

О возможности одновременного спирального и сверхтекучего упорядочения в ферми-жидкости

С.В. Пелетминский, А.А. Яценко, С.Н. Шульга

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: spelet@kipt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 28 июля 2003 г., после переработки 10 ноября 2003 г.

Исследован один из возможных видов упорядочения ферми-систем — сверхтекучее спиральное упорядочение, когда помимо фазовой инвариантности состояния нарушена трансляционная инвариантность и инвариантность по отношению к поворотам спинов. Сформулирован общий метод изучения сверхтекучего спирального упорядочения на основе фермижидкостного подхода к описанию сверхтекучих состояний. Для однокомпонентной ферми-системы получены уравнения самосогласования для четырех параметров порядка и температуры одновременного фазового перехода в сверхтекучее и спиральное состояния. Система уравнений исследована в случае, когда отличны от нуля два параметра порядка. Аналитически и численно получены зависимости температуры перехода и энергетической щели в спектре элементарных фермионных возбуждений от параметра спирали. Определена область значений параметра спирали, в которой спиральное сверхтекучее упорядочение может существовать. Исследована корреляционная функция спинов при спиральном упорядочении.

Досліджено один з можливих видів упорядкування фермі-систем — надплинне спіральне впорядкування, коли поряд з фазовою інваріантністю стану порушено трансляційну інваріантність та інваріантність відносно до обертань спінів. Сформульовано загальний метод дослідження надплинного спірального впорядкування на основі фермірідинного підходу до опису надплинних станів. Для однокомпонентної фермі-системи отримано рівняння самоузгодження для чотирьох параметрів порядку та температури одночасного фазового переходу до надплинного та спірального станів. Систему рівнянь досліджено у випадку, коли відмінними від нуля є два параметри порядку. Аналітично та чисельно отримані залежності температури переходу та енергетичної щілини в спектрі елементарних ферміонних збуджень від параметра спирали. Знайдено область значень параметра спирали, в якій спіральне надплинне впорядкування може існувати. Досліджено кореляційну функцію спінів при спіральному впорядкуванні.

PACS: 74.20–z, 74.20.De, 74.25.Na

1. Введение

В данной работе исследуется сверхтекучее спирально упорядоченное состояние ферми-жидкости.

Для исследования состояния статистического равновесия сверхтекучей жидкости со спиральным упорядочением спинов использован фермижидкостной подход в теории сверхтекучести. Это означает, что функционал энергии ферми-жидкости инвариантен относительно произвольных пространственных трансляций и произвольных спиновых вращений. Однако состояние статистического равновесия ферми-жидкости инвариантно только по отношению

к одновременному смещению на произвольный вектор \mathbf{a} и повороту спинов на угол $2\mathbf{a}\mathbf{q}$ ($2\mathbf{q}$ — вектор спирали).

Возможность магнитного упорядочения рассматривалась, например, в работе [1], где впервые изучался вопрос о сосуществовании ферромагнитного и сверхпроводящего состояний вследствие обмена электронов магноном, а не фононом, как в теории БКШ. Этот обмен также может приводить к притяжению между электронами.

Сверхтекучее спиральное упорядочение рассматривалось во многих работах. Например, в [2] при

исследовании сосуществования сверхтекучего и магнитного упорядочений показано, что в магнитном сверхпроводнике может образовываться сверхпроводящая фаза со спиральным упорядочением магнитных моментов. В обзоре [3] исследован вопрос о сосуществовании сверхпроводимости и антиферромагнетизма, или влияния антиферромагнитного упорядочения локализованных спинов на сверхпроводящее состояние. В работе [4] исследовано спиновое спиральное упорядочение в магнитных сверхпроводниках, вызванное взаимодействием между фотонным полем, постоянным током и локализованным спиновым моментом. Получено выражение для спиновой восприимчивости такой системы и изучены динамические свойства, обусловленные спиновым спиральным упорядочением. В обзоре [5] показано, что в высокотемпературных сверхпроводниках температура перехода в магнитное сверхтекучее состояние значительно ниже температуры перехода из нормального в сверхпроводящее состояние.

В отличие от отмеченных и многих других работ, описанный в настоящей статье фазовый переход в сверхтекучее состояние возникает одновременно со спиральным упорядочением спинов.

Фермижидкостной подход в теории сверхтекучести основан на введении неравновесного статистического оператора идеального газа квазичастиц и построении на его основе неравновесной энтропии.

Для изучения кинетики и равновесного состояния сверхтекучей ферми-жидкости необходимо введение функционала энергии, являющегося функционалом нормальной f и аномальной g матричных функций распределения. Этот функционал энергии в полуфеноменологической теории заменяет гамильтониан системы в последовательной микроскопической теории.

Выражение для энтропии системы вместе с функционалом энергии системы позволяет, исходя из вариационного принципа, найти нормальные f и аномальные g функции распределения в состоянии статистического равновесия.

Спирально упорядоченное состояние статистического равновесия пространственно неоднородно.

Важным моментом является возможность перейти в результате некоторого унитарного преобразования от пространственно неоднородного состояния к эффективно пространственно однородному состоянию, что существенно упрощает рассмотрение спирального упорядочения сверхтекучей жидкости.

В работе сформулированы общие уравнения, определяющие параметр порядка $\Delta = (\Delta_0 + \bar{\Delta}\vec{\sigma})\sigma_2$. При этом решение задачи сводится к нахождению корней бикубического уравнения с последующими

достаточно громоздкими выкладками. Поэтому мы ограничились рассмотрением частного случая $\Delta_0 + \Delta_3\sigma_3 = 0$.

Получены аналитические выражения и проведены численные расчеты параметра порядка $\Delta_2 \pm i\Delta_1$ и температуры перехода как функции вектора спирали \mathbf{q} . Численно найдена трехмерная поверхность, описывающая зависимость вектора спирали от температуры и параметра порядка.

Показано, что в рассмотренном состоянии среднее значение спина отлично от нуля и не зависит от координат, а корреляционная функция спинов $\langle \hat{\sigma}_m(\mathbf{x})\hat{\sigma}_n(\mathbf{y}) \rangle$ периодична по переменной $(\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$ и затухает по переменной $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

2. Основные уравнения ферми-жидкости со спиральным упорядочением

Состояние сверхтекучей ферми-жидкости характеризуется нормальной $f_{\mathbf{kk}'}$ и аномальной $g_{\mathbf{kk}'}$ функциями распределения

$$f_{\mathbf{kk}'} = \text{Sp } \rho a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}, \quad g_{\mathbf{kk}'} = \text{Sp } \rho a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}, \quad (1)$$

где ρ — статистический оператор сверхтекучей ферми-жидкости, $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $a_{\mathbf{k}}$ — операторы рождения и уничтожения частиц в состоянии \mathbf{k} ($\mathbf{k} \equiv \mathbf{p}, \alpha$; \mathbf{p} — импульс частицы, α — проекция спина частицы). Энергия сверхтекучей ферми-жидкости задается функционалом нормальной и аномальной функций распределения f и g :

$$E = E(f, g). \quad (2)$$

В состоянии статистического равновесия нормальная и аномальная функции распределения определяются из условия максимума энтропии S при фиксированных энергии системы E и полном числе частиц N (импульс системы предполагаем равным нулю). При решении этой вариационной задачи удобно ввести блочную матрицу плотности (суперматрицу)

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f & g \\ g^\dagger & 1 - f \end{pmatrix} \quad (3)$$

(элементы этой матрицы выражаются через одночастичные функции распределения $f_{\mathbf{kk}'}$ и $g_{\mathbf{kk}'}$).

