Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2013, т. 39, № 10, с. 1123–1140

Теория сверхтекучих состояний с синглетным и триплетным типами спаривания в ядерной материи

С.Н. Шульга, Ю.В. Слюсаренко

Институт теоретической физики им. А.И. Ахиезера, ННЦ «ХФТИ»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: slusarenko@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 4 марта 2013 г.

Представлен ряд результатов исследования сверхтекучих состояний в ферми-жидкости в рамках ферми-жидкостного подхода. Особое внимание уделено изучению сверхтекучих состояний в ядерной материи, которые характеризуются суперпозицией синглетных и триплетных состояний в спиновом и изоспиновом пространствах. Сформулированы основные положения ферми-жидкостного подхода, используемые затем для исследования сверхтекучести в ядерной материи с суперпозицией синглетных и триплетных типов спаривания. Получена система уравнений самосогласования и ее решения. Определены условия существования рассматриваемых состояний. Эти условия накладывают определенные ограничения на потенциал взаимодействия и плотность числа частиц в системе. Показано, что состояния с полным набором ненулевых параметров порядка реализуются только в узком диапазоне плотности ядерной материи, ширина и расположение которого на шкале плотности зависит от конкретной параметризации используемого потенциала Скирма. Рассмотрены 18 различных параметризаций потенциала Скирма и указано, для каких из них возможно появление изучаемых видов сверхтекучих состояний. Исследована проблема устойчивости состояний с суперпозицией синглетных и триплетных типов спаривания. Показано, что наименьшему значению термодинамического потенциала отвечают чисто триплетные состояния, затем в порядке возрастания расположены чисто синглетные и смешанные синглет-триплетные состояния. Отдельно рассмотрен случай унитарных состояний, для которых также проанализированы решения системы уравнений самосогласования. Показано, что для таких состояний диапазон плотности, при которой они могут реализовываться, отличается от диапазона, соответствующего неунитарным состояниям. Рассмотрен вопрос о существовании унитарных сверхтекучих состояний с суперпозицией синглетной и триплетной сверхтекучести при наличии асимметрии ядерной материи. Показано, что в ядерной материи при появлении асимметрии нарушается унитарность по изоспину сверхтекучих состояний.

Представлено ряд результатів дослідження надплинних станів у фермі-рідині в рамках фермі-рідинного підходу. Особливу увагу приділено дослідженню надплинних станів у ядерній матерії, що характеризуються суперпозицією синглетних та триплетних станів у спіновому та ізоспіновому просторах. Сформульовано основні положення фермі-рідинного підходу, які потім використовуються для дослідження надплинності в ядерній матерії із суперпозицією синглетних та триплетних типів спарювання. Отримано систему рівнянь самоузгодження та її розв’язки. Визначено умови існування розглянутих станів. Ці умови накладають певні обмеження на потенціал взаємодії та густину числа частинок у системі. Показано, що стани з повним набором ненульових параметрів порядку реалізуються тільки у вузькому діапазоні густини ядерної матерії, ширина і розташування яких на шкалі густини залежить від конкретної параметризації використаного потенціалу Скірма. Розглянуто 18 різних параметризацій потенціалу Скірма і вказано, для яких з них можлива поява досліджуваних видів надплинних станів. Досліджено проблему стійкості станів із суперпозицією синглетних та триплетних типів спарювання. Показано, що найменшому значенню термодинамічного потенціалу відповідають чисто триплетні стани, далі у порядку зростання розташовуються чисто синглетні, потім — змішані синглет-триплетні стани. Окремо розглянуто випадок унітарних станів, для яких також проаналізовано розв’язки системи рівнянь самоузгодження. Показано, що для таких станів діапазон густини, при якій вони можуть реалізовуватися, відрізняється від діапазону, що відповідає неунітарним станам. Розглянуто питання щодо існування унітарних надплинних станів із суперпозицією синглетної й триплетної надплинності за наявності асиметрії ядерної матерії. Показано, що у ядерній матерії при появі асиметрії порушується унітарність за ізоспіном надплинних станів.

PACS: **21.65.–f** Ядерная материя;
26.60.–c Ядерная материя нейтронных звезд;
71.10.Ay Теория ферми-жидкости и другие феноменологические модели;
21.60.Jz Теория и приложения функционала ядерной плотности (включая приближения Хартри–Фока и беспорядочной фазы).

Ключевые слова: сверхтекучесть, ферми-жидкостный подход, уравнения самосогласования, параметр порядка, ядерная материя, потенциалы Скирма.

1. Введение

Сверхтекучесть и сверхпроводимость (которую можно рассматривать как сверхтекучесть в системе, состоящей из заряженных частиц) считаются одними из самых ярких примеров проявления квантовой природы материи на макроскопическом уровне. Со времени открытия этих явлений были обнаружены различные их формы в системах, физические свойства и характеристики которых могут сильно различаться. Поэтому объем исследований эффектов и явлений, связанных со сверхтекучестью и сверхпроводимостью, до сих пор неуклонно возрастает, причем по различным направлениям.

Одно из наиболее интересных направлений исследований — изучение состояний статистических систем с суперпозицией разных типов упорядочения. Чрезвычайно важной является и проблема получения характеристик сверхтекучести для исследуемых систем с наименьшим количеством модельных упрощений. Следует специально отметить, что во многих случаях эффекты, связанные с наличием сверхтекучести, проявляются в системах многих частиц со статистикой Ферми. Последнее ставит задачу об учете различных типов спаривания между частицами. Особое направление исследований порождено открытием сверхпроводников с двумя сверхтекучими щелями, такими как диборид магния ($\mathrm{MgB_2}$) [1–4]. Огромное количество работ посвящено развитию исследований сверхтекучести ядерной материи и открытию разных, в том числе многощелевых, сверхтекучих состояний в ней.

Ядерная материя — модель, часто применяемая для описания свойств объектов, состоящих из нуклонов — нейтронов и протонов. В этой модели игнорируются граничные эффекты, а сама система считается бесконечной. Отсюда становится понятным, что данная модель должна лучше всего описывать объекты, состоящие из большого числа нуклонов, например тяжелые ядра или такие астрономические объекты, как нейтронные звезды. Необходимо отметить также следующее обстоятельство. Несмотря на то что ядерная материя, в состав которой входят протоны, является заряженной системой, в этой модели кулоновскими силами пренебрегают, и считается, что она не распадается под действием электрических сил. Для устранения такого противоречия подразумевается существование электронного фона, нейтрализующего положительный протонный заряд. Сами же электроны в ядерных взаимодействиях не участвуют, поэтому они в модели ядерной материи могут не рассматриваться.

Как квантовая система, состоящая из фермионов, ядерная материя может обладать свойством сверхтекучести. Сверхтекучесть нуклонов (протонов и нейтронов) позволяет описывать многие свойства ядер. На необходимость изучения сверхтекучести ядер и ядерной материи впервые указали Н.Н. Боголюбов в 1958 г. [5] и независимо О. Бор, Б. Моттельсон, Д. Пайнс [6]. Последовательное описание сверхтекучести в ядрах затруднено из-за значительного влияния краевых эффектов, однако приближение ядерной материи достаточно точно описывает некоторые свойства тяжелых ядер, а особенно — нейтронных звезд. Следует отметить, что А.Б. Мигдалом разработана теория, позволяющая описывать свойства ядерного вещества именно в конечных системах [7].

В общем случае ядерная материя является системой двухкомпонентной. Принципиальное различие между работой с такой системой и однокомпонентной ферми-жидкостью состоит в том, что здесь необходим учет второго компонента, наличие которого меняет свойства системы. Это производится посредством введения изоспина. Он рассмотрен еще в 1932 г. В. Гайзенбергом [8] для того, чтобы объяснить симметрии, возникающие в связи с учетом незадолго до этого открытого нейтрона. В работе [9] изоспин предложено использовать для исследования ядерной материи, которая рассматривалась как двухкомпонентная ферми-жидкость. Протоны и нейтроны трактуются как одна и та же частица — нуклон, находящаяся в различных состояниях, которые задаются проекциями изоспина. Величина изоспина нуклона равна $1/2$.

В общем случае нельзя говорить о полной изотопической инвариантности: возможны дополнительные эффекты, связанные с различием электрического заряда или различием массы в частицах с разными проекциями изотопического спина. В то же время понятием изотопической инвариантности можно с успехом пользоваться, если возможно пренебречь такими различиями в свойствах нуклонов. С математической точки зрения работа с изоспином аналогична работе с обычным спином (используются матрицы Паули в так называемом изотопическом пространстве): в ядерной физике принято считать проекцию изоспина протона равной $-1/2$, а нейтрона $+1/2$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что учет изоспиновой переменной приводит к появлению дополнительных свойств симметрии.

Классификация и описание проявлений сверхтекучести в различных физических системах реализуется посредством различных методов, таких как теория Гинзбурга–Ландау, метод функций Грина, метод коллективных переменных, метод БКШ для описания сверхпроводимости и других. Среди этих методов наиболее перспективным представляется так называемый ферми-жидкостный подход, который используется как мощный инструмент исследования различных явлений и процессов в ферми- и бозе-системах, в частности явлений, связанных с наличием сверхтекучести в ядерной материи.

2. Краткий обзор исследований сверхтекучих ферми-систем в рамках ферми-жидкостного подхода

Ферми-жидкостный подход является полуфеноменологическим методом, поскольку наряду с такими микроскопическими понятиями, как функции распределения, в нем используется феноменологическое представление потенциала взаимодействия. В силу общности этого метода он позволяет исследовать разные типы ферми- и бозе-систем, что свидетельствует о его перспективности для исследований в физике квантовых жидкостей, сверхпроводников, в ядерной физике и астрофизике.

Ферми-жидкостный подход основан на теории нормальной ферми-жидкости, развитой Ландау применительно к жидкому ^{3}He [10] и обобщенной Силиным на электроны в металлах [11]. Следует отметить, что даже в рамках этой теории возможно описание некоторых «экзотических» фазовых переходов [12,13] и предсказание ряда других интересных явлений в нормальной ферми-жидкости [14,15], в том числе в ядерной материи [16]. Однако для описания сверхтекучих состояний ферми- и бозе-систем теория Ландау–Силина требовала кардинальной модификации.

