

## Ширина линий черенковского излучения цуга джозефсоновских вихрей

А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин

*Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук  
Ленинский пр., 53, г. Москва, 119991, Россия  
E-mail: vabanque@mail.ru*

Статья поступила в редакцию 4 июля 2013 г.

Определены ширины спектральных линий черенковского излучения цуга джозефсоновских вихрей, движущегося в протяженном сандвиче. Установлены условия, в которых ширины линий излучения, обусловленные конечной длиной цуга, сравнимы или даже меньше ширины линий, обусловленных тепловыми флуктуациями.

Визначено ширини спектральних ліній черенковського випромінювання цугу джозефсоновських вихрів, що рухається в протяжному сандвичі. Встановлено умови, в яких ширини ліній випромінювання, що обумовлені кінцевою довжиною цугу, можуть бути порівняні чи навіть менше ширин ліній, обумовлених тепловими флуктуаціями.

PACS: 74.50.+g Туннелирование; эффект Джозефсона.

Ключевые слова: джозефсоновский переход, джозефсоновский вихрь, терагерцевое излучение.

### Введение

Излучение из джозефсоновских переходов (ДП) привлекает внимание исследователей на протяжении полувека (см., например, обзоры [1,2]). Особенно актуальной эта проблематика стала в последнее время в связи с важностью освоения терагерцевого диапазона частот для целого ряда прикладных и фундаментальных нужд, требующих разработки компактных твердотельных источников, датчиков, фильтров и усилителей терагерцевого излучения.

Уединенный джозефсоновский вихрь, бегущий со скоростью  $v$  по протяженному джозефсоновскому сандвичу, имеет характерный размер  $\sqrt{V_S^2 - v^2}/\omega_J$ , где  $V_S$  — скорость Свихарта в сандвиче,  $\omega_J$  — джозефсоновская плазменная частота. Черенковское излучение, испускаемое таким вихрем с боковых поверхностей сандвича, имеет спектральное распределение с максимумом при частоте  $0,8v\omega_J/\sqrt{V_S^2 - v^2}$  [3]. Типичные значения  $\omega_J$  порядка сотен гигагерц. Поэтому при скоростях вихря достаточно близких к  $V_S$  характерная частота излучения попадает в терагерцевый диапазон [3,4], тем самым черенковское излучение джозефсоновских вихрей может представлять практический интерес, так как попадает в интересную спектральную область. Однако

излучение уединенного вихря характеризуется широкой спектральной полосой с шириной порядка частоты в максимуме [3], что делает затруднительным использование такого излучения при создании генератора.

В связи с необходимостью разработки новых методов генерации монохроматического терагерцевого излучения нами в [5] рассмотрено черенковское излучение бесконечной периодической цепочки вихрей, движущейся в протяженном джозефсоновском сандвиче. Показано, что в этом случае возможна генерация линейчатого эквидистантного спектра частот, которые могут лежать в терагерцевой области. Возникновение спектра, состоящего из бесконечно узких линий, является следствием выбранной в [5] идеализированной модели, в которой периодическая цепочка считалась бесконечно протяженной. В то же время для реальных условий необходим анализ следствий возможных причин, которые приводят к уширению линий.

Говоря о таких причинах, прежде всего укажем на общеизвестную, связанную с тепловыми флуктуациями. Другая причина связана с тем, что в реальном устройстве генератора длина цепочки конечна. В настоящей работе показано, что конечная длина цуга вихрей приводит к тому, что в спектре излучения возникает набор линий конечной ширины. Определены вклады в

уширение линий излучения цуга, обусловленные двумя указанными причинами.

Материал излагается в следующем порядке. Сначала описана постановка задачи о черенковском излучении вихревой структуры, бегущей по протяженному джозефсоновскому сэндвичу, введены необходимые обозначения и приведены результаты, касающиеся излучения уединенного вихря и бесконечной цепочки. После этого найдено спектральное распределение мощности черенковского излучения цуга джозефсоновских вихрей. В найденном распределении проявляются те дискретные частоты, которые возникают при анализе спектра излучения бесконечной цепочки. В отличие от такого случая, линии излучения цуга на этих частотах имеют конечные ширины. Определены величины ширин, связанные с конечным размером цуга. Затем приведены известные результаты, связанные с уширением линий из-за тепловых флуктуаций, и проведено сравнение двух механизмов уширения линий. В заключении суммированы основные результаты.