Тогда равновесная одночастичная матрица плотности \hat{f} находится из нелинейного интегрального уравнения [6]:

$$\hat{f} = \{\exp \beta [\hat{\epsilon}(\hat{f}) - \hat{\mu}] + 1\}^{-1}, \quad (4)$$

здесь

$$\hat{\varepsilon}(\hat{f}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ \Delta^\dagger & -\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\kappa\kappa'} = \frac{\partial E}{\partial f_{\kappa'\kappa}}, \quad \Delta_{\kappa\kappa'} = 2 \frac{\partial E}{\partial g_{\kappa'\kappa}^\dagger}, \quad (6)$$

где μ – химический потенциал, $\beta = 1/T$ – обратная температура и $g^\dagger = (g_{\kappa\kappa'})^*$. Заметим, что матрица f эрмитова: $f_{\kappa\kappa'}^\dagger = f_{\kappa'\kappa}$, а матрица g в силу ферми-статистики антисимметрична: $g_{\kappa\kappa'} = -g_{\kappa'\kappa}$.

Предположим, что функционал энергии $E(f, g)$ инвариантен относительно пространственных трансляций и спиновых поворотов и имеет следующую структуру:

$$E(f, g) = E_0(f) + E_f(f) + E_g(g), \quad (7)$$

где

$$E_0(f) = \frac{1}{V} \sum_{\kappa, \kappa'} \varepsilon_{\kappa\kappa'}^0 f_{\kappa'\kappa}, \quad (8)$$

и взаимодействие между частицами определяется квадратичными по нормальной и аномальной функциям распределения функционалами:

$$E_f(f) = \frac{1}{2V} \sum_{\kappa_1 \dots \kappa_4} v(\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4) (f_{\kappa_3 \kappa_1} f_{\kappa_4 \kappa_2} - f_{\kappa_3 \kappa_2} f_{\kappa_4 \kappa_1}), \quad (9)$$

$$E_g(g) = \frac{1}{2V} \sum_{\kappa_1 \dots \kappa_4} v(\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4) g_{\kappa_2 \kappa_1}^\dagger g_{\kappa_3 \kappa_4} \quad (10)$$

(приближение Хартри–Фока), где

$$v(\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4) = v_0(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4) \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \delta_{\alpha_2 \alpha_4} + v_1(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4) \bar{\sigma}_{\alpha_1 \alpha_3} \bar{\sigma}_{\alpha_2 \alpha_4}. \quad (11)$$

Предполагаем [7], что амплитуды взаимодействия v_0 и v_1 , содержащие символ Кронекера $\delta_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, -\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4}$, не зависят от суммарного импульса $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. Тогда v_0 и v_1 можно записать в виде

$$v_0(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4) = v_0(\mathbf{k}, -\mathbf{k}; \mathbf{k}', -\mathbf{k}') \equiv v_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}'),$$

$$v_1(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4) = v_1(\mathbf{k}, -\mathbf{k}; \mathbf{k}', -\mathbf{k}') \equiv v_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$$

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4), \quad (12)$$

где $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}$, $\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4}{2}$.

Из эрмитовости гамильтониана следует, что $v_{0,1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = v_{0,1}^*(\mathbf{k}', \mathbf{k})$.

Кроме того, полагаем, что кинетическая энергия свободных квазичастиц имеет вид

$$\varepsilon_{\kappa_1 \kappa_2}^0 = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} \delta_{\kappa_1 \kappa_2}. \quad (13)$$

Из формул (6), (9) и (10) следует, что матрицы $\varepsilon_{\kappa\kappa'}$ и $\Delta_{\kappa\kappa'}$ связаны с нормальной f и аномальной g функциями распределения соотношениями

$$\varepsilon_{\kappa_1 \kappa_2} = \frac{1}{2V} \sum_{\kappa_3, \kappa_4} [v(\kappa_4 \kappa_1 \kappa_3 \kappa_2) + v(\kappa_1 \kappa_4 \kappa_2 \kappa_3) - v(\kappa_1 \kappa_4 \kappa_3 \kappa_2) - v(\kappa_4 \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3)] f_{\kappa_3 \kappa_4}, \quad (14)$$

$$\Delta_{\kappa_1 \kappa_2} = \frac{1}{V} \sum_{\kappa_3, \kappa_4} v(\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4) g_{\kappa_3 \kappa_4}. \quad (15)$$

Соотношение (15) устанавливает связь между параметром порядка Δ , амплитудами взаимодействия v и аномальной функцией распределения g .

Нами предложена модель описания спирального упорядочения по спинам сверхтекучей ферми-жидкости. Спиральное упорядочение означает, что состояние системы инвариантно относительно произвольного смещения на вектор \mathbf{a} и одновременного поворота спинов вокруг оси z на угол $2\mathbf{a}\mathbf{q}$. Это означает, что матрица плотности \hat{f} удовлетворяет соотношению симметрии

$$\hat{V} \hat{f} \hat{V}^\dagger = \hat{f}, \quad [f, \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{q} \hat{\sigma}_3] = 0, \quad (16)$$

где \hat{V} – унитарный оператор

$$\hat{V} = \exp i\mathbf{a}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{q} \hat{\sigma}_3). \quad (17)$$

Здесь

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} & 0 \\ 0 & -\tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix},$$

σ_3 – матрица Паули, $\hat{\mathbf{p}}$ – обобщенный на сверхтекучую ферми-жидкость оператор импульса ферми-частиц [6].

Такие состояния сверхтекучей ферми-жидкости аналогичны спиральному упорядочению магнетиков и существуют благодаря спиновой и трансляционной инвариантности функционала энергии и, возможно, реализуются в какой-либо фазе сверхтекучего ${}^3\text{He}$ [8].