Обобщение теории Ландау–Силина на случай сверхтекучих состояний и дальнейшее развитие этой теории было проведено в работах [17–19], а наиболее полно основные положения построенного ферми-жидкостного подхода изложены в обзорах [20,21]. Данная теория уже продемонстрировала свою успешность при изучении сверхтекучих состояний в различных ферми-системах. Проиллюстрируем перспективность ферми-жидкостного подхода для описания различных ферми-систем при наличии сверхтекучих состояний кратким перечнем конкретных примеров.

Так, в рамках ферми-жидкостного подхода в [22] развита теория двухкомпонентной сверхпроводящей ферми-жидкости с двумя перекрывающимися энергетическими зонами, применимая для электронов в металле, а также получена система уравнений, обобщающая уравнения Гинзбурга–Ландау на случай систем с двумя параметрами порядка. В работе [23] с помощью ферми-жидкостного подхода изучены триплетные состояния в ферми-жидкости.

В [24] на основе ферми-жидкостного подхода рассматривалась сверхтекучая ферми-жидкость с триплетным спариванием в магнитном поле. При этом изучаемой системой является система электронейтральных фермионов, обладающих магнитным моментом, какой могут быть ^{3}He или нейтроны в нейтронной звезде. Построена система уравнений самосогласования для такого случая. Полученные уравнения позволяют решить задачу о триплетном спаривании как для унитарных, так и для неунитарных случаев. В работах [25,26] в рамках этого же подхода изучались триплетные по спину сверхтекучие состояния нейтронной материи в сильном постоянном однородном магнитном поле. Получены аналитические формулы для температуры перехода в сверхтекучее состояние. Параметр порядка здесь представлен в виде суммы слагаемых, отвечающих за разные проекции спинов в куперовских парах. Также в работах [27,28] рассмотрены неунитарные фазы с триплетным по спину спариванием в сверхтекучей ферми-жидкости в магнитном поле.

В работе [29] изучалась сверхтекучесть симметричной ядерной материи. Исследована зависимость критической температуры от плотности. При температуре, равной нулю, определена зависимость от плотности энергетической щели в спектре квазичастиц для унитарных и неунитарных состояний. Также было показано, что при плотностях, близких к плотности насыщения, реализуется сверхтекучая фаза, в которой присутствует спаривание протона с нейтроном, а также указана возможность перехода по плотности из этой фазы в фазы с синглет-синглетным и триплет-триплетным спариваниями нуклонов. В этой работе отдельно рассмотрены уравнения для определенных комбинаций компонент параметра порядка.

Некоторые свойства ферми-систем, связанные с существованием суперпозиции синглетного и триплетного спаривания в системе фермионов, рассмотрены в [30]. Получены температуры перехода и определена температурная зависимость параметров порядка вблизи критической температуры. Описан механизм возникновения таких состояний и исследована их термодинамика. Считалось, однако, что в этом случае структура параметра порядка представляется только двумя числовыми компонентами (т.е. триплетная часть параметра порядка представлена только одним числом). В [31] изучали асимметричную ядерную материю с триплет-синглетным спариванием в предположении, что параметр порядка состоит лишь из одной компоненты.

Интересным представляется исследование, результаты которого изложены в [32]. Здесь, в отличие от теории БКШ, рассмотрен случай, когда взаимодействие между частицами системы не обменное (обмен фононом), а потенциальное. Такой системой является электронно-позитронная плазма, в которой спаривание обусловлено прямым экранированным кулоновским взаимодействием, причем спаривание частиц происходит между фермионами разных сортов. В данном случае результаты могут качественно отличаться от результатов теории БКШ. Авторы замечают, что предложенный ими метод может быть использован и для других систем из двух сортов фермионов: электронно-ионной плазмы, ядерной материи. В подобных задачах имеют место не один, а два закона сохранения фермионов, что позволяет избежать логарифмической особенности, которая существует в теории БКШ с фермионами одного сорта.

Работы [33] и [34] посвящены многощелевым состояниям в ядерной материи. В них показано, что при понижении плотности могут возникать состояния с суперпозицией синглет-триплетного (ST) и триплет-синглетного (TS) спариваний нуклонов. В этих работах триплетная составляющая параметра порядка также представлена только одной, третьей компонентой. Такие состояния возникают при ответвлении от однощелевого ST решения. Таким образом, как показано в [33], при низких плотностях существенное влияние на сверхтекучие свойства оказывают состояния с суперпозицией синглет-триплетного и триплет-синглетного спариваний, что может приводить к образованию многощелевых состояний.

Отметим, что в большинстве из перечисленных работ исследованы переходы между нормальным и сверхтекучим состояниями. Однако при понижении температуры сверхтекучая ферми-жидкость может перейти в новое сверхтекучее состояние. Такие состояния будут характеризоваться не одним, а несколькими параметрами порядка и иметь более низкую симметрию, чем первоначальное сверхтекучее состояние.

Примеры таких переходов из одного сверхтекучего состояния в другое в системах фермионов, состоящих из одного и двух сортов частиц, рассмотрены в работе [35]. В первом случае куперовские пары имеют неопределенное значение спина, ноль или единицу, что представляет собой синглет-триплетное спаривание фермионов. Во втором случае состояния представляют собой синглет-триплетное и триплет-синглетное спаривание в спиновом и изоспиновом пространствах. В случае двухкомпонентной системы рассмотрены унитарные состояния, причем с одним параметром порядка, определяемым при условии, что проекции общего спина и изоспина равны нулю. Решения с одним параметром порядка являются одним из частных случаев возможных состояний.

Работа [36] посвящена изучению суперпозиции сверхтекучих синглет-синглетных (SS) и ST состояний в ядерной материи. Здесь параметр порядка представляет собой комбинацию синглетной и триплетной частей, так что триплетная компонента состоит из одного слагаемого в разложении по матрицам Паули. В работе [37] рассмотрены триплет-синглетные состояния, а также суперпозиция TS и ST состояний в симметричной ядерной материи с движущимся конденсатом.

Различные системы на основе ферми-жидкостного подхода рассмотрены также в [38]. В частности, изучены ферми-жидкости с синглетным [17] и триплетным [39,40] спариваниями, магнитные системы со спонтанно нарушенной симметрией [41], сверхтекучесть электрон-позитронной плазмы [32]. Ферми-жидкостный подход рассматривается также в монографиях [42–44]. С использованием ферми-жидкостного подхода были также рассмотрены различные фазовые переходы со скалярным и тензорным параметрами порядка [44].

Кроме перечисленных работ, в которых рассмотрены пространственно однородные состояния, была предпринята попытка изучить сверхтекучее состояние в ферми-жидкости с одновременным спиральным упорядочением спинов [45]. Идея об описании такого состояния в сверхтекучей ферми-жидкости подсказана результатами работы [46]. Это состояние является пространственно неоднородным и, хотя теория сверхтекучей ферми-жидкости пригодна для однородных состояний, оказалось возможным ее применение для изучения указанного типа состояний. Для этого удалось найти унитарное преобразование, которое переводит сверхтекучее состояние в ферми-жидкости с одновременным спиральным упорядочением спинов в эффективно пространственно однородное состояние. Такие состояния в рассмотренной модели оказались чисто триплетными, поскольку в тех из них, которые являлись суперпозицией синглетных и триплетных куперовских пар, зависимость от параметра спирали исключалась из уравнений самосогласования при соответствующем смещении в импульсном пространстве.

В настоящей работе приведен далеко не полный перечень работ, которые подтверждают исключительную продуктивность ферми-жидкостного подхода с точки зрения его приложений для исследования вопросов сверхтекучести в различных физических системах. Из имеющихся же на данный момент публикаций следует, что ядерная материя по-прежнему представляет собой богатый резервуар новых форм сверхтекучих состояний. В частности, представляются малоизученными состояния с одновременным существованием синглетного и триплетного типов спаривания в ядерной материи. По этой причине интересно изучение соответствующей модели в рамках ферми-жидкостного подхода. Таким образом, описание состояний с одновременным существованием синглетного и триплетного типов спаривания в ядерной материи на основе этого подхода может рассматриваться как наиболее последовательное. Такое описание позволяет получить и решить системы уравнений самосогласования для параметров порядка двухкомпонентной ферми-жидкости с синглетным и триплетным спариванием, изучить термодинамические свойства полученных состояний. Становится возможным также проанализировать условия существования унитарных состояний с синглетной и триплетной сверхтекучестью в двухкомпонентной ферми-жидкости при наличии асимметрии ее состава. Из-за малоизученности таких состояний представим в настоящей работе более подробно результаты, связанные с исследованиями отмеченных систем (см. в этой связи также [47–49]). С этой целью приведем сначала краткое изложение идейных и математических основ ферми-жидкостного подхода.

3. Основные положения ферми-жидкостного подхода

Исходным положением теории ферми-жидкости Ландау является предположение о том, что частицы-фермионы в результате взаимодействия превращаются в квазичастицы [10]. Тем самым в описании системы становится необходимым переход к языку квазичастиц, как квантов коллективных возбуждений. В рамках модели считается, что взаимодействие между исходными фермионами является сильным, тогда как квазичастицы сильно взаимодействуют с самосогласованным полем всех остальных квазичастиц. При этом предполагается, что квазичастицы слабо взаимодействуют друг с другом. Это дает возможность рассматривать их как слабонеидеальный газ. Понятно, что квазичастицы имеют уже иной закон дисперсии, чем исходные фермионы. Масса изначальных фермионов заменяется эффективной массой квазичастиц, которая учитывает наличие сильного взаимодействия между исходными фермионами. В случае нормальной (несверхтекучей) системы слабонеидеальный газ квазичастиц описывается неравновесным статистическим оператором ρ_0 [50]:

$$\rho_0\left(f\right) = \exp\left(\Omega - F\right). \qquad (1)$$

В этой формуле f — одночастичная функция распределения нормальной системы, Ω — термодинамический потенциал, который определяется из условия нормировки ρ_0, а F — свободная энергия.