Подчеркнем, что излагаемые ниже результаты относятся к черенковскому излучению джозефсоновских вихревых структур, которое связано с эффектом Вавилова–Черенкова и возникает, если джозефсоновский сэндвич окружен средой с большой диэлектрической проницаемостью. При этом высвечивание электромагнитных волн происходит со всей длины боковых поверхностей джозефсоновского сэндвича.

Как и в работах [3–5], рассмотрим протяженный джозефсоновский сэндвич с электродами толщиной  $L$ , занимающий слой  $-d - L \leq x \leq d + L$  и окруженный средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_m$ . Если скорость  $v$  равномерного движения вихревого джозефсоновского образования больше скорости света в среде  $c_m \equiv c/\sqrt{\epsilon_m}$ , то возникает черенковское излучение, уходящее от поверхностей сэндвича в глубь среды. В этом случае  $y$ -компонента магнитного поля на поверхностях сэндвича дается выражением [5]

$$H_s \simeq \frac{\Phi_0 v^2}{4\pi c_m \sqrt{v^2 - c_m^2} \operatorname{ch}(L/\lambda)} \Psi''(\zeta), \quad (1)$$

где  $\zeta = z - vt$ , ось  $Oz$  направлена вдоль перехода,  $\Phi_0$  — квант магнитного потока,  $\Psi$  — разность фаз на туннельной прослойке,  $\lambda$  — лондоновская длина. На границах раздела сверхпроводящих электродов сэндвича с диэлектриком тангенциальная компонента электрического поля связана с магнитным полем соотношением  $E_z(\pm d \pm L, \zeta) = \mp \sqrt{v^2 - c_m^2} H_s / \sqrt{\epsilon_m} v$ , которое позволяет найти  $x$ -компоненту вектора Пойнтинга  $\mp(c/4\pi)E_z(\pm d \pm L, \zeta)H_s$  на этих границах и, тем самым, мощность излучения вихревого образования с единичной площадки сэндвича в плоскости  $xOy$  с двух его боковых поверхностей

$$\frac{c_m \sqrt{v^2 - c_m^2}}{2\pi v} H_s^2. \quad (2)$$

Если по сэндвичу бежит уединенный джозефсоновский вихрь, то, считая обратное влияние поля черенковского излучения на разность фаз малым, для  $\Psi$  можно использовать следующее выражение [3,4]:

$$\Psi_{2\pi}(\zeta) \equiv 4 \operatorname{arctg}(\exp(k_J \zeta)), \quad (3)$$

где  $k_J \equiv \omega_J / \sqrt{V_S^2 - v^2}$ ,  $V_S \equiv v_S \operatorname{th}^{1/2}(L/\lambda)$ ,  $v_S$  — скорость Свихарта. Определяя с помощью (1) магнитное поле на поверхности сэндвича, из (2) находим полную мощность излучения уединенного джозефсоновского вихря [4]:

$$P_{2\pi} \equiv \frac{\Phi_0^2 v^3 k_J^3}{12\pi^3 c_m \sqrt{v^2 - c_m^2} \operatorname{ch}^2(L/\lambda)}. \quad (4)$$

Здесь и далее приводится мощность излучения с единицы длины оси  $Oy$ . Используя, как это делается обычно [6], спектральное разложение магнитного поля  $H_s$  на поверхности сверхпроводящих электродов в интеграл Фурье по частотам, величину  $P_{2\pi}$  можно представить в виде

$$P_{2\pi} = \int_0^{+\infty} p_{2\pi}(\omega) d\omega, \quad (5)$$

где величина

$$p_{2\pi}(\omega) \equiv \frac{\Phi_0^2 \omega^2}{8\pi^2 c_m \sqrt{v^2 - c_m^2} \operatorname{ch}^2(L/\lambda) \operatorname{ch}^2(\pi\omega/2k_J v)} \quad (6)$$

есть спектральная плотность мощности излучения уединенного вихря. Для дальнейшего удобно записать это соотношение в следующем виде:

$$p_{2\pi}(\omega) = \frac{\Phi_0^2 v^2 k_J^2}{8\pi^2 c_m \sqrt{v^2 - c_m^2} \operatorname{ch}^2(L/\lambda)} \bar{p}_{2\pi}(\omega), \quad (7)$$

где

$$\bar{p}_{2\pi}(\omega) \equiv \frac{\omega^2}{v^2 k_J^2 \operatorname{ch}^2(\pi\omega/2k_J v)} \quad (8)$$

представляет собой безразмерную плотность мощности излучения уединенного вихря.