Из формул (3), (16) следует, что унитарное преобразование

$$\hat{U} = \exp i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}\hat{\sigma}_3, \quad (18)$$

где $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & 0 \\ 0 & -\tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$, переводит состояние \hat{f} в состояние

$$\hat{f}_{\mathbf{q}} = \hat{U} \hat{f} \hat{U}^\dagger, \quad (19)$$

которое является пространственно однородным, т.е.

$$[\hat{f}_{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}] = 0, \quad (20)$$

и одновременно сохраняет структуру суперматрицы \hat{f} :

$$\hat{f}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} f_{\mathbf{q}} & g_{\mathbf{q}} \\ g_{\mathbf{q}}^{\dagger} & 1 - \widetilde{f}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Нормальная и аномальная пространственно однородные функции распределения $f_{\mathbf{q}}$ и $g_{\mathbf{q}}$, определяющие суперматрицу $\hat{f}_{\mathbf{q}}$, связаны с f и g следующими соотношениями:

$$f_{\mathbf{q}} = e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}\sigma_3} f e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}\sigma_3}, \quad g_{\mathbf{q}} = e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}\sigma_3} g e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}\sigma_3}. \quad (22)$$

Однородные функции распределения $f_{\mathbf{q}}$, $g_{\mathbf{q}}$, или суперматрица $\hat{f}_{\mathbf{q}}$, удовлетворяют уравнению самосогласования, вытекающему из (4):

$$\hat{f}_{\mathbf{q}} = \{\exp \beta [\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}(f_{\mathbf{q}}, g_{\mathbf{q}}) - \hat{\mu}] + 1\}^{-1}, \quad (23)$$

где $\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}} = \hat{U} \hat{\varepsilon} \hat{U} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{q}} & \Delta_{\mathbf{q}} \\ \Delta_{\mathbf{q}}^{\dagger} & -\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$.

Для нахождения решений этого нелинейного уравнения самосогласования для пространственно однородной матрицы $f_{\mathbf{q}}$ может быть применена теория, развитая в [6].

3. Спиральное сверхтекучее состояние в однородном представлении

Из формул (22) следует, что нормальная и аномальная функции распределения f и g связаны с пространственно однородными функциями распределения $f_{\mathbf{q}\kappa\kappa'} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ и $g_{\mathbf{q}\kappa\kappa'} = g_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{p}, -\mathbf{p}'}$ формулами

$$f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} P_{\alpha} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{p} - \alpha\mathbf{q}) P_{\beta} \delta_{\mathbf{p} - \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' - \beta\mathbf{q}}, \quad (24)$$

$$g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} P_{\alpha} g_{\mathbf{q}}(\mathbf{p} - \alpha\mathbf{q}) P_{\beta} \delta_{\mathbf{p} - \alpha\mathbf{q}, -\mathbf{p}' + \beta\mathbf{q}}. \quad (25)$$

В этих соотношениях матрицы $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$, $g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$, $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$ и $g_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$ действуют только в спиновом пространстве. Аналогичные формулы справедливы и для $\varepsilon_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ и $\Delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$. При получении этих формул использовано соотношение

$$\langle \mathbf{p} | e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}\sigma_3} | \mathbf{p}' \rangle = \sum_{\alpha = \pm 1} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}' + \alpha\mathbf{q}} P_{\alpha},$$

где $P_{\alpha} = \frac{1 + \alpha\sigma_3}{2}$, $\alpha = \pm 1$ – оператор проектирования на состояние с проекцией спина $\alpha/2$.

Справедливы и обратные формулы, выражающие $f_{\mathbf{q}}$, $g_{\mathbf{q}}$, через f , g :

$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} = \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} P_{\alpha} f(\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' + \beta\mathbf{q}) P_{\beta}, \quad (26)$$

$$g_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \delta_{\mathbf{p}, -\mathbf{p}'} = \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} P_{\alpha} g(\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' + \beta\mathbf{q}) P_{\beta}, \quad (27)$$

а также аналогичные соотношения, связывающие $\varepsilon_{\mathbf{q}}$ и $\Delta_{\mathbf{q}}$ с ε и Δ :

$$\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} = \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} P_{\alpha} \varepsilon(\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' + \beta\mathbf{q}) P_{\beta}, \quad (28)$$

$$\Delta_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \delta_{\mathbf{p}, -\mathbf{p}'} = \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} P_{\alpha} \Delta(\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' + \beta\mathbf{q}) P_{\beta}. \quad (29)$$

Матрицу $g_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = (g_0(\mathbf{p}) + \vec{g}(\mathbf{p})\vec{\sigma})\sigma_2$ удобно выразить через диагональные матрицы $g_{\parallel}(\mathbf{p})$ и $g_{\perp}(\mathbf{p})$:

$$g_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = g_{\parallel}(\mathbf{p})\sigma_2 + g_{\perp}(\mathbf{p}), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} g_{\parallel}(\mathbf{p}) &\equiv g_0(\mathbf{p}) + g_3(\mathbf{p})\sigma_3, \\ g_{\perp}(\mathbf{p}) &\equiv g_2(\mathbf{p}) + ig_1(\mathbf{p})\sigma_3. \end{aligned} \quad (31)$$

Матрицу $\Delta_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = (\Delta_0(\mathbf{p}) + \vec{\Delta}(\mathbf{p})\vec{\sigma})\sigma_2$ также можно представить в виде

$$\Delta_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \Delta_{\parallel}(\mathbf{p})\sigma_2 + \Delta_{\perp}(\mathbf{p}), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\parallel}(\mathbf{p}) &\equiv \Delta_0(\mathbf{p}) + \Delta_3(\mathbf{p})\sigma_3, \\ \Delta_{\perp}(\mathbf{p}) &\equiv \Delta_2(\mathbf{p}) + i\Delta_1(\mathbf{p})\sigma_3. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогичным образом матрицы $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) + \vec{f}(\mathbf{p})\vec{\sigma}$ и $\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \vec{\varepsilon}(\mathbf{p})\vec{\sigma}$ представимы в виде

$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = f_{\parallel}(\mathbf{p}) + f_{\perp}(\mathbf{p})\sigma_2$, $\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\parallel}(\mathbf{p}) + \varepsilon_{\perp}(\mathbf{p})\sigma_2$, где диагональные матрицы f_{\parallel} , f_{\perp} , ε_{\parallel} и ε_{\perp} определяются формулами

$$\begin{aligned} f_{\parallel}(\mathbf{p}) &= f_0(\mathbf{p}) + f_3(\mathbf{p})\sigma_3, \quad f_{\perp}(\mathbf{p}) = f_2(\mathbf{p}) + if_1(\mathbf{p})\sigma_3, \\ \varepsilon_{\parallel}(\mathbf{p}) &= \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \varepsilon_3(\mathbf{p})\sigma_3, \quad \varepsilon_{\perp}(\mathbf{p}) = \varepsilon_2(\mathbf{p}) + i\varepsilon_1(\mathbf{p})\sigma_3. \end{aligned}$$

Согласно (13), величина $\varepsilon_{\mathbf{q}}^0(\mathbf{p})$ равна

$$\varepsilon_{\mathbf{q}}^0(\mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q}\sigma_3)^2}{2m} = \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \varepsilon_3(\mathbf{p})\sigma_3, \quad (34)$$

где $\varepsilon_0(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2}{2m}$, $\varepsilon_3(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}}{m}$.

