$\delta\dot{s}^{(2)}_\parallel = -3A\sigma_\parallel \Delta\delta s_\parallel/2 - \bar{J}\sigma_\parallel \Delta\Delta\delta s_\parallel,\ \delta\dot{s}^{(2)}_{\perp\alpha} = -\bar{J}\sigma_\perp \Delta\Delta\delta s^\perp_\alpha,$$

$$\delta\dot{q}^{(2)} = \sigma_2[16Bq_0^2\Delta\delta q/3 - 2\bar{J}\Delta\Delta\delta q],\ \delta\dot{e}^{(2)}_\lambda = -\bar{J}\sigma_3 \Delta\Delta\delta e_\lambda.$$

Здесь равенство $\delta e_\lambda \equiv \delta^\perp_{\lambda\beta}(\mathbf{n})\delta q_{\beta\gamma} n_\gamma/q$ дает связь вариаций оси анизотропии и квадрупольной матрицы. Отсюда получим коэффициенты затухания в спектрах коллективных возбуждений: для продольной и поперечной составляющих спинового момента $\Gamma_{s_\parallel} = -3A\sigma_\parallel k^2/2 + \bar{J}\sigma_\parallel k^4$, $\Gamma_{s_\perp} = \bar{J}\sigma_\perp k^4$. Для оси анизотропии и модуля квадрупольной матрицы коэффициенты затухания равны $\Gamma_q = \sigma_2[16Bq_0^2 k^2/3 + 2\bar{J}k^4]$, и $\Gamma_{\mathbf{e}} = \bar{J}\sigma_3 k^4$. Эти коэффициенты затухания согласуются с результатами работы [18], в которой использован другой модельный вид обменной энергии.

4. Релаксационные процессы и спектры магнитных возбуждений. Случай 5

Состояние равновесия в этом случае спонтанно нарушено по отношению к SO(3) симметрии T-четным параметром порядка — симметричным бесследным тензором $\hat{m}$. Гамильтониан является функцией плотности энтропии, спина, матрицы $\hat{m}$ и их градиентов: $e = e(\sigma, \mathbf{s}, \nabla\mathbf{s}, \hat{m}, \nabla\hat{m})$. Основное термодинамическое соотношение имеет вид

$$de = \frac{\partial e}{\partial\sigma}d\sigma + \frac{\partial e}{\partial s_\alpha}ds_\alpha + \frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\alpha}d\nabla_k s_\alpha + $$

$$+ \operatorname{tr}\frac{\partial\hat{e}}{\partial m}d\hat{m} + \operatorname{tr}\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k m}d\nabla_k\hat{m}. \qquad (4.1)$$

Используя формулы (2.6), (2.9), получим уравнения динамики

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(h_\beta s_\gamma + \frac{\delta H}{\delta m_{\beta\lambda}}m_{\gamma\lambda}\right),$$

$$\dot{m}_{\beta\gamma} = -h_\alpha(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\rho\gamma}).$$

Далее, принимая во внимание свойство SO(3) симметрии (3.3) $\{S_\alpha, e(\mathbf{x})\} = 0$ и полагая малыми пространственные градиенты магнитных степеней свободы, получим уравнения для плотностей аддитивных интегралов движения и матрицы параметра порядка

$$\dot{e} = -\nabla_k q^{(0)}_k, \quad \dot{m}_{\beta\gamma} = -(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma}m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta}m_{\rho\gamma})h^{(0)}_\alpha,$$

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\beta}s_\gamma + 2\frac{\partial e}{\partial\nabla_k m_{\beta\lambda}}m_{\gamma\lambda}\right) \equiv -\nabla_k j^{(0)}_{\alpha k}. \qquad (4.2)$$

Учитывая (4.2), (3.5), находим связь плотностей потоков спина и энергии: $q^{(0)}_k = h^{(0)}_\alpha j^{(0)}_{\alpha k}$, где $h^{(0)}_\alpha = \partial e/\partial s_\alpha$. Для плотности энтропии справедливо уравнение $\dot{\sigma} = 0$, которое следует из термодинамического соотношения (4.1) и уравнений (4.2).