Черенковское излучение уединенного вихря характеризуется сплошным спектром с максимумом при частоте  $\simeq 0,8vk_J$  и с шириной по полуинтенсивности  $\simeq 1,1vk_J$  [3]. Возникновение такого широкого спектра приводит к необходимости рассмотрения вихревой цепочки. В [5] изучено черенковское излучение бесконечной цепочки, движущейся в протяженном джозефсоновском сэндвиче. Следствием выбранной в этой

работе модели, направленной на анализ черенковского излучения бесконечной периодической цепочки вихрей с периодом  $\Xi$ , является возникновение линейчатого спектра излучения с круговыми частотами

$$\omega_n \equiv 2\pi n\nu/\Xi. \quad (9)$$

Мощность черенковского излучения электромагнитных волн цепочкой с участка ДП длиной в один период  $\Xi$  может быть представлена в виде суммы слагаемых  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ , каждое из которых — мощность излучения  $n$ -й гармоники.

Для иллюстрации этого положения приведем разность фаз цепочки в пределе, когда период цепочки велик по сравнению с  $k_J^{-1}$ :

$$\psi(\zeta) \simeq \pi + \frac{2\pi\zeta}{\Xi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{ch}(\pi^2 n/k_J \Xi)} \sin\left(\frac{2\pi n\zeta}{\Xi}\right). \quad (10)$$

Подставляя (10) в выражение (1), получим, что магнитное поле на поверхности сэндвича представимо в виде бесконечного разложения по функциям  $\sin(2\pi n\zeta/\Xi)$ , что в соответствии с (1) и (2) приводит к линейчатому спектру излучения. В указанном пределе для  $P_n$  можно приближенно записать

$$P_n \simeq \frac{12\pi^4 P_{2\pi}}{k_J^3 \Xi^3} \frac{n^2}{\operatorname{ch}^2(\pi^2 n/k_J \Xi)}. \quad (11)$$

Как уже отмечалось выше, в реальных устройствах число вихрей конечно, поэтому рассмотрим здесь модель цуга — вихревой цепочки, состоящей из конечного числа  $N$  кинков. Так как магнитное поле внутри ДП

$$H_J \simeq -\Phi_0 \operatorname{th}(L/\lambda) \psi'(\zeta)/4\pi\lambda, \quad (12)$$

созданное отдельным  $2\pi$ -кинком

$$H_{J,2\pi} = -\frac{\Phi_0 \operatorname{th}(L/\lambda) k_J}{2\pi\lambda} \operatorname{ch}^{-1}(k_J \zeta), \quad (13)$$

экспоненциально убывает с ростом  $|\zeta|$  по закону  $\propto \exp(-k_J |\zeta|)$ , то, считая, что расстояние  $\Xi$ , на которое отстоят друг от друга отдельные вихри цуга, больше величины  $k_J^{-1}$ , разность фаз  $\psi$  конечной вихревой цепочки приближенно представим в виде суммы разности фаз составляющих ее отдельных вихрей:

$$\psi(\zeta) \simeq \sum_{j=1}^N \psi_{2\pi} \left[ \zeta - \left( j - \frac{N+1}{2} \right) \Xi \right]. \quad (14)$$

Здесь для простоты изложения принято, что  $N$  — нечетное, а цуг расположен симметрично относительно плоскости  $\zeta = 0$ , так, что  $\psi(0) = \pi$ .