Используя эти обозначения, преобразуем формулу (15) к виду

$$\Delta_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{p}'} \{ [v_0(\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' + \alpha\mathbf{q}) - v_1(\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' + \alpha\mathbf{q})] \times \\ \times g_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{p}') - 2v_1(\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' - \alpha\mathbf{q}) g_{\parallel}^{-\alpha}(\mathbf{p}') \}, \quad (35)$$

$$\Delta_{\perp}^{\alpha}(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{p}'} [v_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + v_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}')] g_{\perp}^{\alpha}(\mathbf{p}'). \quad (36)$$

Здесь

$$\Delta_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{p}) \equiv \Delta_0(\mathbf{p}) + \alpha\Delta_3(\mathbf{p}), \quad g_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{p}) \equiv g_0(\mathbf{p}) + \alpha g_3(\mathbf{p}), \\ \Delta_{\perp}^{\alpha}(\mathbf{p}) \equiv \Delta_2(\mathbf{p}) + i\alpha\Delta_1(\mathbf{p}), \\ g_{\perp}^{\alpha}(\mathbf{p}) \equiv g_2(\mathbf{p}) + i\alpha g_1(\mathbf{p}).$$

В общем случае уравнения (35), (36) представляют собой связанную систему уравнений для определения четырех параметров порядка $\Delta_0(\mathbf{p})$ и $\bar{\Delta}(\mathbf{p})$ (или $\Delta_{\parallel}(\mathbf{p})$ и $\Delta_{\perp}(\mathbf{p})$), так как $g_{\parallel}(\mathbf{p})$ и $g_{\perp}(\mathbf{p})$ зависят от этих четырех параметров порядка.

При $\mathbf{q} = 0$ эти уравнения переходят в общие уравнения для параметров порядка $\Delta_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = (\Delta_0(\mathbf{p}) + \bar{\Delta}(\mathbf{p})\bar{\sigma})\sigma_2$, соответствующих суперпозиции синглетного и триплетного спариваний ($\bar{\Delta} \neq 0$) [9].

Отметим, что из определений (33) следует, что величины g_{\perp} и Δ_{\perp} нечетны по импульсам и описывают триплетное состояние с $S = 1$, $S_z = \pm 1$, а функции g_{\parallel} и Δ_{\parallel} описывают суперпозицию синглетного ($S = 0$) и триплетного ($S = 1$) состояния с $S_z = 0$ и поэтому не обладают определенной четностью по импульсам \mathbf{p} .

4. Диагонализация

Выразим нормальную и аномальную «однородные» функции распределения $f_{\mathbf{q}}$ и $g_{\mathbf{q}}$ в терминах четырех параметров порядка Δ_0 и $\bar{\Delta}$ (или Δ_{\parallel} и Δ_{\perp}). С этой целью обратимся к процедуре блочной диагонализации уравнения самосогласования (4), развитой в работе [6].

Матрица $\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \xi & \Delta \\ \Delta^{\dagger} & -\bar{\xi} \end{pmatrix}$ приводится к блочному диагональному виду $\begin{pmatrix} \xi' & 0 \\ 0 & -\bar{\xi}' \end{pmatrix}$ с помощью унитарного преобразования Боголюбова:

$$\hat{\xi}' = \hat{U}^{\dagger} \hat{\xi} \hat{U} = \begin{pmatrix} \xi' & 0 \\ 0 & -\bar{\xi}' \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где унитарный оператор \hat{U} имеет вид

$$\hat{U} \equiv \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Основную роль в процессе диагонализации играет матрица X , связывающая блоки v и u формулой $v = Xu^*$. Эта матрица удовлетворяет уравнению

$$X\Delta^{\dagger}X - \xi X - X\bar{\xi} - \Delta = 0, \quad \xi = \varepsilon - \mu. \quad (39)$$

Решив это нелинейное матричное уравнение, можно определить пространственно однородные нормальную и аномальную матричные функции распределения с помощью формул

$$f = Kn + X(1 - \bar{n})X^{\dagger}K, \quad (40)$$

$$g = K(1 - n)X - X\bar{n}_{-\mathbf{p}}\bar{K}_{-\mathbf{p}}, \quad (41)$$

где

$$K = (1 + XX^{\dagger})^{-1}, \quad n = \left[\exp\left(\frac{\xi - X\Delta^{\dagger}}{T}\right) + 1 \right]^{-1}. \quad (42)$$

Собственные значения матрицы $\xi - X\Delta^{\dagger} = \mathcal{E}$ определяют спектр элементарных фермионных возбуждений. Этот спектр вещественен, так как матрица \mathcal{E} эрмитова в положительно определенном скалярном произведении $\langle \varphi, \psi \rangle = (\varphi, K\psi)$. Действительно, заметим с этой целью, что имеют место тождества

$$(\xi - X\Delta^{\dagger})(1 + XX^{\dagger}) = (\xi X - X\Delta^{\dagger}X + \Delta)X^{\dagger} + \xi,$$

$$(1 + XX^{\dagger})(\xi - \Delta X^{\dagger}) = X(\Delta^{\dagger} + X^{\dagger}\xi - X^{\dagger}\Delta X^{\dagger}) + \xi.$$

Поэтому, в силу (42) и того, что $\xi = \xi^{\dagger}$, имеем $K(\xi - X\Delta^{\dagger}) = (\xi - \Delta X^{\dagger})K$, или $K\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\dagger}K$. В новом скалярном произведении $\langle \varphi, K\psi \rangle$ (где $\langle \varphi, \psi \rangle \equiv \varphi_{\alpha}^* \psi_{\alpha}$ — обычное скалярное произведение) операция эрмитова сопряжения определяется стандартным образом: $\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A^{\circ} \varphi, \psi \rangle$, т.е. $A^{\circ} = K^{-1}A^{\dagger}K$. Отсюда следует, что в таком скалярном произведении оператор \mathcal{E} эрмитов, $\mathcal{E}^{\circ} = \mathcal{E}$ и, следовательно, собственные значения \mathcal{E} вещественны.