Учтем диссипативные процессы в рассматриваемых магнетиках. Уравнения динамики для плотностей аддитивных интегралов движения и матрицы $m_{\beta\gamma}$ имеют вид

$$\dot{e} = -\nabla_k(q^{(0)}_k + q^{(1)}_k), \quad \dot{s}_\alpha = -\nabla_k(j^{(0)}_{\alpha k} + j^{(1)}_{\alpha k}),$$

$$\dot{m}_{\beta\gamma} = \dot{m}^{(0)}_{\beta\gamma} + \dot{m}^{(1)}_{\beta\gamma} + \ldots, \ \dot{m}^{(1)}_{\beta\gamma} = -(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma}m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta}m_{\rho\gamma})h^{(1)}_\alpha. \qquad (4.3)$$

Следствием уравнений (3.7), (4.3) и термодинамического соотношения (4.1) будет уравнение для плотности энтропии (3.8), где плотность диссипативного потока и производство энтропии

$$j^{(1)}_{\sigma k} = Y_a \zeta^{(1)}_{ak} - \frac{\partial \sigma}{\partial \nabla_k m_{\beta\gamma}} \dot{m}^{(1)}_{\beta\gamma}, \quad I = \zeta^{(1)}_{ak} \nabla_k Y_a + \Gamma_\alpha h^{(1)}_\alpha ,$$

представлены в терминах диссипативных потоков аддитивных интегралов движения. Вектор Γ_α определяется равенством

$$\Gamma_\alpha = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} m_{\beta\lambda} \frac{\delta \Sigma}{\delta m_{\gamma\lambda}} . \qquad (4.4)$$

Диссипативные потоки ζ^1_{al} и η^1_α линейны по градиентам термодинамических сил и величинам Γ_α :

$$\zeta^{(1)}_{al} = K_{al,bj} \nabla_j Y_b + K_{al,\alpha} \Gamma_\alpha, \quad h^{(1)}_\alpha = K_{\alpha,bj} \nabla_j Y_b + \underline{K}_{\alpha,\beta} \Gamma_\beta .$$

Кинетические коэффициенты удовлетворяют принципу симметрии Онзагера

$$K_{al,bj} = K_{bj,al}, \quad K_{\alpha,bl} = K_{bl,\alpha}, \quad \underline{K}_{\alpha\beta} = \underline{K}_{\beta\alpha}$$

и формируют положительно определенную квадратичную форму производства энтропии. Диссипативная функция и ее плотность определяются равенствами

$$R \equiv \int d^3 x r(\mathbf{x}), \qquad r = \Gamma_\mu K_{\mu\nu} \Gamma_\nu / 2.$$

Здесь $\Gamma_\mu \equiv (\nabla_k Y_a, \Gamma_\alpha)$, $\mu \equiv ak; \alpha$. В терминах диссипативной функции релаксационные слагаемые в уравнении движения параметров сокращенного описания ζ_a и $\hat{m}$ (4.3) приобретут универсальный вид:

$$\dot{\zeta}^{(2)}_a = \frac{\delta R}{\delta \left(\dfrac{\delta \Sigma}{\delta \zeta_a} \right)}, \quad \dot{m}^{(1)}_{\beta\gamma} = \frac{\delta R}{\delta \left(\dfrac{\delta \Sigma}{\delta m} \right)_{\beta\gamma}} .$$

Используя принцип Кюри и предполагая, что состояние равновесия изучаемого магнетика однородное, имеем $K_{ak,bl} = \delta_{kl} K_{ab}$ и $K_{ak,\alpha} = 0$. Значения плотности спина и матрицы $\hat{m}$ в этом состоянии — постоянные величины. Из (4.2), (4.3) следует уравнение для структуры этой матрицы и спина в точке стационара $(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma} m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta} m_{\rho\gamma}) \partial e / \partial s_\alpha = 0$. Далее рассмотрим только такие решения, для которых $h_\alpha = 0$, $\hat{m}$ — const. Определим кинетические коэффициенты теплопроводности κ, спиновой диффузии $\sigma_{\alpha\beta}$ и спиновой вязкости $c_{\alpha\beta}$ в терминах обобщенных кинетических коэффициентов $\underline{K}_{\alpha\beta} = T c_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta} = T \sigma_{\alpha\beta}$, $K_{0,0} = T^2 \kappa$. Производство энтропии записывается в виде

$$I = (\sqrt{\kappa} \nabla_k T / T)^2 + \nabla_k h_\alpha (\sigma_{\alpha\beta} / T) \nabla_k h_\beta + \Gamma_\alpha (c_{\alpha\beta} / T) \Gamma_\beta .$$