В соответствии с (12) и (14) магнитное поле, создаваемое цугом внутри ДП, является суперпозицией полей, созданных отдельными вихрями:

$$H_J = \sum_{j=1}^N H_{J,2\pi} \left[ \zeta - \left( j - \frac{N+1}{2} \right) \Xi \right]. \quad (15)$$

Для дальнейшего удобно представить слагаемые этого ряда в виде интеграла Фурье. Поскольку в образ Фурье  $j$ -го члена ряда номер  $j$  входит только в составе множителя  $\exp(-ijk_J \Xi)$ , можно провести суммирование по  $j$  в (15), что дает

$$H_J = -\frac{\Phi_0 \operatorname{th}(L/\lambda)}{2\lambda} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\zeta} \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi k/2k_J)} \frac{\sin(Nk\Xi/2)}{\sin(k\Xi/2)}. \quad (16)$$

Заметим, что при  $N \rightarrow \infty$  подынтегральный множитель в (16), содержащий синусы, можно представить в виде

$$1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos(jk\Xi),$$

что, согласно [7], тождественно равно

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - \Xi k/2\pi).$$

При этом интеграл Фурье (16) переходит в ряд Фурье, что отвечает случаю бесконечной цепочки (ср. с (10) и (12)).

Используя (1), (12) и (16), для магнитного поля на поверхности сэндвича имеем

$$H_s = \frac{i\Phi_0 v^2}{2c_m \sqrt{v^2 - c_m^2} \operatorname{ch}(L/\lambda)} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\zeta} \frac{k}{\operatorname{ch}(\pi k/2k_J)} \frac{\sin(Nk\Xi/2)}{\sin(k\Xi/2)}. \quad (17)$$

Полная мощность излучения  $P$  есть интеграл от величины (2) по всей длине сэндвича. Используя равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_s^2(z-vt) dt = \int_0^{\infty} H_s(z,\omega)^2 d\omega/\pi,$$

где

$$H_s(z,\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega t) H_s(z-vt),$$

получаем

$$P = \int_0^{+\infty} p(\omega) d\omega, \quad (18)$$

где

$$p(\omega) \equiv c_m \sqrt{v^2 - c_m^2} |H_s(z,\omega)|^2 / 2\pi^2 \quad (19)$$

— спектральная плотность мощности излучения на частоте  $\omega$ . Определяя с помощью (17) компоненты Фурье

$$H_s(z, \omega) = \frac{i\Phi_0\omega}{2c_m\sqrt{v^2 - c_m^2} \operatorname{ch}(L/\lambda) \operatorname{ch}(\pi\omega/2k_Jv)} \times e^{i\omega z/v} \frac{\sin(N\Xi\omega/2\nu)}{\sin(\Xi\omega/2\nu)}, \quad (20)$$

из (19) для спектральной плотности мощности излучения цуга со всей длины сэндвича находим

$$p(\omega) = p_{2\pi}(\omega) \frac{\sin^2(N\Xi\omega/2\nu)}{\sin^2(\Xi\omega/2\nu)}. \quad (21)$$

Отметим, что выражение (21) справедливо и для четных значений  $N$ .

Для обсуждения спектрального распределения мощности излучения цуга  $p(\omega)$  удобно записать соотношение (21) в следующем виде:

$$p(\omega) = \frac{\Phi_0^2 v^2 k_J^2}{8\pi^2 c_m \sqrt{v^2 - c_m^2} \operatorname{ch}^2(L/\lambda)} \bar{p}(\omega), \quad (22)$$

где

$$\bar{p}(\omega) \equiv \bar{p}_{2\pi}(\omega) \frac{\sin^2(N\Xi\omega/2\nu)}{\sin^2(\Xi\omega/2\nu)} \quad (23)$$

представляет собой безразмерную спектральную плотность мощности излучения цуга.

Входящая в (23) функция  $\bar{p}_{2\pi}(\omega)$  является, как уже отмечалось выше, колоколообразной функцией частоты с максимумом при  $\omega \simeq 0,8k_Jv$ , в то время как множитель в  $\bar{p}(\omega)$ , содержащий синусы, представляет собой быстроосциллирующую функцию с характерной частотой  $2\pi\nu/N\Xi$ . Эта функция изменяется в пределах от 0 до  $N^2$ . Поэтому  $\bar{p}(\omega)$  представляет собой медленноизменяющуюся функцию  $N^2\bar{p}_{2\pi}(\omega)$ , промодулированную функцией  $N^{-2}\sin^2(N\Xi\omega/2\nu)\sin^{-2}(\Xi\omega/2\nu)$ , быстроизменяющейся от 0 до 1. На рис. 1 сплошной