Для описания возможных состояний сверхтекучей ферми-жидкости задается функционал энергии $E(f,g)$, который зависит от нормальной f_{12} и аномальной g_{12} одночастичных матричных функций распределения соответственно. Под индексом «1» или «2» понимается набор квантовых чисел, соответствующих 1-й или 2-й квазичастице, например: $\mathbf{p}_1, \alpha_1, a_1$, где $\mathbf{p}_1$ — импульс, а символами α_1 и a_1 обозначены проекции спина и изоспина 1-й квазичастицы ферми-жидкости. Функции распределения f_{12} и g_{12} вводятся согласно определений

$$f_{12} = \mathrm{tr}\,\rho_0 a_2^+ a_1,\; g_{12} = \mathrm{tr}\,\rho_0 a_2 a_1,\; g_{12}^+ = \mathrm{tr}\,\rho_0 a_2^+ a_1^+. \qquad (2)$$

Здесь a_i^+ и a_i — операторы рождения и уничтожения фермиона с индексом i в состоянии (p,σ) (импульс и проекция спина). Знак «tr» означает в этой формуле след в пространстве одночастичных состояний. Для полуфеноменологической теории функционал $E(f,g)$ является аналогом гамильтониана системы последовательной микроскопической теории.

Отметим, что в соответствии с определениями функции f и g обладают свойствами

$$f^+ = f, \quad g^T = -g. \qquad (3)$$

Здесь и в дальнейшем в работе знак «T» означает перестановку частиц местами (транспонирование по всем индексам). В равновесном состоянии аномальная функция распределения равна нулю, если температура системы превышает некоторую критическую температуру T_c (нормальное состояние).

Матричный формализм позволяет включить естественным образом сверхтекучие корреляции в системе. Энергия квазичастиц ферми-жидкости ε и параметр порядка Δ являются матрицами и определяются как функциональные производные от энергии $E(f,g)$ по f и g^+:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial E(f,g)}{\partial f_{21}}, \qquad \Delta_{12} = 2\frac{\partial E(f,g)}{\partial g_{21}^+}. \qquad (4)$$

Эти величины имеют свойства, аналогичные свойствам (3),

$$\varepsilon^+ = \varepsilon,\; \Delta^T = -\Delta. \qquad (5)$$

Заметим, что определения (4) одновременно являются и уравнениями самосогласования для определения функций распределения и параметров порядка.

Благодаря свойствам симметрии (3) и (5) введенных в рассмотрение матриц можно определить их разложение по матрицам Паули σ_i, $i = 1, 2, 3$ и τ_i следующим образом:

$$f = f_{00} + f_{i0}^{(\sigma)}\sigma_i + f_{0j}^{(\tau)}\tau_j + f_{ij}^{(\sigma\tau)}\sigma_i\tau_j,$$
$$g = g_{00}\sigma_2\tau_2 + g_{i0}^{(\sigma)}\sigma_i\sigma_2\tau_2 + g_{0j}^{(\tau)}\sigma_2\tau_j\tau_2 + g_{ij}^{(\sigma\tau)}\sigma_i\sigma_2\tau_j\tau_2, \tag{6}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{00} + \varepsilon_{i0}^{(\sigma)}\sigma_i + \varepsilon_{0j}^{(\tau)}\tau_j + \varepsilon_{ij}^{(\sigma\tau)}\sigma_i\tau_j,$$
$$\Delta = \Delta_{00}\sigma_2\tau_2 + \Delta_{i0}^{(\sigma)}\sigma_i\sigma_2\tau_2 + \Delta_{0j}^{(\tau)}\sigma_2\tau_j\tau_2 + \Delta_{ij}^{(\sigma\tau)}\sigma_i\sigma_2\tau_j\tau_2. \tag{7}$$

С математической точки зрения описание изотопических свойств системы во многом аналогично описанию ее магнитных свойств. По этой причине матрицы σ_i и τ_i представляют собой одни и те же хорошо известные двухрядные матрицы Паули. Разница заключается в том, что матрицы σ_i, как мы предполагаем, действуют в спиновом пространстве, тогда как матрицы τ_i — в изоспиновом пространстве. В дальнейшем мы не рассматриваем состояния, которые описываются параметрами, являющимися векторами одновременно в спиновом и изоспиновом пространствах. В связи с этим мы не будем делать различий между обозначениями векторов в спиновом и изоспиновом пространствах. В каждом конкретном случае будем подразумевать, что векторы определены в том пространстве (спиновом или изоспиновом), о котором в данный момент идет речь. Поскольку исторически сложилось так, что общая теория ферми-жидкости была разработана прежде всего с учетом магнитных свойств системы, в общих формулах нами в основном будут использоваться матрицы σ_i. Переход к матрицам τ_i осуществляется там, где изучаются свойства ядерной материи, связанные с наличием изоспина.

Кроме того, заметим, что в настоящей работе предлагается различать обозначения векторов в координатном и импульсном пространствах (обозначая их жирным шрифтом) и векторов в спиновом и изоспиновом пространствах (обозначая их стрелками).

В рассматриваемой нами модели предполагается, что функционал энергии $E(f, g)$ инвариантен относительно пространственных трансляций и спиновых поворотов и обладает следующей структурой:

$$E(f, g) = E_0(f) + E_1(f) + E_2(g), \tag{8}$$

причем со взаимодействием между частицами связаны только второе и третье слагаемые в этой формуле: оно определяется квадратичными по нормальной и аномальной функциям распределения функционалами [29]:

$$E_1(f) = \frac{1}{2V}\sum_{1..4} v(1234)(f_{31}f_{42} - f_{32}f_{41}), \tag{9}$$

$$E_2(g) = \frac{1}{2V}\sum_{1...4} v(1234)g_{21}^{+}g_{34} \tag{10}$$

(приближение Хартри–Фока–Боголюбова), а само взаимодействие имеет следующую структуру:

$$v(1234) =$$
$$= v_0(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4)\delta_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_4} + v_1(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4)\vec{\sigma}_{\alpha_1\alpha_3}\vec{\sigma}_{\alpha_2\alpha_4} + \ldots \tag{11}$$

В этой формуле многоточие указывает на то, что нами опущены слагаемые, связанные с наличием изоспиновых переменных. Такие слагаемые учтены в более общей формуле ниже (см. (14)). Поскольку среднее значение оператора $a_1^{+}a_1$ точно определяется уже нулевым приближением [17], т.е. статистическим оператором (1) (см. в этой связи также [50]), нормальные и сверхтекучие амплитуды в предыдущих формулах определяются одной и той же величиной $v(1234)$.

Вследствие предполагаемой галилеевой инвариантности системы амплитуды взаимодействия v_0 и v_1, содержащие символ Кронекера $\delta_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2,-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4}$, не должны зависеть от суммарного импульса $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ [51, с. 64]. Тогда v_0 и v_1 можно записать в виде

$$v_0(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = v_0(\mathbf{k}, -\mathbf{k}; \mathbf{k}', -\mathbf{k}) \equiv v_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}'),$$
$$v_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = v_1(\mathbf{k}, -\mathbf{k}; \mathbf{k}', -\mathbf{k}') \equiv v_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \tag{12}$$

и, таким образом,

$$v(1234) = v(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)_{\alpha_{1..4}a_{1..4}} = v(\mathbf{k}; \mathbf{k}')_{\alpha_{1..4}a_{1..4}}, \tag{13}$$

где

$$2\mathbf{k} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \quad 2\mathbf{k}' = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4.$$

Из эрмитовости гамильтониана следует, что $v_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = v_0^{*}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ и $v_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = v_1^{*}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$.

В самом общем случае, как уже отмечалось, потенциал $v(1234)$ может быть разложен по матрицам Паули в спиновом и изоспиновом пространствах:

$$v(1234) = u_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + u_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')P_\sigma + u_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')P_\tau + u_3(\mathbf{k}, \mathbf{k}')P_\sigma P_\tau, \tag{14}$$

где

$$2P_{\sigma_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}} = (1 + \vec{\sigma}\vec{\sigma})_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = \delta_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_4} + \vec{\sigma}_{\alpha_1\alpha_3}\vec{\sigma}_{\alpha_2\alpha_4},$$
$$2P_{\tau_{a_1a_2a_3a_4}} = (1 + \vec{\tau}\vec{\tau})_{a_1a_2a_3a_4} = \delta_{a_1a_3}\delta_{a_2a_4} + \vec{\tau}_{a_1a_3}\vec{\tau}_{a_2a_4},$$

Из формул (4), (9), (10) следует, что матрицы ε_{12} и Δ_{12} связаны с нормальной и аномальной функциями распределения f и g соотношениями

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2V}\sum_{3,4}\left[v(4132) + v(1423) - v(1432) - v(4123)\right] f_{34}, \tag{15}$$

$$\Delta_{12} = \frac{1}{V}\sum_{3,4} v(1234)g_{34}. \tag{16}$$

Соотношение (16) устанавливает связь между параметром порядка Δ_{12}, амплитудами взаимодействия $v(1234)$ и аномальной функцией распределения g_{12}.

При введении в рассмотрение сверхтекучести, что предполагает добавление аномальной матрицы распределения, выражение для энтропии, определяемой на основании неравновесного статистического оператора $S = -\,\mathrm{Sp}\;\rho_0 \ln \rho_0$ может быть записано в виде

$$S = -\,\mathrm{Sp}\;\hat{f}\ln\hat{f}, \tag{17}$$

где

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f & g \\ g^{+} & (1-f)^{T} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В этой формуле подразумевается, что шпур берется в расширенном пространстве, где действует двухрядная блочная матрица $\hat{f}$ [17]. Отметим, что подобное объединение нормальной и аномальной функций распределения в двухрядных матрицах применялось и ранее, см. [52–54].