Замечая, что

$$X = (\xi - \mathcal{E})(\Delta^{\dagger})^{-1}, \quad (43)$$

получаем из (39) уравнение для \mathcal{E}

$$\mathcal{E}^2 + 2\bar{\xi}\bar{\sigma} = \mathcal{E}_0^2, \quad (44)$$

где

$$2\bar{\xi}\bar{\sigma} = \xi_3\sigma_3 - (\Delta^{\dagger})^{-1}\xi_3\sigma_3\Delta^{\dagger}, \\ \mathcal{E}_0^2 = \xi^2 - 2\xi\bar{\xi}\bar{\sigma} + \Delta\Delta^{\dagger}. \quad (45)$$

Представив матрицу \mathcal{E} в виде

$$\mathcal{E} \equiv \zeta + \bar{y}\bar{\sigma}, \quad (46)$$

из уравнения (44) после некоторых преобразований получим бикубическое уравнение для величины ζ :

$$\zeta^6 - e_0^2 \zeta^4 + (\bar{b}^2 e_0^2 + \bar{e}^2 - \bar{b}^2 \bar{b}^2) \zeta^2 - (\bar{e} \bar{b})^2 = 0 \quad (47)$$

и линейное алгебраическое уравнение для вектора \bar{y} , решение которого имеет вид:

$$\bar{y} = \frac{1}{\zeta^2 - \bar{b}^2} \left(\zeta \bar{e} - i[\bar{e}, \bar{b}] - \bar{b} \frac{\bar{e} \bar{b}}{\zeta} \right) - \bar{b}. \quad (48)$$

Из формул (43), (45) следует, что

$$e_0^2 = \xi_0^2 + \bar{\xi}^2 + \Delta_0 \Delta_0^* + \bar{\Delta} \bar{\Delta}^*, \quad (49)$$

$$\bar{e} = \xi_0 (\bar{\xi} - \bar{b}) - i[\bar{\xi}, \bar{b}] + \frac{1}{2} (\Delta_0 \bar{\Delta}^* + \Delta_0^* \bar{\Delta} + i[\bar{\Delta} \bar{\Delta}^*]), \quad (50)$$

$$\bar{b} = \frac{1}{D^*} (i \Delta_0^* [\bar{\xi}, \bar{\Delta}^*] - (\bar{\Delta} \bar{\xi}) \bar{\Delta}^* + \xi \bar{\Delta}^* \bar{\Delta}^*). \quad (51)$$

Величина D^* , входящая в эти формулы, равна $\bar{\Delta}^* \bar{\Delta}^* - \Delta_0^* \Delta_0^*$.

Из этих формул и определения (46) получим следующее выражение для спектра элементарных возбуждений (собственные значения матрицы \mathcal{E}):

$$\mathcal{E}_\pm = \zeta \pm |\bar{y}|, \quad |\bar{y}| = \sqrt{e_0^2 - \zeta^2 - 2(\bar{e} \bar{b} / \zeta)}. \quad (52)$$

Таким образом, полученные формулы (49)–(51) определяют спектр элементарных фермионных возбуждений (52) в терминах исходных величин ξ и Δ и решения ζ бикубического уравнения (47).

В результате решения уравнения для ζ^2 величина X определяется формулами

$$X = (X_0 + \bar{X} \bar{\sigma}) \sigma_2 \equiv X_{||} \sigma_2 + X_{\perp}, \quad (53)$$

$$X_0 = \frac{1}{D^*} \{ (\bar{y} + \bar{\xi}, \bar{\Delta}^*) - (\zeta + \xi_0) \Delta_0^* \}, \quad (54)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{D^*} \{ i[\bar{y} + \bar{\xi}, \bar{\Delta}^*] + \bar{\Delta}^* (\zeta + \xi_0) - \Delta_0^* (\bar{y} + \bar{\xi}) \}. \quad (55)$$

Далее, используя формулы (40), (41), можем, в принципе, найти явные выражения для $f_{\mathbf{q}}$ и $g_{\mathbf{q}}$ в терминах ξ и Δ . Подставляя выражение для g в формулы (35), (36), найдем уравнения, определяющие параметр порядка Δ .

Обратим здесь внимание на то, что формулы (53)–(55), (47) дают конкретное решение матричного квадратного уравнения $X^2 - 2pX + q = 0$ и обобщают известную формулу Сильвестра [10].

Однако при решении этой задачи, когда Δ_0 и $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq 0$, мы сталкиваемся с довольно громоздкими алгебраическими выражениями и фор-

мулами. Поэтому в этой работе ограничимся двумя частными случаями, когда в представлении $\Delta = \Delta_{||} \sigma_2 + \Delta_{\perp}$ реализуется один из двух вариантов: $\Delta_{||} = 0, \Delta_{\perp} \neq 0$ или $\Delta_{||} \neq 0, \Delta_{\perp} = 0$.

5. Анализ решения уравнений самосогласования

для сверхтекучего спирального упорядочения

В обоих случаях уравнение (47) для ζ сводится к биквадратному уравнению. Так как нас интересуют не только корни уравнения (47), но также вся матрица X и функции распределения f и g , то заметим, что в этих частных случаях Δ_{\perp} при $\Delta_{||} = 0$ или $\Delta_{||}$ при $\Delta_{\perp} = 0$ являются диагональными матрицами, и поэтому проще исходить непосредственно из уравнения (39) для X , в которое в качестве неизвестных коэффициентов входят только диагональные матрицы.

Рассмотрим случай $\Delta_{||} = 0$, когда решение уравнения (39) для X имеет вид

$$X = X_{\perp} = \frac{\xi_0 + \alpha E_{\perp}}{\Delta_{\perp}^{\dagger}}, \quad (56)$$

где $\alpha = \pm 1, \xi_0 = \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2}{2m} - \mu, E_{\perp} \equiv \sqrt{\xi_0^2 + \Delta_{\perp} \Delta_{\perp}^{\dagger}}$.

Нормальная и аномальная пространственно однородные функции распределения при этом имеют вид

$$g_{\mathbf{q}} = g_{\perp} = -\frac{\Delta_{\perp}}{2E_{\perp}} [1 - n(E_{\perp} - \xi_3) - n(E_{\perp} + \xi_3)], \quad (57)$$

$$g_{||} = 0;$$

$$f_{\mathbf{q}} = f_{||} = \frac{1}{2} \{ 1 + n(E_{\perp} + \xi_3) - n(E_{\perp} - \xi_3) - \frac{\xi_0}{E_{\perp}} [1 - n(E_{\perp} + \xi_3) - n(E_{\perp} - \xi_3)] \}, \quad f_{\perp} = 0, \quad (58)$$