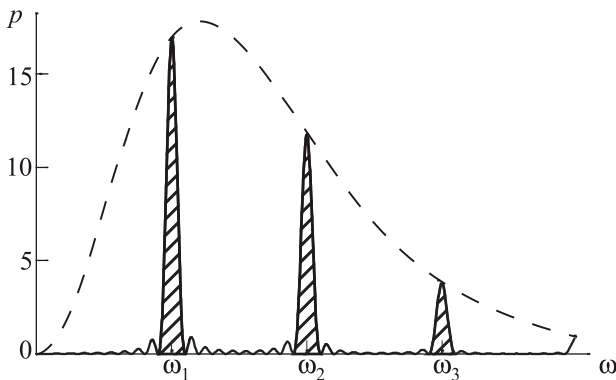


Рис. 1. Сплошной линией показана безразмерная спектральная плотность мощности излучения цуга (23) при  $N = 10$ ,  $k_J\Xi = 10$ . Штриховой линией представлена функция  $N^2\bar{p}_{2\pi}(\omega)$ . Заштрихованы области, площади которых определяют полные мощности  $P_{\text{zug},1}$ ,  $P_{\text{zug},2}$ ,  $P_{\text{zug},3}$  трех линий излучения цуга на частотах  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  соответственно.

линией приведен график  $\bar{p}(\omega)$  для  $N = 10$  и  $k_J\Xi = 10$ . Опишем функцию (23). В соответствии с терминологией, принятой в теории дифракционных решеток [8], для больших  $N$  спектральная плотность мощности излучения имеет главные максимумы при частотах  $\simeq \omega_n$  (9), соответствующих частотам линейчатого спектра, который характерен для излучения бесконечной цепочки. Высота главных максимумов функции  $\bar{p}(\omega)$  составляет  $\simeq N^2\bar{p}_{2\pi}(\omega_n)$ . При этом наибольшую высоту имеют главные максимумы, отвечающие частотам  $\omega_n$  с целочисленными номерами  $n$ , близкими к  $0,12k_J\Xi$ . В интервале частот между  $\omega = 0$  и первым главным максимумом при  $\omega \simeq \omega_1$ , а также между каждой парой соседних главных максимумов имеется еще рябь из  $N - 2$  добавочных максимумов [8] и  $N - 1$  нулей. Амплитуды добавочных максимумов малы по сравнению с амплитудами главных максимумов. Так, высота ближайших к точкам  $\omega_n$  добавочных максимумов составляет несколько процентов от  $\bar{p}(\omega_n)$ . Малость высот добавочных максимумов позволяет говорить, что главные максимумы представляют собой ярко выраженные пики осциллирующей функции  $\bar{p}(\omega)$ . В соответствии с (22) и (23) огибающая этих пиков описывается функцией  $N^2\bar{p}_{2\pi}(\omega)$ . График этой функции показан на рис. 1 штриховой линией.

Перейдем к обсуждению интегральных характеристик функции (21). Для цуга полная мощность излучения линии вблизи частоты  $\omega_n$  определяется из (18):

$$P_{\text{zug},n} \equiv \int_{\omega_n - (\omega_1/N)}^{\omega_n + (\omega_1/N)} d\omega p(\omega) \simeq 0,9NP_n, \quad (24)$$

где, имея в виду малость амплитуд добавочных максимумов, в качестве пределов интегрирования выбираются положения ближайших к  $\omega_n$  нулей функции  $p(\omega)$ . На рис. 1 заштрихованы области, площади которых, в соответствии с (24), определяют величины  $P_{\text{zug},1}$ ,  $P_{\text{zug},2}$  и  $P_{\text{zug},3}$ . Поскольку  $P_n$  — это мощность излучения  $n$ -й гармоники, отнесенная к одному периоду бесконечной цепочки, то возникший в правой части (24) множитель  $N$  — проявление того, что в полную мощность излучения рассматриваемого нами достаточно разреженного цуга, когда составляющие его вихри отстоят на расстояние большее  $k_J^{-1}$  друг от друга, дают аддитивный вклад все составляющие его  $N$  вихрей.