Проблема вычисления шпуров в выражениях типа (17) так или иначе связана с процедурой диагонализации входящих в эти выражения матриц. Для осуществления такой диагонализации вводится специфическое унитарное преобразование Боголюбова, которое задается посредством унитарной матрицы $\hat{U}$, преобразующей $\hat{f}$ в $\hat{f}'$: $\hat{f}' = \hat{U}^{+}\hat{f}\hat{U}$ и не меняющей величины шпура, причем $\hat{U}$ имеет структуру

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^{*} & u^{*} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Как показано в [18], проблема диагонализации тем самым сводится к нахождению матрицы X, определяемой выражением $v = Xu^{*}$, из уравнения

$$X\Delta^{+}X - \xi X - X\xi^{T} - \Delta = 0, \tag{20}$$

где

$$\xi = \varepsilon - \mu, \tag{21}$$

а μ — химический потенциал. Здесь следует отметить, что ξ, аналогично ε, может быть разложена в пространстве матриц Паули на скалярную и векторную составляющие (см. (7)), $\xi = \xi_0 + \vec{\xi}\vec{\sigma}$ (см. комментарий после формул (6), (7)).

Заметим также, что матрица X обладает свойством $X^{T} = -X$, поэтому ее структуру можно представить следующим образом:

$$X = (X_0 + \vec{X}\vec{\sigma})\sigma_2\tau_2. \tag{22}$$

Решая уравнение (20), можно определить нормальную и аномальную матричные функции распределения с помощью формул [18,21]

$$\begin{aligned} f &= Kn + X(1-n)^{T}X^{+}K, \\ g &= K(1-n)X - Xn^{T}K^{T}, \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$K = \left(1 + XX^{+}\right)^{-1}, \quad n = \left[\exp\left(\frac{\xi - X\Delta^{+}}{T}\right) + 1\right]^{-1}. \tag{24}$$

Напомним, что определения (4) одновременно являются и уравнениями самосогласования для нахождения функций распределения и параметров порядка, так как функционал энергии нелинеен по отношению к функциям распределения.

Энергетический спектр элементарных возбуждений сверхтекучей ферми-жидкости определяется набором собственных значений матрицы [45]

$$\mathcal{E} = \xi - X\Delta^{+}. \tag{25}$$

Как выясняется, величина $\mathcal{E}$, как матрица в спиновом и изоспиновом пространствах, в общем случае может иметь до четырех разных собственных значений. Вследствие этого мы утверждаем, что спектр элементарных возбуждений может быть многощелевым.

В работе [45] показано, что задача отыскания решений сложного матричного уравнения (20) одновременно с нахождением собственных значений матрицы $\mathcal{E}$ может быть сведена к решению алгебраического бикубического уравнения относительно величины ζ (здесь и ниже см. также комментарий после формул (6), (7)):

$$\zeta^{6} - \zeta^{4}\varepsilon_0^{2} + \zeta^{2}(\varepsilon_0^{2}\vec{b}^{2} - \vec{b}^{2}\vec{b}^{2} + \vec{\varepsilon}^{2}) - (\vec{c}\vec{b})^{2} = 0, \tag{26}$$

где $-\zeta$ является скалярной частью разложения матрицы $\mathcal{E}$ по матрицам Паули:

$$\mathcal{E} \equiv -\zeta - \vec{y}\vec{\sigma}, \tag{27}$$

а вектор $\vec{c}$ определяется из произведения $\Delta\Delta^{+}$:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta^{+} &= \Delta_0\Delta_0^{*} + \vec{\Delta}\vec{\Delta}^{*} + 2\vec{c}\vec{\sigma}, \\ 2\vec{c} &\equiv \Delta_0\vec{\Delta}^{*} + \Delta_0^{*}\vec{\Delta} + i\left[\vec{\Delta}, \vec{\Delta}^{*}\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Специально отметим, что уравнение (26) получено в общем случае. Процедура его вывода изложена в Приложении к настоящей работе. По этой причине в ферми-жидкостном подходе приведенное бикубическое уравнение имеет универсальный характер и может быть применено при решении уравнений самосогласования для различных ферми-систем со сверхтекучими состояниями. В некоторых случаях бикубическое уравнение (26) может быть значительно упрощено, превращаясь, например для унитарных состояний, в биквадратное уравнение [49].

Окончательное решение задачи о собственных значениях матрицы $\mathcal{E}$ (спектр элементарных возбуждений системы) определяется выражениями [45]

$$E_{\pm} = -\zeta \pm |\vec{y}|, \quad |\vec{y}| = \sqrt{\varepsilon_0^2 - \zeta^2 - 2(\vec{\varepsilon}\vec{b}/\zeta)}, \qquad (29)$$

где

$$\varepsilon_0^2 = \xi_0^2 + \vec{\xi}^{\,2} + \Delta_0 \Delta_0^* + \vec{\Delta}\vec{\Delta}^*, \qquad (30)$$

$$\vec{\varepsilon} = \xi_0(\vec{\xi} - \vec{b}) - i[\vec{\xi}, \vec{b}] + \frac{1}{2}(\Delta_0 \vec{\Delta}^* + \Delta_0^* \vec{\Delta} + i[\vec{\Delta}, \vec{\Delta}^*]), \qquad (31)$$

$$\vec{b} = \frac{1}{D^*}\left(i\Delta_0^*[\vec{\xi}, \vec{\Delta}^*] - (\vec{\Delta}^* \vec{\xi})\vec{\Delta}^* + (\vec{\xi}\vec{\Delta}^*)\vec{\Delta}^* \right) \qquad (32)$$

и

$$D^* \equiv \vec{\Delta}^* \vec{\Delta}^* - \Delta_0^* \Delta_0^*.$$

Процедура получения выражения для вектора $\vec{y}$ приведена в Приложении. Таким образом, формулы (30)–(32) определяют спектр элементарных фермионных возбуждений (29) в терминах исходных величин ξ и Δ и величины ζ, которая находится из бикубического уравнения (26).

Матрица же X, ответственная за процедуру диагонализации, в терминах результатов решения уравнения (26) определяется формулами (см. (22))

$$X_0 = \frac{1}{D^*}\left\{ (\vec{y} + \vec{\xi}, \vec{\Delta}^*) - (\zeta + \xi_0)\Delta_0^* \right\}, \qquad (33)$$

$$\vec{X} = \frac{1}{D^*}\left\{ i[\vec{y} + \vec{\xi}, \vec{\Delta}^*] + \vec{\Delta}^*(\zeta + \xi_0) - \Delta_0^*(\vec{y} + \vec{\xi}) \right\}. \qquad (34)$$

Покажем теперь, как методика ферми-жидкостного подхода может быть использована для описания сверхтекучих состояний в ядерной материи с суперпозицией синглетных и триплетных состояний.

4. Сверхтекучесть в ядерной материи с суперпозицией синглетных и триплетных состояний

Прежде всего отметим, что в большинстве работ сверхтекучесть ядерной материи рассматривалась как сверхтекучесть протонного и нейтронного компонентов по отдельности, а спаривание протонов с нейтронами не учитывалось: считалось, что в ядрах оно незначительно. Кроме того, не существовало удобных методов для учета такого спаривания. Тем не менее возможности протон-нейтронного спаривания рассматривались ранее в некоторых работах, например в [9,55]. В первой из этих работ показано, что такие спаривания приводят к существенному изменению корреляционных функций нуклонов ядра. Теория парных корреляций в ядрах описана в отдельной главе монографии [56] (с. 311–341). В последние десятилетия возродился интерес к изучению протон-нейтронных корреляций в ядре [57,58], симметричной [59–61] и асимметричной ядерной материи [62].

В целом в изучаемой модели сверхтекучая ферми-жидкость может находиться в синглет-синглетном, синглет-триплетном, триплет-синглетном и триплет-триплетном (TT) состояниях или в их суперпозициях (первая буква в этих обозначениях связана со спиновыми состояниями куперовской пары, вторая — с ее изоспиновыми состояниями; S соответствует синглетному спариванию, T — триплетному спариванию). К примеру, в работах [29,30] изучалась возможность суперпозиции сверхтекучих TS и ST состояний нейтрон-протонной куперовской пары. Было показано, что такие состояния принципиально возможны.

Следует также отметить, что если ранее основное внимание при исследованиях ядерной сверхтекучести уделялось системам с такими предельными вариантами состава, как системы с симметричным составом нуклонов и чисто нейтронная материя, то сегодня в мире растет интерес к изучению сверхтекучести в асимметричной ядерной материи. Это связано не только с меньшей степенью исследованности данного типа систем, но и с необходимостью решать такие проблемы, как, например, описание ядер на пределе β-стабильности, или таких объектов, как протон-нейтронных звезд. Интерес же к изучению сверхтекучести в нейтронной материи появился еще в 80-е годы [63]. В качестве примера работ, посвященных исследованию сверхтекучести в асимметричной ядерной материи, можно привести работы [64–69], в которых особое внимание уделяется потенциалу взаимодействия между нуклонами. Вызывают интерес недавно вышедшие статьи [70,71], в которых проблемы ядерной сверхтекучести в асимметричной ядерной материи решаются на основании модели взаимодействия Скирма с использованием теории ферми-жидкости. Следует заметить, однако, что структура параметра порядка в этих работах более простая, чем та, которая принимается за основу в нашей работе.

Можно назвать и другие примеры изучения отдельных проблем, связанных с наличием смешанных синглет-триплетных сверхтекучих состояний в ядерных системах, например [57,72]. В этих работах, однако, не была показана возможность существования именно основного состояния с такой суперпозицией. Синглет-триплетные состояния по обычному спину в тяжелых ядрах рассматривались в работе [73]. Здесь уже были представлены решения уравнений Боголюбова–де Жена для основного состояния с синглет-триплетным спариванием.

В настоящей работе спаривания нуклонов рассматриваются как синглетные по обычному спину. Иными словами, рассмотрим суперпозицию сверхтекучих SS и ST состояний, когда могут существовать нейтрон-нейтронные, нейтрон-протонные и протон-протонные куперовские пары с общим суммарным изоспином куперовской пары, равным нулю либо единице. Точно так же (путем формальной замены изотопических индексов на спиновые) могут быть рассмотрены состояния с суперпозицией SS и TS спариваний. В этом случае определение «триплетное» будет относиться не к изотопическим, а к магнитным свойствам. Принципиальное различие в этих случаях будет заключаться только в симметрии параметров порядка по импульсам, либо в том, с каким набором матриц Паули (в спиновом или в изоспиновом пространстве) необходимо работать, в зависимости от изучаемой системы и типа состояний. Однако с точки зрения математики получается, что проявления совершенно разных физических свойств описываются совершенно одинаково.