где

$$n(A) \equiv [\exp(A/T) + 1]^{-1}. \quad (59)$$

В случае $\Delta_{\perp} = 0$ имеем

$$X = X_{||} = \frac{\xi + \alpha E_{||}}{\Delta_{||}} \quad (\alpha = \pm 1), \quad (60)$$

$$E_{||} \equiv \sqrt{\xi^2 + |\Delta_{||}|^2}, \quad (61)$$

причем

$$g_{\mathbf{q}} = -\frac{\Delta_{\parallel}}{2E_{\parallel}}[1 - 2n(E_{\parallel})]\sigma_2 = g_{\parallel}\sigma_2, \quad g_{\perp} = 0, \quad (62)$$

$$f_{\mathbf{q}} = f_{\parallel} = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\xi}{E_{\parallel}}[1 - 2n(E_{\parallel})]\right\}, \quad f_{\perp} = 0. \quad (63)$$

Используя эти формулы и уравнения (36), получим в случае $\Delta_{\parallel} = 0$ уравнение самосогласования для определения Δ_{\perp} :

$$\Delta_{\perp}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{p}'} \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\Delta_{\perp}(\mathbf{p}')}{E_{\perp}(\mathbf{p}')} \times \\ \times \left\{ \text{th} \frac{\beta}{2} \left[E_{\perp}(\mathbf{p}') + \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}}{m} \right] + \text{th} \frac{\beta}{2} \left[E_{\perp}(\mathbf{p}') - \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}}{m} \right] \right\}, \quad (64)$$

где

$$\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv v_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + v_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (65)$$

Аналогичным образом в случае $\Delta_{\perp} = 0$ имеем:

$$\Delta_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}'} \left\{ [v_0(\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' + \alpha\mathbf{q}) - v_1(\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' + \alpha\mathbf{q})] \frac{\Delta_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{p}')}{E_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{p}')} \text{th} \frac{E_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{p}')}{2T} - \right. \\ \left. - 2v_1(\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}, \mathbf{p}' - \alpha\mathbf{q}) \frac{\Delta_{\parallel}^{-\alpha}(\mathbf{p}')}{E_{\parallel}^{-\alpha}(\mathbf{p}')} \text{th} \frac{E_{\parallel}^{-\alpha}(\mathbf{p}')}{2T} \right\}. \quad (66)$$

Из этого уравнения следует, что его решение сводится к уравнению БКШ для суперпозиции синглетного и триплетного параметров порядка при $S_z = 0$. Поэтому в дальнейшем мы его рассматривать не будем и перейдем к анализу уравнения (64) для Δ_{\perp} , соответствующего только триплетному спариванию с $S = 1$ и $l = 1$ и суперпозиции волновых функций куперовских пар с $S_z = 1$ и $S_z = -1$. В этом случае $\Delta = \Delta_2 + i\Delta_1\sigma_3 = (\Delta_2\sigma_2 + \Delta_1\sigma_1)\sigma_2$.

В силу определения функции $\Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, она должна быть антисимметричной как по аргументу \mathbf{p}_1 , так и по аргументу \mathbf{p}_2 . Поэтому в разложении функции $\Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ по полиномам Лежандра $P_l(\cos \widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2})$ будут входить только нечетные полиномы. Ограничимся для простоты в этом разложении только первым полиномом Лежандра. Таким образом, будем считать, что

$$\Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = V(p_1, p_2) \cos \theta, \quad \theta = \widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}.$$

В этом случае

$$\Delta_{\perp}(\mathbf{p}) \equiv \Delta_{\perp}(p) \cos \theta, \quad \theta = \widehat{\mathbf{p} \mathbf{q}}. \quad (67)$$

Кроме того, будем считать, что $V(p_1, p_2)$ отлично от нуля в узком энергетическом слое по аргументам p_1 и p_2 (как предполагается в теории БКШ):

$$V(p_1, p_2) = -V \begin{cases} 1, & \left| \frac{p_1^2}{2m} - \mu \right| \leq \Theta, \quad \left| \frac{p_2^2}{2m} - \mu \right| \leq \Theta \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (68)$$

Здесь 2Θ — ширина энергетического слоя у поверхности Ферми. В этом случае $\Delta_{\perp}(p) = 0$, если p лежит вне узкого энергетического слоя и $\Delta_{\perp}(p) = \text{const}$, если p лежит внутри слоя. Таким образом, уравнение (64) принимает вид

$$1 = \frac{v}{8} \int_{-1}^1 dx x^2 \int_{-9}^9 \frac{d\xi (1 + \xi)^{3/2}}{\sqrt{(\xi + \underline{q}^2)^2 + \delta^2 x^2 (1 + \xi)}} \times \\ \times [\text{th} u^+ + \text{th} u^-], \quad (69)$$

где

$$u^{\pm} \equiv \frac{1}{2t} \left[\sqrt{(\xi + \underline{q}^2)^2 + \delta^2 x^2 (1 + \xi)} \pm 2qx \sqrt{1 + \xi} \right].$$

Безразмерные параметры δ, \underline{q}, t связаны с Δ_{\perp}, q, T формулами

$$\delta \equiv \frac{\Delta_{\perp}}{\varepsilon_f}, \quad t \equiv \frac{T}{\varepsilon_f}, \quad \underline{q} \equiv \frac{q}{p_f}. \quad (70)$$

Безразмерные энергетические величины, характеризующие потенциал взаимодействия, выражаются формулами

$$v = -\frac{k_f^3}{4\pi^2 \varepsilon_f} V(p_f, p_f), \quad \Theta = \frac{\Theta}{\varepsilon_f},$$

а безразмерные параметры интегрирования ξ, x — формулами

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon_f} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right), \quad x = \cos \widehat{\mathbf{p} \mathbf{q}}.$$

При решении уравнения (69) будем считать, что $v \ll 1$. Тогда $\delta \ll 1, t_c \ll 1$. Ширину слоя Θ берем такой, что $\delta \ll \Theta, t_c \ll \Theta$ и $\underline{q} \ll \Theta$. В этом случае можно положить $1 + \xi \approx 1$ и $\xi + \underline{q}^2 \approx \xi$. Тогда уравнение (69) приобретает вид

$$1 = \frac{v}{2} \int_0^1 dx x^2 \int_0^{\vartheta} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \delta^2 x^2}} \left[\operatorname{th} \frac{1}{2t} (\sqrt{\xi^2 + \delta^2 x^2} + 2qx) + \operatorname{th} \frac{1}{2t} (\sqrt{\xi^2 + \delta^2 x^2} - 2qx) \right]. \quad (71)$$

В предельных случаях $\delta = 0$ или $t = 0$ это уравнение может быть существенно упрощено.