Основной вклад в интегральную излучаемую мощность (18) дают частотные диапазоны вблизи главных максимумов. Так, рассматривая спектральную плотность мощности излучения цуга в интервале частот от  $\omega_1/2$  до  $3\omega_1/2$ , можно видеть, что высоты добавочных максимумов в этом интервале составляют пять и менее процентов от высоты центрального пика — главного максимума в этом интервале частот. При этом вклад первого главного максимума в мощность, излучаемую в этом диапазоне частот, составляет  $\simeq 90\%$ .

Разъясним последнее утверждение другим способом. Из (11) следует, что  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n \simeq P_{2\pi}$ , поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{\text{zug},n} \simeq 0,9NP_{2\pi}. \quad (25)$$

Это означает, что для достаточно разреженных цугов мощность линий излучения на частотах  $\omega_n$  составляет  $\approx 90\%$  от мощности излучения по всему спектру. При этом основной вклад в сумму (25) дают лишь несколько первых членов. Так, при  $k_J \Xi = 10$  для первых трех гармоник из (11) находим  $P_1 \simeq 0,5P_{2\pi}$ ,  $P_2 \simeq 0,35P_{2\pi}$ ,  $P_3 \simeq 0,11P_{2\pi}$ . Поэтому для цуга имеем  $P_{\text{zug},1} \simeq 0,45NP_{2\pi}$ ,  $P_{\text{zug},2} \simeq 0,32NP_{2\pi}$ ,  $P_{\text{zug},3} \simeq 0,1NP_{2\pi}$ , что дает

$$P_{\text{zug},1} + P_{\text{zug},2} + P_{\text{zug},3} \simeq 0,87NP_{2\pi}.$$

Для больших  $N$  определенные по полувысоте ширины главных максимумов одинаковы и равны

$$\delta\omega_N \equiv 0,9\omega_1/N. \quad (26)$$

Так как все добавочные максимумы представляют собой мелкую рябь на фоне главных максимумов, можно утверждать, что спектр излучения цуга вихрей состоит из линий на частотах  $\omega \simeq \omega_n$ , ширины которых в  $\sim N\Xi k_J \gg 1$  раз меньше, чем спектральная ширина области излучения уединенного вихря.

Заметим, что на рис. 1 высоты первых трех главных максимумов сравнимы. Это позволяет высказать надежду, что реализация излучателя на базе бегущего цуга вихрей интересна возможностью одновременной генерации нескольких несущих частот.

Выше установлено, какой вклад в ширину спектральных линий излучения, генерируемого цугом в протяженном ДП, возникает из-за конечной длины цуга. Проведем сравнение этого вклада с вкладом тепловых флуктуаций в уширение линий. Флуктуации являются причиной нерегулярности распределения магнитного поля в ДП, что, в свою очередь, приводит к неперидичности цепочки вдоль ДП и, соответственно, к вкладу в ширину линий излучения [9,10].

Считая электроды достаточно толстыми, для оценки обусловленного тепловыми флуктуациями вклада в ширину линии излучения, генерируемого на частоте первой гармоники  $\omega_1$ , воспользуемся известным выражением, полученным для ДП с массивными электродами [10]:

$$\delta\omega_{1,T} = \frac{\lambda_J \omega_1^2}{4k_J v \Xi} \frac{\kappa_B T}{W} e^{k_J \Xi}, \quad (27)$$

где  $\lambda_J \equiv v_S/\omega_J$  — джозефсоновская длина,  $\kappa_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура,  $W \equiv \phi_0^2 L_y / 4\pi^3 \lambda \lambda_J$  — энергия вихря в ДП шириной  $L_y$ . Величина (27) определена по полуширине спектральной линии. Отметим,

что выражение (27) отличается от следующего из формулы (8) в работе [10] в  $\pi/2$  раз.

Выражение (27) позволяет ответить на вопрос о том, как в случае излучающего цуга соотносятся между собой величина  $\delta\omega_{1,T}$  и обусловленная конечным значением  $N$  ширина  $\delta\omega_N = 0,9\omega_1/N$  главного максимума спектрального распределения мощности излучения цуга. Эти величины равны друг другу, если число кинков, образующих цуг, составляет

$$N_{\text{eq}} = \frac{1,8k_J \Xi^2}{\pi \lambda_J} \frac{W}{\kappa_B T} e^{-k_J \Xi}. \quad (28)$$

Цуг из такого числа вихрей можно разместить в ДП, длина которого

$$L_z > \frac{1,8k_J \Xi^3}{\pi \lambda_J} \frac{W}{\kappa_B T} e^{-k_J \Xi}. \quad (29)$$

При реализации цугов с  $N > N_{\text{eq}}$  вклад флуктуаций в ширину линии излучения на частоте  $\omega = \omega_1$  будет превышать  $\delta\omega_N$ .