Рассмотрим далее симметричную сверхтекучую ядерную материю (в которой плотности нейтронов и протонов равны друг другу). Будем предполагать, что в этой системе существуют нейтрон-нейтронные, протон-нейтронные и протон-протонные куперовские пары. Это означает, что изоспин куперовских пар может равняться как 0, так и 1, и является неопределенным. Будем также считать, что обычный спин куперовских пар равен нулю, т.е. изучаются SS и ST сверхтекучие состояния и их суперпозиция.

Матричный параметр порядка для таких состояний можно представить в виде

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{pp} & \Delta_{pn} \\ \Delta_{np} & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \sigma_2, \tag{35}$$

где параметры порядка Δ_{pp}, Δ_{pn}, Δ_{np}, Δ_{nn} соответствуют протон-протонным, протон-нейтронным и нейтрон-нейтронным куперовским парам.

Для дальнейших выкладок определим величины Δ_0 и $\vec{\Delta}$ следующим образом:

$$\Delta \equiv \left(i\Delta_0 + \vec{\Delta}\vec{\tau} \right) \tau_2 \sigma_2, \tag{36}$$

где компонентами вектора $\vec{\Delta}$ являются $i\Delta_1$, Δ_2, $i\Delta_3$, причем величины Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3 могут считаться вещественными и, без ограничения общности, положительными. Заметим, что по отличным от нуля компонентам Δ_0 и $\vec{\Delta}$ можно судить, пары каких именно нуклонов образуются. Добавим также, что если $\Delta_{np} = \Delta_{pn} = 0$ (т.е. нейтрон-протонные пары отсутствуют), то протон-протонные и нейтрон-нейтронные пары образуются независимо, и уравнения для Δ_{pp} и Δ_{nn} разделяются.

Если рассматривать случай с суперпозицией состояний SS и TS, то будут иметь место аналогичные определения:

$$\Delta = (i\Delta_0 + \vec{\Delta}\vec{\sigma})\sigma_2 \tau_2. \tag{37}$$

В случае же однокомпонентной ферми-жидкости (с суперпозицией синглетного и триплетного состояний по спинам) предыдущее определение трансформируется в следующее:

$$\Delta = (\Delta_0 + \vec{\Delta}\vec{\sigma})\sigma_2 , \tag{38}$$

где $\vec{\Delta} = \left(\Delta_1, i\Delta_2, \Delta_3 \right)$.

Из формул (36)–(38) и свойства параметра порядка (5) следуют различия в симметрии компонентов параметров порядка $\Delta(\mathbf{p})$ для однокомпонентных и двухкомпонентных ферми-систем по импульсам. Для двухкомпонентной системы имеем

$$\Delta_0(-\mathbf{p}) = -\Delta_0(\mathbf{p}), \qquad \vec{\Delta}(-\mathbf{p}) = \vec{\Delta}(\mathbf{p}), \tag{39}$$

а для однокомпонентной системы

$$\Delta_0(-\mathbf{p}) = \Delta_0(\mathbf{p}), \quad \vec{\Delta}(-\mathbf{p}) = -\vec{\Delta}(\mathbf{p}). \tag{40}$$

Задача определения параметров сверхтекучей системы значительно упрощается в следующем частном случае. Предположим, что коммутатор $[\xi, \Delta]_- = 0$, а $\xi^T = \xi$ (см. (20), (21)). В этом случае и $[\xi, \Delta\Delta^+]_- = 0$, а уравнение (20) решается в матричном виде. Для величины $X\Delta^+$ получим решения $X\Delta^+ = \xi + \upsilon E$, где $E = \sqrt{\xi^2 + \Delta\Delta^+}$ и $\upsilon = \pm 1$.

В этом случае по формулам (46) матрицы f и g легко вычисляются. Можно показать, что функции распределения не зависят от знака υ, поэтому можно положить $\upsilon = -1$. Тогда

$$f = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\xi}{E}(1-2n) \right], \tag{41}$$

$$g = -\frac{1-2n}{2E}\Delta. \tag{42}$$

Энергия элементарных возбуждений в данном случае есть $\mathcal{E} = \xi - X\Delta^+ = \upsilon E = \sqrt{\xi^2 + \Delta\Delta^+}$, и матрица $\mathcal{E}$ имеет два собственных значения, т.е. элементарные возбуждения ферми-жидкости в состоянии суперпозиции SS и ST сверхтекучести имеют две щели.

Уравнения согласования для определения энергии квазичастицы ε и параметра порядка Δ в общем случае даются соотношениями (4). Пусть теперь энергия ε определяется выражением $\varepsilon = \varepsilon_0 \equiv p^2/2m$, матричная структура параметра порядка задается формулой (36), а взаимодействие $V(1234)$ является инвариантным относительно вращений в спиновом и изоспиновом пространствах, а также трансляционно инвариантным. Тогда уравнения для определения ε (или $\xi = \varepsilon - \mu$) и Δ имеют вид

$$\xi(\mathbf{p}) = \varepsilon^0(\mathbf{p}) - \mu + \sum_{\mathbf{q}} U_{SS}(\mathbf{p},\mathbf{q}) f_0(\mathbf{q}), \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \Delta_0(\mathbf{p}) &= \sum_{\mathbf{q}} V_{SS}(\mathbf{p},\mathbf{q}) g_0(\mathbf{q}), \\ \vec{\Delta}(\mathbf{p}) &= \sum_{\mathbf{q}} V_{ST}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vec{g}(\mathbf{q}), \end{aligned} \tag{44}$$

где $f_0(\mathbf{q})$, $g_0(\mathbf{q})$ и $\vec{g}(\mathbf{q})$ есть нормальная и аномальная функции распределения квазичастиц в ферми-жидкостной теории симметричной ядерной материи:

$$f(\mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}),\ g(\mathbf{p}) = \left(ig_0(\mathbf{p}) + \vec{g}(\mathbf{p})\vec{\tau}\right)\sigma_2\tau_2,\ \vec{g} = (ig_1, g_2, ig_3).$$

Нормальные и аномальные амплитуды взаимодействия U_{SS}, V_{SS} и V_{ST} в настоящей работе мы определяем взаимодействием $v(1234)$ в приближении Хартри–Фока.

Если гамильтониан системы известен:

$$H = \sum_{1,2}\varepsilon_{12}\, a_1^+ a_2 + \frac{1}{2}\sum_{1..4} v(1234) a_1^+ a_2^+ a_4 a_3, \qquad (45)$$

то в этом приближении функционал энергии будет иметь вид

$$E(f, g) = \sum_{1,2}\varepsilon_{12} f_{21} + \frac{1}{2}\sum_{1..4} v(1234)(f_{31} f_{42} - f_{41} f_{32} + g_{21}^+ g_{34}). \qquad (46)$$

По формуле (46) легко определить четыре нормальных амплитуды взаимодействия $U_i(\mathbf{p},\mathbf{q})$ и четыре аномальных сверхтекучих амплитуды взаимодействия $V_i(\mathbf{p},\mathbf{q})$ квазичастиц ферми-жидкости [21].

В качестве модели взаимодействия использовано двухнуклонное взаимодействие Скирма [51,74,75]. Оно широко применяется в ядерной физике и удобно тем, что явно зависит от плотности ядерной материи ρ, а также не требует перенормировок взаимодействия двух нуклонов при наличии среды.

Как было сказано выше, потенциал взаимодействия может быть разложен в пространстве матриц Паули (14). В модели Скирма величины u_i задаются через числа t_j, x_j и β, которые являются известными параметризациями взаимодействия Скирма:

$$\begin{aligned} u_0(\mathbf{k},\mathbf{k}') &= t_0 + \frac{t_1}{2}(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2) + t_2\mathbf{k}\mathbf{k}' + \frac{t_3}{6}\rho^\beta, \\ u_1(\mathbf{k},\mathbf{k}') &= x_0 t_0 + x_1\frac{t_1}{2}(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2) + x_2 t_2\mathbf{k}\mathbf{k}' + x_3\frac{t_3}{6}\rho^\beta. \end{aligned} \qquad (47)$$

В рассматриваемой модели предполагается, что только u_0 и u_1 не равны нулю.

Потенциал взаимодействия, который отвечает за SS спаривание, есть

$$V_{SS} = (u_0 - u_1)_a, \qquad (48)$$

а за ST и TS спаривания —

$$V_{ST} = (u_0 - u_1)_s,\ V_{TS} = (u_0 + u_1)_s. \qquad (49)$$

Индексы «*a*» и «*s*» означают асимметричную и симметричную части этих величин по импульсам.

В дальнейших формулах важную роль будут играть величины g_s и g_t, которые связаны с потенциалами формулами

$$g_s\cos\theta = -\frac{k_f^3}{4\pi^2\varepsilon_f}V_{SS},\quad g_t = -\frac{k_f^3}{4\pi^2\varepsilon_f}V_{ST}, \qquad (50)$$

где $k_f = (\tfrac{3}{2}\pi^2\rho)^{1/3}$, $\varepsilon_f = \hbar^2 k_f^2/2m_*$, а θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. Важным также впоследствии окажется соотношение W между этими величинами, задаваемое формулой:

$$W = \frac{1}{g_s'} - \frac{1}{g_t}, \qquad (51)$$

где $g_s' = g_s/3$, которое, как будет видно ниже, определяет возможность возникновения суперпозиции синглетных и триплетных состояний, а также и возникновения двухщелевых состояний.

При проведении выкладок необходимо сделать некоторые упрощающие предположения в отношении взаимодействия. Как и во многих других работах, здесь использована при вычислениях так называемая «модель тонкого слоя». Ее идея заключена в предположении, что потенциал взаимодействия не равен нулю только в тонком слое в окрестности сферы Ферми шириной 2ϑ, где значение ϑ принимаем равным $\vartheta = 0{,}1\varepsilon_f$ (ε_f — энергия Ферми).