Найдем температуру перехода t_c спирально упорядоченного состояния как функцию параметра спирали q . Эта температура определяется уравнением (71) при $\delta = 0$.

$$1 = \frac{v}{2} \int_0^1 dx x^2 \int_0^{\vartheta} \frac{d\xi}{\xi} \left\{ \operatorname{th} \frac{1}{2t} (\xi + 2qx) + \operatorname{th} \frac{1}{2t} (\xi - 2qx) \right\}. \quad (72)$$

Интегрируя по ξ по частям и вычисляя затем интеграл по x , получаем в логарифмическом приближении ($\vartheta/t_c \gg 1$) уравнение

$$2 \ln \frac{t_c}{\tau} - \frac{\pi^2}{6a^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\operatorname{ch}^2 s} \left(1 + \frac{s^3}{a^3} \right) \ln|a + s| = 0, \quad (73)$$

где $a \equiv q/t_c$ и введен параметр τ :

$$\tau \equiv \frac{\vartheta}{2} \exp\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{v}\right). \quad (74)$$

При $q = 0$ имеем $t_c = 4\tau \exp(-1/3)/\pi$, где $\gamma = \exp(0,577\dots)$ — постоянная Эйлера.

При $q = \tau$ температура перехода t_c обращается в нуль, а в окрестности этой точки имеет место асимптотика

$$t_c \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{8\tau(q - \tau)}. \quad (75)$$

При $q > \tau$ функция $t_c(q)$ двузначна, а $q(t_c)$ имеет максимум, определяемый из уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds s^3}{\operatorname{ch}^2 s} \ln|a - s| + \frac{a\pi^2}{6} = 0, \quad (76)$$

откуда $a \approx 1,644$ и $q \approx 1,181 \tau$.

Зависимость температуры перехода t_c от q приведена на рис. 1.

Определим теперь зависимость величины δ от вектора спирали q при $t = 0$. Согласно (71), имеем

$$1 = v \int_0^{\vartheta} d\xi \int_0^1 \frac{dx x^2}{\sqrt{\xi^2 + \delta^2 x^2}} \Theta\left(\sqrt{\xi^2 + \delta^2 x^2} - 2qx\right), \quad (77)$$

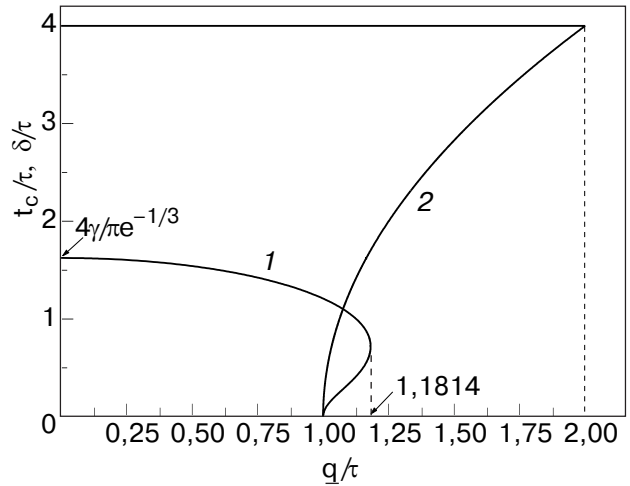


Рис. 1. Зависимость температуры перехода t_c (1) и параметра порядка δ (2) при $T = 0$ от параметра спирали.

где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда. Это уравнение имеет два решения. Первое удовлетворяет условию $\delta > 2q$, а второе — условию $\delta < 2q$. При $\delta > 2q$ получаем $\delta = 4\tau$ или $\delta = 2\vartheta \exp\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{v}\right)$. Это есть формула теории БКШ для триплетного спаривания. При $\delta < 2q$ имеем

$$\delta = 4\sqrt{\tau(q - \tau)}. \quad (78)$$

В области $\tau < q < 2\tau$ имеем двузначное поведение щели как функции вектора спирали. График кривой $\delta(q)$ при $t = 0$ приведен на рис. 1 в том же масштабе, что и $t_c(q)$.

Общее решение уравнения (71) получено численными методами и представлено на рис. 2. Из этого графика видно, что $q = 2\tau$ является максимально возможным значением параметра спирали, которое достигается при $t = 0$ и $\delta = 4\tau$. Таким образом, при

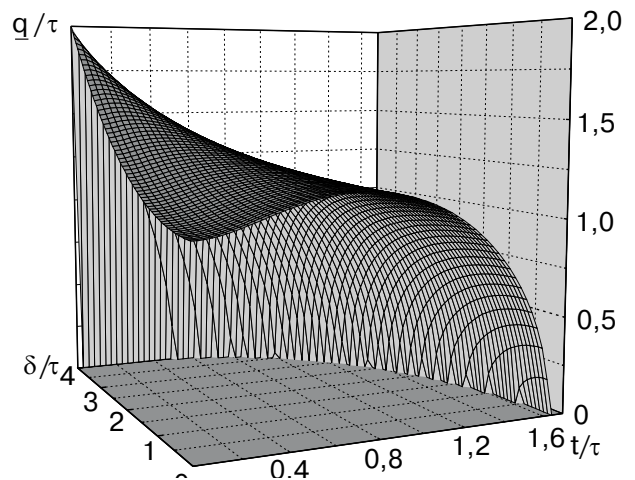


Рис. 2. Зависимость параметра спирали q от температуры t и параметра порядка δ .

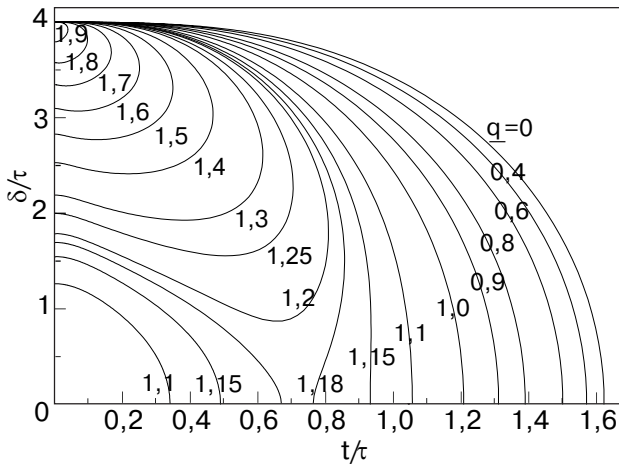


Рис. 3. Зависимость параметра порядка от температуры при различных значениях параметра спирали \underline{q} .

$q > 2\tau$ спирального сверхтекучего состояния не существует. На рис. 3 представлены сечения решения (71) плоскостями с различными значениями \underline{q} .