Используя соотношения (28) и (29), проведем необходимые оценки, демонстрирующие условия, в которых ширина  $\delta\omega_N$  спектральной линии первой гармоники, обусловленная конечным значением  $N$ , сравнима с уширением линии  $\delta\omega_{1,T}$ , обусловленным тепловыми шумами.

Для ДП с  $\lambda_J = 8$  мкм и шириной  $L_y = \lambda$ , находящегося при гелиевой температуре  $T = 4,2$  К, параметр  $\kappa_B T/W$ , определяющий интенсивность тепловых флуктуаций, равен  $1,3 \cdot 10^{-3}$ . Примем, что частота излучения первой гармоники  $\omega_1 = 1$  ТГц, а период цепочки  $\Xi$  в 3 раза превышает величину  $k_J^{-1}$ , определяющую размер отдельного вихря. В ДП с джозефсоновской плазменной частотой  $\omega_J = 140$  ГГц соотношение (28) дает  $N_{\text{eq}} \simeq 60$ , что отвечает длине ДП большей 380 мкм и скорости движения цуга  $0,96v_S$ . При этом относительное уширение линии излучения первой гармоники составляет 3%.

Подчеркнем, что экспериментальная реализация цепочки с такими характеристиками не требует сильных магнитных полей. Действительно, в рассматриваемом случае среднее магнитное поле внутри ДП равно  $\bar{H} = 0,59\phi_0/\lambda\lambda_J \simeq 16$  Гс, что примерно в 4 раза больше величины поля  $0,16\phi_0/\lambda\lambda_J$ , при превышении которого вихри начинают проникать в ДП [11]. При этом максимальное магнитное поле внутри ДП близко к  $\bar{H}$  и равно  $0,62\phi_0/\lambda\lambda_J$ , что заведомо меньше первого критического поля сверхпроводящих электродов, образующих ДП.

Итак, условие равенства вклада  $\delta\omega_{1,T}$  в ширину линии излучения на частоте  $\omega_1$ , обусловленного флуктуациями, и ширины  $\delta\omega_N$  главного максимума спектрального распределения мощности излучения цуга на



той же частоте выполнимо, если цуг состоит из не чрезмерно большого числа вихрей  $N = N_{\text{eq}}$ . В экспериментах с кольцевыми ДП сообщалось о возбуждении 70 вихрей [12]. При этом для создания вихрей использовался локальный нагрев сверхпроводящих электродов с помощью электронного пучка. Также на сегодняшний день экспериментально продемонстрирован метод контролируемого приготовления вихревых состояний в кольцевом ДП [13]. Этот метод, использующий локальную инжекцию тока в один из электродов ДП, позволяет создавать в кольцевом ДП любое необходимое число вихрей.

Для создания цугов с большим значением  $N$  в линейных ДП представляется возможным воспользоваться способом, основанном на явлении контролируемого рождения вихрей в Т-образном ДП, состоящем из двух ДП: основного и перпендикулярно присоединенного к нему дополнительного. Согласно работе [14], вихрь, движущийся по основному ДП, при прохождении места ответвления дополнительного ДП порождает в нем другой вихрь. Такой способ контролируемого рождения череды одиночных вихрей в дополнительном ДП реализован экспериментально в [15]. В этой работе в основной части Т-образного перехода с помощью постоянного магнитного поля и постоянного тока создавалось непрерывное однонаправленное движение вихрей, которые, последовательно проходя мимо места присоединения дополнительного ДП, рождали в нем вихри. Экспериментальное подтверждение возможности использования описанного в [14] явления также было получено и в другой геометрии, когда основной ДП был кольцевым [16]. Подбором соответствующего режима протекания транспортного тока через основной ДП указанный метод последовательной инжекции вихрей в дополнительный ДП представляется возможным использовать и для создания в дополнительном ДП цугов, состоящих из достаточно большого числа вихрей.