Энергия квазичастицы, отсчитанная от химического потенциала, дается выражением

$$\xi = \varepsilon_0 - \mu + \varepsilon_{\text{int}}, \qquad (52)$$

где ε_{int} — часть этой энергии, пропорциональная взаимодействию. Эту формулу удобно переписать в виде

$$\xi = \frac{p^2}{2m_*} - \mu_*, \qquad (53)$$

m_* — перенормированная масса и μ_* — перенормированный химический потенциал. Масса m_* для симметричной ядерной материи определяется из выражения [76]

$$\frac{\hbar^2}{2m_*} = \frac{\hbar^2}{2m} + \frac{1}{16}\left(3t_1 + t_2(5 + 4x_2)\right)\rho, \qquad (54)$$

где m — масса свободного фермиона. Удобно будет определить перенормированный импульс Ферми p_* следующим образом:

$$\mu_* = p_*^2/2m_*. \qquad (55)$$

Введение в рассмотрение перенормированного химического потенциала μ_* (или перенормированного импульса p_*) эквивалентно появлению нового параметра, описывающего состояние системы. Это требует добавления к системе уравнений самосогласования еще одного уравнения (в записанной ниже системе дополнительное уравнение связано непосредственно с величиной $a = p_*/p_f$). Источником данного уравнения является соотношение $N = \operatorname{tr} f$, определяющее число квазичастиц.

Отметим, что отношение a мало отличается от единицы, и учет этой величины и связанного с ней уравнения оказывает очень малое, практически незаметное влияние на числовые значения получаемых параметров порядка. Однако a действительно необходимо принимать во внимание при определении некоторых физических величин, например при вычислении термодинамического потенциала (см. ниже), так как связанные с ним эффекты по порядку величины оказываются сравнимыми с самим термодинамическим потенциалом.

Рассмотрим суперпозицию сверхтекучих SS и ST состояний в симметричной ядерной материи при отсутствии магнитного поля. Причем будем предполагать, что эти состояния характеризуются четырьмя параметрами порядка Δ_0, Δ_1, Δ_2 и Δ_3, не равными нулю. При таком выборе внешних условий векторное слагаемое в разложении энергии квазичастицы $\xi = \xi_0 + \vec{\xi}\vec{\sigma}$ (см. в этой связи комментарий после формул (6), (7)), как в спиновом, так и в изоспиновом пространствах, оказывается равным нулю. В этом случае система уравнений самосогласования после замены сумм на интегралы записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{3a}{4}\displaystyle\int_{\eta_-}^{\eta_+} d\xi\sqrt{1+\xi}\int_0^1 dx x^2 \left[\Phi_+ + \Phi_- \dfrac{\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_3^2}}{\sqrt{\Delta_0^2 x^2+\Delta_2^2}}\right] - \dfrac{1}{g'_s} = 0\,, \\ \dfrac{a}{4}\displaystyle\int_{\eta_-}^{\eta_+} d\xi\sqrt{1+\xi}\int_0^1 dx \left[\Phi_+ + \Phi_- \dfrac{\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_3^2}}{\sqrt{\Delta_0^2 x^2+\Delta_2^2}}\right] - \dfrac{1}{g_t} = 0\,, \\ \dfrac{a}{4}\displaystyle\int_{\eta_-}^{\eta_+} d\xi\sqrt{1+\xi}\int_0^1 dx \left[\Phi_+ + \Phi_- \dfrac{\sqrt{\Delta_0^2 x^2+\Delta_2^2}}{\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_3^2}}\right] - \dfrac{1}{g_t} = 0\,, \\ \dfrac{3}{4}a^3\displaystyle\int_{-1}^{\infty} d\xi\sqrt{1+\xi}\int_0^1 dx\left(1-\dfrac{\xi}{2}\Phi_+\right) - 1 = 0\,, \end{cases} \qquad (56)$$

где

$$\Phi_\pm = \varphi_+ \pm \varphi_-,\ \varphi_\pm = \left(\frac{E_\pm}{2T}\right)/E_\pm,\ a = p_*/p_f,\ \eta_\pm = \pm\vartheta/a^2,$$

$$E_\pm^2 = \xi^2 + \left(\sqrt{\Delta_0^2 x^2+\Delta_2^2} \pm \sqrt{\Delta_1^2+\Delta_3^2}\right)^2,$$

а переменная интегрирования x является косинусом угла между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$.

Величины Δ_1 и Δ_3 входят в систему уравнений самосогласования только в виде комбинации $\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_3^2}$, поэтому уравнения для них оказываются идентичными (в системе (56) мы их не повторяем), поэтому эти величины невозможно различить. В связи с этим обозначим $\Delta_4 = \sqrt{\Delta_1^2+\Delta_3^2}$, с которым в дальнейшем будем работать как с одним из параметров порядка наравне с Δ_0 и Δ_2.

Не решая системы (56), можно сделать некоторые выводы относительно условий существования ее решений. Для возможности проведения аналитических выкладок ограничимся случаем $T = 0$. Вычитая второе уравнение системы из третьего и интегрируя по ξ (пренебрегая при этом множителем $\sqrt{1+\xi}$), получаем

$$\int_0^1 \frac{\gamma_+\gamma_-}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} \ln\left|\frac{\gamma_+}{\gamma_-}\right| dx = 0, \qquad (57)$$

где

$$\alpha = \Delta_2/\Delta_0,\quad \gamma_\pm = \sqrt{x^2+\alpha^2} \pm \beta,\quad \beta = \Delta_4/\Delta_0. \qquad (58)$$

Вычитая теперь второе уравнение системы (56) из первого, имеем (см. (51)):

$$W = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{\beta}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} \ln\left|\frac{\gamma_-}{\gamma_+}\right| - \ln|\gamma_-\gamma_+|\right](3x^2-1)\ dx. \qquad (59)$$

В то же время из первого уравнения (56) следует выражение

$$\Delta_0 = 2\vartheta \exp\left\{\frac{3}{2}\int_0^1 dx\ x^2 \left[\frac{\beta}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} \ln\left|\frac{\gamma_-}{\gamma_+}\right| - \ln|\gamma_-\gamma_+|\right] - \frac{1}{g'_s}\right\}. \qquad (60)$$

Таким образом, уравнения (57)–(60) определяют параметры порядка Δ_0, Δ_2 и Δ_4 при $T = 0$, и мы можем рассмотреть условия существования этих решений.

На основании уравнений (57) и (59) можно построить зависимость $\alpha(W)$ (см. определения (51), (58)), которая изображена на рис. 1. Как видно на этом графике, диапазон W, в котором возможны решения для α, весьма узок. Существование отношения α и означает существование суперпозиции SS и ST состояний. Узость диапазона W означает, что значения g'_s и g_t (см. (50)) должны быть близкими друг к другу. В единицах плотности ширина этого диапазона составляет порядка 0,1 от общей плотности системы. В случае, когда один из параметров порядка, Δ_2 или Δ_4, равен нулю, этот диапазон будет несколько более широким.

Здесь уместно напомнить ситуацию с A-фазой ^{3}He. Одной из ее особенностей, как хорошо известно, является стабильность в узком диапазоне параметров. Это можно увидеть на известной фазовой диаграмме давления и температуры для этой физической системы (см., например, [43, с. 3]). Можно провести аналогию этой фазы с полученными условиями существования сверхтекучих состояний SS+ST со всеми параметрами порядка, не равными нулю, решения уравнений самосогласования для которых возможны только при узком диапазоне плотности.

Кроме того, как видно на рис. 1, при определенных значениях W имеют место двузначные решения для параметров порядка. Такая ситуация возможна не только при температуре, равной нулю. Ниже, когда

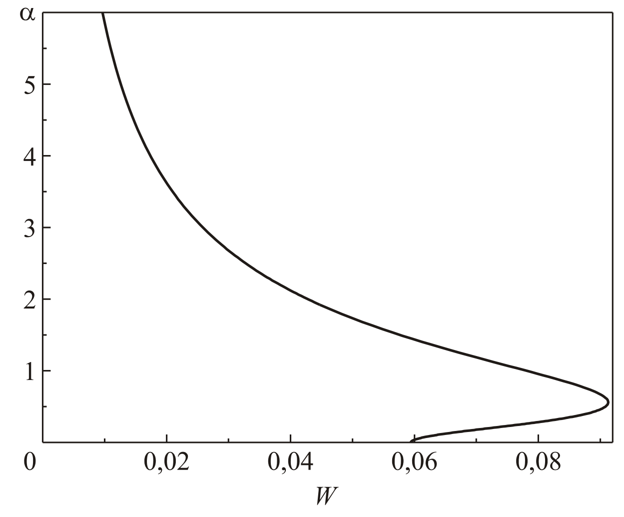

Рис. 1. Зависимость (при $T = 0$) отношения $\alpha = \Delta_2 / \Delta_0$ от параметра $W = 1/g_s' - 1/g_t$. Потенциал SkP, $\vartheta = 0,1$.

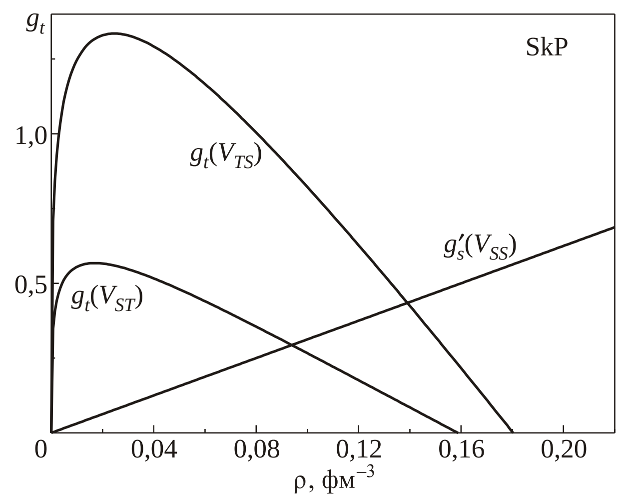

Рис. 2. Зависимости g_s', g_t (для V_{ST}) и g_t (для V_{TS}) от плотности. Потенциал SkP.

будет рассматриваться общее решение системы уравнений (56), такая двузначность будет прокомментирована подробнее.