6. Корреляция спинов

Матричные функции распределения f и g определяют различные физические величины в состоянии статистического равновесия. Так, из формул для f следует, что среднее значение спина в случае $\Delta_{\parallel} = 0$ постоянно:

$$\langle \sigma_m \rangle = \delta_{3m} \langle \sigma_3 \rangle, \quad \langle \sigma_3 \rangle = \text{Sp} f_{\parallel} \sigma_3 = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} f_3(\mathbf{p}). \quad (79)$$

В связи с этим определим корреляцию спинов $\hat{\sigma}^m(\mathbf{x}) \equiv \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^m \psi_{\beta}(\mathbf{x})$ в сверхтекучей ферми-жидкости со спиральным упорядочением. Так как

$$\psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}) a_{\alpha\mathbf{p}},$$

имеем

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_m(\mathbf{x}) \hat{\sigma}_n(\mathbf{y}) \rangle &= \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4} \{ \text{tr} \sigma_m f_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1} \cdot \text{tr} \sigma_n f_{\mathbf{p}_4 \mathbf{p}_3} + \\ &+ \text{tr} \sigma_m (\delta_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3} - f_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3}) \sigma_n f_{\mathbf{p}_4 \mathbf{p}_1} - \text{tr} \sigma_m \tilde{g}_{\mathbf{p}_4 \mathbf{p}_2} \tilde{\sigma}_n g_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_1}^{\dagger} \} \times \\ &\times \exp i [\mathbf{x}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + \mathbf{y}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3)]. \end{aligned}$$

Здесь транспонирование производится только в спиновом пространстве. Отсюда получаем искомую формулу

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_m(\mathbf{x}) \hat{\sigma}_n(\mathbf{y}) \rangle - \langle \sigma_3 \rangle^2 \delta_{3m} \delta_{3n} &= \sum_{\beta=\pm 1} (\delta_{mn} + i\beta \varepsilon_{mn3}) \times \\ &\times f_{\parallel}^{\beta}(0) \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{V^2} \sum_{\alpha, \beta=\pm 1} T(m, \alpha, n, \beta) \{ -f_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{r}) f_{\parallel}^{\beta}(-\mathbf{r}) \times \\ &\times \exp[i(\alpha - \beta)\mathbf{r}\mathbf{q}] + (2\delta_{2n} - 1) g_{\perp}^{\alpha}(-\mathbf{r}) g_{\perp}^{*\beta}(-\mathbf{r}) \times \\ &\times \exp[-i(\alpha + \beta)\mathbf{r}\mathbf{q}] \exp[i(\alpha - \beta)(2\mathbf{R} - \mathbf{r})\mathbf{q}] \}, \end{aligned} \quad (80)$$

где $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{R} \equiv (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$,

$$f_{\parallel}^{\pm}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{\mathbf{p}} f_{\parallel}^{\pm}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad g_{\perp}^{\pm}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{\mathbf{p}} g_{\perp}^{\pm}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad (81)$$

$$f_{\parallel}^{\alpha}(\mathbf{p}) \equiv f_0(\mathbf{p}) + \alpha f_3(\mathbf{p}), \quad g_{\perp}^{\alpha}(\mathbf{p}) \equiv g_2(\mathbf{p}) + i\alpha g_1(\mathbf{p}) \quad (82)$$

и

$$\begin{aligned} T(m, \alpha, n, \beta) &\equiv \text{tr} \sigma_m P_{\alpha} \sigma_n P_{\beta} = \\ &= \frac{1}{2} [\delta_{mn} (1 - \alpha\beta + 2\alpha\beta\delta_{3m}) - i(\alpha - \beta)\varepsilon_{mn3}]. \end{aligned} \quad (83)$$

Как видно, в этом случае спиральное упорядочение проявляется в том, что корреляционные функции $\langle \sigma_m(\mathbf{x}) \sigma_n(\mathbf{y}) \rangle - \langle \sigma_3 \rangle^2 \delta_{3m} \delta_{3n}$ являются периодическими функциями переменной $(\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$. В силу принципа пространственного ослабления корреляций корреляционные функции спинов по переменной $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ стремятся к нулю. Поэтому спиральное упорядочение непосредственно проявляется только в корреляционной функции спинов.

В заключение заметим, что сверхтекучие жидкости типа ${}^3\text{He}$ с тензорным параметром порядка теоретически допускают существование большого числа разнообразных фазовых состояний, многие из которых еще не обнаружены [8]. Неоднородные спиральные состояния сверхтекучих фаз могут встретиться при исследовании кристаллов с перекрывающимися энергетическими зонами, а также при исследовании тяжелых атомных ядер (ядерная материя) и астрофизических объектов, таких как нейтронные звезды.

Изученное нами спиновое спиральное упорядочение возникает одновременно со сверхтекучим упорядочением и представляет собой состояние антиферромагнитного типа, в котором пространственная неоднородность проявляется в аномальной функции распределения и в корреляционной функции спинов, которая может быть экспериментально измерена. Хотя такое неоднородное спиральное сверхтекуче-

чее состояние еще не обнаружено, его исследование представляется интересным как в области физики низких температур, так и области физики сверхплотных состояний вещества.

1. А.И. Ахиезер, И.Я. Померанчук, *ЖЭТФ* **36**, 859 (1959).
2. Ю.А. Изюмов, Ю.Н. Скрябин, *Физика металлов и металловедения СССР* **49**, 903 (1980).
3. Yu.A. Izumov and V.M. Laptev, *Intern. J. Mod. Phys.* **B5**, 563 (1991).
4. M. Tachiki, A. Kotani, H. Matsumoto, and H. Umezawa, *Solid State Commun.* **31**, 927 (1979).
5. K.H. Mueller and V.N. Narozhnyi, *Rep. Progr. Phys.* **64**, 943 (2001).
6. A.I. Akhiezer, V.V. Krasil'nikov, S.V. Peletminskii, and A.A. Yatsenko, *Phys. Rep.* **245**, 1 (1994).
7. Б.И. Барц, Ю.А. Болотин, Е.В. Инопин, В.Ю. Гончар, *Метод Хартри–Фока в теории ядра*, Наукова думка, Киев (1982).
8. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, Н.Н. Чеканова, *ФНТ* **28**, 327 (2002).
9. А.И. Ахиезер, А.А. Исаев, С.В. Пелетминский, А.А. Яценко, *ТМФ* **118**, 459 (1998).
10. Р. Беллман, *Введение в теорию матриц*, Наука, Москва (1969).

On the possibility of simultaneous spiral and superfluid ordering in a Fermi-liquid

S.V. Peletminskii, A.A. Yatsenko, and S.N. Shulga

The paper concerns a particular possibility of ordering for Fermi systems — a superfluid spiral ordering, at which in addition to the phase invariance breakdown there occurs a violence of the translational and the spin rotation invariance. A general approach of studying of the superfluid spiral ordering is formulated on the basis of the Fermi liquid method. For a monocomponent Fermi system self-consistency equations for four order parameters and the temperature of simultaneous transition to spiral and superfluid states are obtained. The system of equations is studied under the assumption of two order parameters being distinct from zero. The spiral parameter dependences of the transition temperature and the energy gap in the spectrum of elementary fermion excitations are calculated. An interval of the spiral parameter values within which the superfluid spiral ordering can exist is determined. The spin correlation function at the spiral ordering is studied.