В случае ВТСП, характеризующихся большой энергетической щелью (соответствующей частотам  $\sim 10$  ТГц), возможна генерация не только первой гармоники, но и более высоких, на частотах  $\omega_n$  с номерами  $n \geq 2$ . Для них вклады в ширины линий  $\delta\omega_{n,T}$ , обусловленные тепловыми флуктуациями, растут как  $n^2$  [10], в то время как ширины полос главных максимумов, связанные с конечным числом вихрей в цуге  $\delta\omega_N$ , не зависят от  $n$ . Это, в частности, означает, что в случае цуга, состоящего из  $N_{\text{eq}}$  вихрей, когда величины  $\delta\omega_{1,T}$  и  $\delta\omega_N$  равны, для высших гармоник ширины линий  $\delta\omega_{n,T}$ , связанные с флуктуациями, будут в  $n^2$  раз больше, чем ширины линий, связанные с конечным значением  $N$ .

## Заключение

Найдено спектральное распределение мощности черенковского излучения цуга джозефсоновских вихрей, бегущего по протяженному джозефсоновскому сэндвичу. Определены величины ширин линий излучения, связанные с конечным размером цуга. Показано, что эти ширины могут быть сравнимыми и даже меньше уширения линий, связанного с тепловыми флуктуациями.

В заключение заметим, что поскольку реальная экспериментальная установка имеет конечную длину в направлении движения цуга, то, если число вихрей в цуге не поддерживается постоянным, составляющие его вихри, вообще говоря, могут погибать на краю перехода. Так как  $\delta\omega_N$  обратно пропорциональна числу вихрей в цуге, такое истощение цуга также может приводить к увеличению ширины спектральных линий черенковского излучения. Количественная оценка влияния взаимодействия цуга с краем перехода — предмет отдельного рассмотрения.

Авторы выражают благодарность К.С. Ческидовой за помощь в подготовке рисунка.

1. И.К. Янсон, *ФНТ* **30**, 689 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 515 (2004)].
2. X. Hu and S.-Z. Lin, *Supercond. Sci. Technol.* **23**, 1 (2010).
3. А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин, С.Г. Успенский, *ЖЭТФ* **134**, 310 (2008).
4. A.S. Malishevskii, V.P. Silin, S.A. Uryupin, and S.G. Uspenskii, *Phys. Lett. A* **372**, 712 (2008).
5. А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин, *ДАН* **440**, 615 (2011).
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2011).
7. В.С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, Москва (1979).
8. Д.В. Сивухин, *Общий курс физики. Оптика*, Наука, Москва (1980).
9. A.A. Golubov, B.A. Malomed, and A.V. Ustinov, *Phys. Rev. B* **54**, 3047 (1996).
10. A.P. Betenev and V.V. Kurin, *Phys. Rev. B* **56**, 7855 (1997).
11. И.О. Кулик, И.К. Янсон, *Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах*, Наука, Москва (1970).
12. H. Pressler, T. Doderer, S. Keil, D. Kruse, and A. Laub, *Phys. Lett. A* **244**, 149 (1998).
13. A.V. Ustinov, *Appl. Phys. Lett.* **80**, 3153 (2002).
14. D.R. Gulevich and F.V. Kusmartsev, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 017004 (2006).
15. H. Farhan-Hassan, D.R. Gulevich, P.N. Dmitriev, V.P. Koshelets, and F.V. Kusmartsev, *Flux-Flow Oscillator (FFO) Made with the Fluxon Cloning Circuits, NATO Science for Peace and Security, Series B: Physics and Biophysics*, 29 (2011).
16. D.R. Gulevich, M. Gaifullin, O.E. Kusmartseva, F.V. Kusmartsev, and K. Hirata, *Physica C* **468**, 1903 (2008).

Linewidth of the Cherenkov radiation  
of the Josephson vortex train

A.S. Malishevskii, V.P. Silin, and S.A. Uryupin

The widths of the spectral lines of the Cherenkov radiation of the Josephson vortex train, travelling in the long sandwich, are found. The conditions under which linewidths of radiation that result from finite

length of the train are comparable or even less than linewidths that result from thermal fluctuations have been established.

PASC: **74.50.+r** Tunneling phenomena; Josephson effect.

Keywords: Josephson junction, Josephson vortex, THz radiation.