Рассмотрим далее рис. 2. Как следует из анализа уравнений (57) и (59), для возможности двухщелевого сверхтекучего упорядочения со всеми параметрами порядка, не равными нулю, кривые g_s' и g_t должны пересекаться при некоторой плотности, причем быть при этом положительными. Таким условиям в принципе соответствует большая часть потенциалов Скирма, однако далеко не все из них подходят по физическим соображениям (плотность должна быть близкой к реальной ядерной плотности, а параметр порядка, который определяется экспоненциально убывающим множителем, быть достаточно большим, чтобы быть измеримым). В случае SS+TS спаривания к таким потенциалам можно отнести: SCI, SCII, SCIII, SkM, SkM*, SkSC4, SkSC5, SkSC6, SkSC10, SkSCE, SkX, SkP, а в случае SS+ST спаривания — SkSC4, SkSC6, SkSC10, SkP, SkI3, SkI5. Для других реализаций взаимодействия Скирма, при которых также возможна суперпозиция SS и ST (или TS) состояний (для этого необходимо, чтобы параметр t_2 был меньше нуля), качественная картина будет такой же, как и для потенциала SkP, хотя количественно и будет отличаться.

На рис. 3 изображены сразу все варианты решения системы (56) при $T \neq 0$ для потенциала SkP при спаривании типа SS+ST на примере одного из значений $W = 0{,}04 > 0$.

Возможны такие реализации решения системы уравнений (56).

1. Не равен нулю только один из параметров порядка (на графике — кривые, которые обозначены «0» и «2 или 4» — соответственно Δ_0, Δ_2 и Δ_4). Эти состояния не являются суперпозицией синглетных и триплетных состояний.

2. Не равны нулю одновременно два параметра порядка (на графике — кривые, которые обозначены «0 (с 4)», «4 (с 0)» и «2 и 4»). Решение, при котором $\Delta_0 \neq 0$ и $\Delta_4 \neq 0$, является синглет-триплетным так же, как и решение, при котором $\Delta_0 \neq 0$ и $\Delta_2 \neq 0$ (которое, однако, реализуется только при $W < 0$).

3. Не равны нулю все три искомых параметра порядка одновременно (на графике — кривые, обозначенные цифрами «0», «2» и «4»). Это решение, представляющее суперпозицию синглетного и триплетного состояний, реализуется только при $W > 0$. Оно наиболее интересно, потому что при некоторых температурах, а при некоторых W даже при всех температурах, где оно реализуется, оно двузначно. Эти состояния также двухщелевые.

Прокомментируем возможную двузначность решений системы уравнений самосогласования (56). Как видно на рис. 3, при определенных температурах могут существовать два решения этой системы с одним и тем

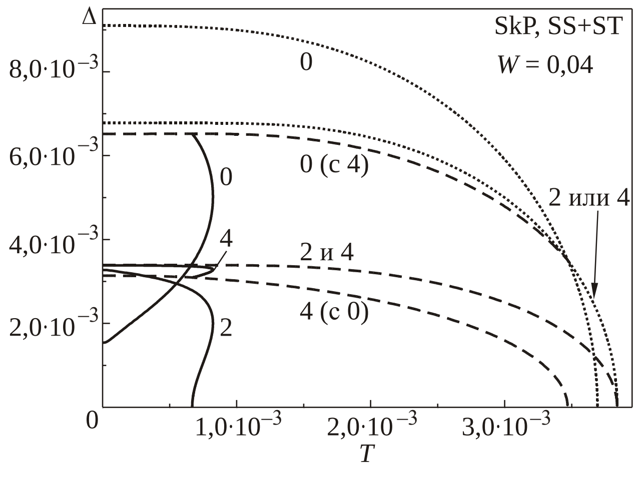

Рис. 3. Решения системы уравнений самосогласования для параметров порядка.

же набором ненулевых параметров порядка. Это не означает еще возможности одновременного существования таких решений. Данную ситуацию можно понимать следующим образом. При понижении температуры от решения с параметрами порядка Δ_0 и Δ_4 $(\Delta_2 = 0)$, обозначенного на графике кривыми «0 (с 4)» и «4 (с 0)», может возникнуть решение, в котором все три параметра порядка будут отличны от нуля. Это будет верхняя часть двузначной ветви Δ_0 и нижняя часть ветвей Δ_2 и Δ_4, причем решение для Δ_2 станет расти, начиная с нуля. При повышении температуры данные параметры порядка будут приближаться к значению, которое соответствует точке соединения двух ветвей, и только после этого при дальнейшем понижении температуры возможен переход к другой ветви двузначного решения. Возвращаясь к комментарию к рис. 1, заметим, что двузначность параметра α на этом графике означает, что уже при нулевой температуре решения системы (56) двузначны, причем в этом случае они не ответвляются от решений с иным набором параметров порядка.

Рассмотрим выражение для энергетической щели, которая определяется формулой

$$\Delta_\pm = \left|\sqrt{\Delta_0^2 x^2 + \Delta_2^2} \pm \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_3^2}\right|$$

в случае, когда все параметры порядка не равны нулю. Мы видим, что она анизотропна, поскольку явно зависит от $x = \cos\theta$, где θ — угол между соответствующим ей импульсом и выбранным направлением в изотопическом пространстве.

Во многих работах, посвященных сверхтекучести, используется понятие так называемых «унитарных» состояний — таких, для которых произведение $\Delta\Delta^+$ является c-числом, т.е. пропорционально единичной матрице в пространстве матриц Паули [43,77,78]. В основном эти работы связаны с изучением $^3\mathrm{He}$, однако понятие унитарных состояний используется и в ядерной физике (см., например, [78]).

В указанных работах рассматриваются унитарные состояния только с чисто триплетным спариванием. В этом случае требование унитарности сводится к условию $\vec{\Delta}^* \times \vec{\Delta} = 0$. Такие состояния характеризуются средним спином куперовской пары, равным нулю (см. эти же работы). В рассматриваемом нами случае суперпозиции синглетных и триплетных состояний также можно ввести унитарные состояния, требуя, как и выше, пропорциональности единичной матрице произведения $\Delta\Delta^+$. В этом случае (изо)спин куперовской пары, как и в чисто триплетном случае, окажется равным нулю. Действительно, запишем выражение для определения среднего изоспина:

$$\left\langle \hat{\vec{t}} \right\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\, f\vec{\tau}. \tag{61}$$

Функция f находится из формулы (41) и зависит от Δ только в виде комбинации $\Delta\Delta^+$, являющейся для унитарных состояний c-числом. Отсюда следует равенство нулю шпура в выражении (61) и, следовательно, равенство нулю среднего спина.

В рассматриваемом нами случае требование пропорциональности произведения $\Delta\Delta^+$ единичной матрице приводит к следующим условиям, налагаемым на параметры порядка Δ_0 и $\vec{\Delta}$, которые можно рассматривать как критерии унитарности сверхтекучего состояния:

$$\begin{cases} \vec{\Delta}^* \times \vec{\Delta} = 0, \\ \Delta_0^*\vec{\Delta} + \Delta_0\vec{\Delta}^* = 0. \end{cases} \tag{62}$$

Из первого из этих соотношений следует $\vec{\Delta}^* = \lambda\vec{\Delta}$, тогда из второго $\Delta_0^* = -\lambda\Delta_0$, где λ — фазовый множитель: $\lambda\lambda^* = 1$.

Если переписать систему уравнений самосогласования (44) для унитарного случая, то окажется, что все уравнения для компонентов Δ_1, Δ_2, Δ_3 эквивалентны, и можно найти только их комбинацию $\sqrt{\vec{\Delta}^2}$. Получившиеся уравнения оказываются эквивалентными первым двум уравнениям из этой системы, если $\Delta_2^*\Delta_2$ заменить на $\vec{\Delta}^*\vec{\Delta}$. Таким образом, они записываются в виде

$$\begin{cases} \Delta_0(\mathbf{p}) = \sum\limits_{\mathbf{q}} V_{SS}(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\dfrac{\mathrm{th}\;\; E(\mathbf{q})/2T}{E(\mathbf{q})}\,\Delta_0(\mathbf{q}), \\ \vec{\Delta}(\mathbf{p}) = \sum\limits_{\mathbf{q}} V_{ST/TS}(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\dfrac{\mathrm{th}\, E(\mathbf{q})/2T}{E(\mathbf{q})}\,\vec{\Delta}(\mathbf{q}), \end{cases} \tag{63}$$

а энергетический спектр дается выражением

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\xi(\mathbf{p})^2 + \Delta_0(\mathbf{p})\Delta_0^*(\mathbf{p}) + \vec{\Delta}\;\;\mathbf{p}\;\;\vec{\Delta}^*(\mathbf{p})}$$

и является c-числом.

Аналогично неунитарному случаю можно проанализировать условия существования унитарных состояний при нулевой температуре. Если в этом случае вычесть второе уравнение системы (63) из первого и заменить суммы интегралами, получим:

$$\frac{a}{2}\int\limits_{\eta_-}^{\eta_+} d\xi\,\sqrt{1+\xi}\int\limits_0^1 dx\,\frac{(3x^2-1)}{\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2 x^2 + \vec{\Delta}^2}} = \frac{1}{g_s'} - \frac{1}{g_t}. \tag{64}$$

Значение интеграла в этой формуле при ненулевых параметрах порядка Δ_0 или $\vec{\Delta}$ всегда отрицательно. Таким образом, видно, что в унитарном случае решение с обоими параметрами порядка, не равными нулю, возможно только при $W = 1/g_s' - 1/g_t < 0$. Это делает диапазон плотности системы, при котором возможны унитарные синглет-триплетные состояния, отличным от диапазона, в котором возможны неунитарные состояния (в том случае, как было сказано выше, $W > 0$).

Интересным является вопрос об унитарности сверхтекучих состояний при $\vec{\xi} \neq 0$. Данное условие соответствует либо наличию магнитного поля в случае, если вектор $\vec{\xi}$ определяется в пространстве спинов, либо асимметрии состава ядерной материи в том случае, когда $\vec{\xi}$ определяется в пространстве изоспинов. Иными словами, вектор $\vec{\xi}$ в этих случаях оказывается пропорциональным соответственно магнитному полю или параметру асимметрии $\alpha = (\rho_n - \rho_p)/(\rho_n + \rho_p)$.