Заметим, что релаксация параметра порядка в силу нелинейной связи (4.4) существенна только вблизи состояния равновесия, где $\hat{m} \neq 0$. Рассмотрим случай, при котором магнетик в равновесии обладает одноосной симметрией. Тензорная структура кинетических коэффициентов $\sigma_{\alpha\beta}$ и $c_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$c_{\alpha\beta} \equiv c_{\|} n_\alpha n_\beta + c_\perp \delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n}), \; \sigma_{\alpha\beta} \equiv \sigma_{\|} n_\alpha n_\beta + \sigma_\perp \delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n}). \qquad (4.5)$$

Для изотропного состояния равновесия $c = c_{\|} = c_\perp$ и $\sigma = \sigma_{\|} = \sigma_\perp$. Линеаризованные уравнения диссипативной динамики в соответствии с (4.2), (4.3) имеют вид

$$\delta \dot{e} = -\nabla_k \delta q^{(0)}_k + \kappa \Delta \delta T, \quad \delta \dot{s}_\alpha = -\nabla_k \delta j^{(0)}_{\alpha k} + \sigma_{\alpha\beta} \Delta \delta h_\beta ,$$

$$\delta \dot{m}_{\alpha\beta} = -(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma} m^{(0)}_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta} m^{(0)}_{\rho\gamma}) (\delta h^{(0)}_\alpha + T c_{\alpha\sigma} \delta \Gamma_\sigma). \qquad (4.6)$$

Для их анализа необходимо найти связь вариаций спина и матричного параметра порядка с эффективным полем. Обратимся к модели обменной энергии, представляющей функцию инварианта Казимира скобки Пуассона (2.6) и инвариантов Казимира расширенного набора скобок Пуассона величин s и $\hat{m}$. В случае одноосной симметрии состояния равновесия инварианты m_2 и m_3 связаны соотношением $m_3^2 = m_2^3/6$, так что в качестве независимой величины выбрана $m_2 \equiv m$. Модель обменной энергии строим таким образом, чтобы ее однородные слагаемые имели определенный знак, а неоднородная ее часть была положительна:

$$e_o(s,m) = -\frac{1}{2} A s^2 - \frac{1}{2} C m^2 + \frac{1}{4} B s^4 + \frac{1}{4} D m^4 + \frac{1}{2} E s^2 m^2 ,$$

$$e_n \; \nabla \mathbf{s}, \nabla \hat{m} \; = \bar{\bar{J}} \mathrm{tr}(\nabla_k \hat{m})^2 / 2 + \bar{J} \; \nabla_k s_\alpha \; ^2 / 2 .$$

Условия на равновесные значения спина и модуля параметра порядка аналогичны (3.21). Для представленного вида энергии возможны такие состояния равновесия.

1. Устойчиво состояние $s_0 = 0$, $m_0 = 0$, если: $A < 0$, $C < 0$. Реактивная составляющая спектров отсутствует. Коэффициент затухания спиновой волны равен $\Gamma_s = \sigma(-Ak^2 + \bar{J} k^4)$.

2. Решение $s_0^2 = A/B$, $m_0 = 0$ устойчиво, если: $B > 0$, $AE > CB$, $A > 0$. Спектр магнитных возбуждений имеет вид $\omega = C s_0 k^2$. Приведем коэффициенты затухания для продольной составляющей спина $\Gamma_{s_\|} = \sigma_{\|}(2Ak^2 + \bar{J} k^4)$ и поперечной компоненты спина $\Gamma_{s_\perp} = \sigma \bar{J} k^4$.

3. Состояние $s_0 = 0$, $m_0^2 = 3C/2D$ устойчиво, если: $D > 0$, $C > 0$, $CE > AD$. Спектр квадрупольной волны имеет вид $\omega = k \sqrt{6 \bar{\bar{J}} C (EC - DA + D \bar{\bar{J}} k^2)} / D$. Затухание продольной части спиновой волны $\Gamma_{s_\|} = \sigma_{\|} [(\bar{J} B - A \bar{\bar{J}}) k^2 / \bar{\bar{J}} + E k^4]$. Используя формулы (4.4)–(4.6), нетрудно найти декремент затухания для спектра квадрупольной волны, соответствующего оси анизотропии: $\Gamma_{\mathbf{e}} = 2 m_0 c_\perp \bar{\bar{J}} k^4$.

Проведенный анализ симметрии магнитных состояний показывает, что наряду с двумя типами нормальных состояний, обладающих симметрией SO(3) или SU(3) в состоянии равновесия, возможны также три типа вырожденных состояний равновесия. Два из них имеют Т-нечетный тип упорядочения с нарушением SO(3) симметрии (одноосное и двухосное с векторным параметром порядка) и одно Т-четное нарушение SO(3) симметрии с квадрупольным параметром порядка. На сегодняшний момент отсутствуют экспериментальные подтверждения SU(3) симметрии состояния равновесия в спин-1 магнетиках. В этой работе показана возможность проявления квадрупольной степени свободы в состоянии Т-четного нарушения SO(3) симметрии магнетиков, для которого получены спектры коллективных возбуждений с учетом затухания.

1. M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen, and U. Sen, *Adv. Phys.* **56**, 243 (2007).
2. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys*. **80**, 885 (2008).
3. Ming-Shien Chang, Qishu Qin, Wenxian Zhang, Li You, and Michael S. Chapman, *Nature Phys*. **1**, 111 (2005).
4. R. Barnett, A. Turner, and E. Demler, *arXiv:cond-mat/0607253v4 [cond-mat.str-el]* **7** Nov (2006).
5. T. Matsumura, S. Nakamura, T. Goto, H. Shida, and T. Suzuki, *Physica B* **223** 385 (1996).
6. D. Hall, Z. Fisk, and R. Goodrich, *Phys. Rev. B* **62**, 84 (2000).
7. S. Demishev, A. Semeno, A. Bogach, Y Paderno, N. Shitsevalova, and N. Sluchanko, *Physica B* **378**, 602 (2006).
8. M. Nauciel-Bloch, G. Sarma, and A. Castets, *Phys. Rev. B* **5**, 4603 (1972).
9. N. Papanicolaou, *Nuclear Phys. B* **305**, 367 (1988).
10. G. Fath and J. Solyom, *Phys. Rev. B* **51**, 3620 (1995).
11. A.F. Andreev and I.A. Grishchuck, *Sov. Phys. JETP* **60**, 267 (1984).
12. V.M. Loktev and V.S. Ostrovsky, *Fiz. Nizk. Temp.* **20**, 983 (1994) [*Low Temp. Phys* **20**, 775 (1994)].
13. B.A. Ivanov and A.K. Kolezhuk, *Phys. Rev. B* **68**, 052401 (2003).
14. Kh.Kh. Muminov, *ArXiv: 1206.1415v2 [cond-mat] 8 June* (2012).
15. J. Bernatska and P. Holod, *J. Phys. A* **42**, 075401 (2009).
16. M.Y. Kovalevsky and Tran Quang Vuong, *Phys. Lett. A* **374**, 3676 (2010).
17. M.Y. Kovalevsky, *Theor. Math. Phys*. **168**, 245 (2011).
18. V.G. Bar'yakhtar, V.I. Butrim, A.K. Kolezhuk, and B.A. Ivanov, *Phys. Rev. B* **87** 224407 (2013).
19. D. Vollhardt and P. Wolfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, F. Taylor (ed.), London–New York–Philadelphia (1990).
20. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
21. Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
22. F. Zhou and M. Snoek, *arXiv:cond-mat/0306697v2 [cond-mat.supr.-con]* 3 Sep (2003).
23. Л.И. Лапидус, *ЭЧАЯ* **15**, 493 (1984).
24. L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Phys. Z. Sov*. **8**, 155 (1935).
25. А.И. Ахиезер, В.В. Красильников, С.В. Пелетминский, А.А. Яценко, *УФН* **163**, 1 (1993).
26. С. Де Грот, П. Мазур, *Неравновесная термодинамика*, Мир, Москва (1964).
27. Р.Л. Стратанович, *ЖЭТФ* **70**, 1290 (1976).

Symmetry and relaxation dynamics of spin $s = 1$ magnets

M.Y. Kovalevsky and A.V. Glushchenko

The paper concerns pure and mixed quantum states of spin $s = 1$ magnets, for which a polarization density matrix has been introduced. The uniaxial and biaxial quadrupole magnetic orderings, corresponding to pure states, are found out and degrees of polarization are calculated. The types of normal and degenerate magnetic states associated with subalgebras of the Poisson brackets of magnetic degrees of freedom are found out. The spectra of collective magnetic excitations are calculated with taking into account the relaxation for normal and degenerate states.

PACS **75.10.–b** General theory and models of magnetic ordering.

Keywords: spin, polarization matrix, symmetry, dynamics, relaxation, spectra.