В работе [49] рассмотрен случай с $\vec{\xi} \neq 0$, определенным в изоспиновом пространстве. На основании анализа решения бикубического уравнения (26) выяснилось, что параметры порядка, которые могли бы получиться при решении уравнений самосогласования в этом случае, не удовлетворяли бы условиям унитарности. Следовательно, видно, что в данном случае рассматриваемые состояния становятся неунитарными.

Итак, выше были проанализированы различные решения систем уравнений самосогласования. Естественным образом возникает вопрос об устойчивости этих решений. Изначально эти уравнения получены из условия минимума термодинамического потенциала Ω. Таким образом, определяя, для каких решений значения термодинамического потенциала ниже, можно судить об их устойчивости.

Для этого найдем Ω при разных температурах и плотностях. Термодинамический потенциал дается известным выражением (определения E_1 и E_2 см. в формулах (9), (10))

$$\Omega = \omega V = E_0 + E_1(f) + E_2(g) - \mu N - TS, \qquad (65)$$

или

$$\Omega = \mathrm{Sp}\left(\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{int}} - \mu\right) f + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\, g^{+}\Delta + T\,\mathrm{Sp}\,\hat{n}\ln\hat{n}. \qquad (66)$$

Здесь $\varepsilon_{\mathrm{int}}$ определяется формулой

$$\varepsilon_{\mathrm{int}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}} U_0\left(\frac{\mathbf{p}-\mathbf{q}}{2}\right) f_0(\mathbf{q}), \qquad (67)$$

двурядная матрица $\hat{n}$ имеет вид

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & (1-n)^T \end{pmatrix}, \qquad (68)$$

а шпур берется по всему пространству, в котором действует эта матрица. Теперь переопределим $\varepsilon_0 + \varepsilon_{\mathrm{int}} - \mu = p^2/2m^* - \mu^*$. Тогда

$$\Omega = \mathrm{Sp}\left(\frac{p^2}{2m^*} - \mu^*\right) f - \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ \varepsilon_{\mathrm{int}}\ f + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\, g^{+}\Delta + T\,\mathrm{Sp}\,\hat{n}\ln\hat{n}. \qquad (69)$$

График зависимости Ω от температуры при постоянной плотности, соответствующей ситуации на рис. 3 ($W = 0{,}04$), приведен на рис. 4. Видно, что наиболее энергетически выгодным случаем является триплетное спаривание с одним параметром порядка, не равным нулю. Состояния с суперпозицией синглетных и триплетных куперовских пар наименее энергетически выгодны, хотя при низких температурах они оказываются практически настолько же выгодными, как и состояния с чисто триплетными парами с тремя ненулевыми параметрами порядка.

Таким образом, на рис. 4 видно, что двухщелевые состояния не соответствуют абсолютным минимумам термодинамического потенциала, что свидетельствует об их возможной метастабильности. Возможно также, что при воздействии внешнего поля происходит стабилизация этих состояний.

5. Заключение

В настоящей работе приведен краткий обзор научных результатов, демонстрирующих плодотворность ферми-жидкостного подхода для исследований сверхтекучих состояний в ферми-системах, в частности ядерной материи. Изложенный материал не может рассматриваться как в какой-то мере полный перечень результатов исследования сверхтекучести, хотя бы в рамках ферми-жидкостного подхода.

Как уже отмечалось выше, в работе детально изложены исследования, связанные с описанием состояний с одновременным существованием синглетного и триплетного типов спаривания в ядерной материи в рамках этого подхода. Рассмотрена модель сверхтекучих состояний с одновременным существованием синглетного и триплетного типов спаривания в симметричной ядерной материи. Проанализировано решение системы уравнений самосогласования для сверхтекучих синглет-синглетных и синглет-триплетных состояний. Показано, что при некоторых плотностях возможны двузначные решения системы уравнений самосогласования. Отдельно приведены результаты исследований уни-

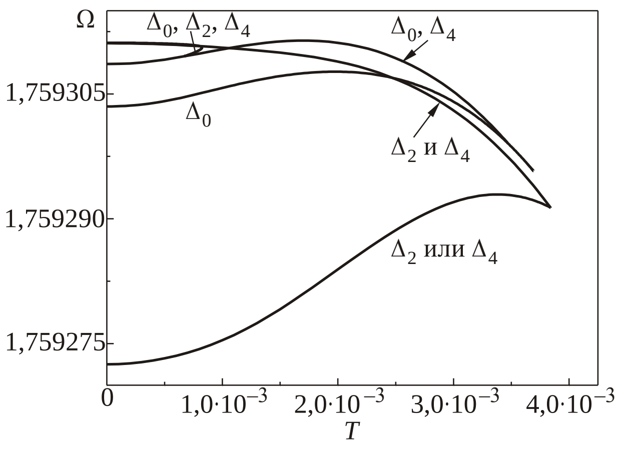

Рис. 4. Термодинамический потенциал для полученных решений системы уравнений самосогласования.

тарных состояний с синглетной и триплетной сверхтекучестью в двухкомпонентной симметричной ядерной материи.

На основании анализа системы уравнений самосогласования указан диапазон плотности ядерной материи, в котором могут существовать состояния с суперпозицией синглетного и триплетного типов спаривания, а также определены способы параметризации взаимодействия Скирма, при которых возможны изучаемые состояния.

Рассмотрены исследования термодинамических свойств состояний с синглетной и триплетной сверхтекучестью в симметричной ядерной материи. Показано, что в исследуемом случае наиболее термодинамически выгодно состояние с чисто триплетным типом спаривания.

Проанализирована возможность существования унитарных сверхтекучих состояний в ядерной материи при асимметрии ее состава. Продемонстрировано, что с появлением асимметрии сверхтекучие состояния SS+ST типа в ядерной материи становятся неунитарными по изоспину.

Легко увидеть, что представленная теория открывает и новые перспективы в исследовании явления сверхтекучести в квантовых жидкостях, астрофизике и ядерной физике. Благодаря этой теории появляется возможность не только описывать известные сверхтекучие состояния в различных ферми-жидкостях, но и предсказывать существование новых систем и новых типов упорядочений с возможностью их классификации. В частности, результаты, касающиеся суперпозиции синглетного и триплетного упорядочений в ферми-жидкости, открывают возможности экспериментальных исследований для обнаружения таких и подобных им состояний, например в ядерной материи. Определение диапазонов плотностей ядерной материи, в которых исследуемые состояния могут быть обнаружены, позволяет не только планировать эксперименты в физике высоких энергий, но и целенаправленно наблюдать за нейтронными звездами, в которых имеются различные слои ядерной материи.

Авторы благодарны С.В. Пелетминскому за ценные обсуждения. Особую признательность хотелось бы высказать покойному ныне А.А. Яценко, который внес существенный вклад в анализ результатов многих задач, отраженных в настоящей работе.

Работа частично поддержана стипендией НАН Украины для молодых ученых.

Приложение

Приведем подробно процедуру получения уравнения (26). Вначале умножим уравнение (20) справа на Δ^+. Учитывая определения (25) и (27), можно расписать полученное выражение в виде

$$\zeta^2 + 2\zeta\, \vec{y}\vec{\sigma} + \vec{y}^{\,2} + 2\zeta b + 2\vec{y}\vec{\sigma}\, b = \Delta\Delta^+ + \xi^2 - 2\xi b, \qquad (\text{П.1})$$

где матрица b определена следующим образом:

$$(\Delta^+)^{-1}\xi^T\Delta^+ \equiv \xi - 2b. \qquad (\text{П.2})$$

Следует заметить, что b обладает структурой

$$b = \vec{b}\vec{\sigma}. \qquad (\text{П.3})$$

Действительно, из определения (П.2) следует

$$b = \frac{1}{2}\left(\eta - \nu(\Delta^+)^{-1}\eta\Delta^+\right) \qquad (\text{П.4})$$

(здесь $\eta = \vec{\xi}\vec{\sigma}$; а $\nu = \pm 1$ — знак, зависящий от четности по импульсу). Расписывая $(\Delta^+)^{-1}\eta\Delta^+$ по слагаемым, легко увидеть, что все они пропорциональны векторным матрицам Паули. Кроме того, они обладают свойством

$$\vec{b}\vec{\xi} = \vec{b}^2. \qquad (\text{П.5})$$

Действительно, переписав определение (П.2) в виде $\nu(\Delta^+)^{-1}\eta\Delta^+ = \eta - 2b$ и возведя в квадрат это выражение, получим $2b^2 = \eta b + b\eta$. Отсюда, с учетом (П.3), следует выражение (П.5).

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (П.1). Учитывая определение $\vec{c}$ (28), можем записать:

$$\Delta\Delta^+ + \xi^2 - 2\xi b = \varepsilon_0^2 + 2\vec{\varepsilon}\vec{\sigma} - 2\vec{\xi}\vec{b}, \qquad (\text{П.6})$$

где ε_0 и $\vec{\varepsilon}$ определяются как

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 &= \xi_0^2 + \vec{\xi}^{\,2} + \Delta_0\Delta_0^* + \vec{\Delta}\vec{\Delta}^*, \\ \vec{\varepsilon} &= \xi_0(\vec{\xi} - \vec{b}) - i[\vec{\xi}, \vec{b}] + \vec{c}. \end{aligned} \qquad (\text{П.7})$$

Переписав уравнение (П.1), с учетом определений (П.7), и разделив слагаемые, пропорциональные единичной матрице и матрицам Паули $\vec{\sigma}$, получим

$$\begin{cases} \zeta^2 + \vec{y}^{\,2} + 2(\vec{\xi} + \vec{y})\vec{b} = \varepsilon_0^2\,, \\ \zeta(\vec{y} + \vec{b}) + i[\vec{y}, \vec{b}] = \vec{\varepsilon}\,. \end{cases} \qquad (\text{П.8})$$

Выпишем второе уравнение системы (П.8), умножив его скалярно на $\vec{b}$:

$$\vec{y}\vec{b} = \frac{1}{\zeta}(\vec{\varepsilon}\vec{b} - \zeta\vec{b}^{\,2})\,. \qquad (\text{П.9})$$

Умножив снова второе уравнение (П.8) векторно на $\vec{b}$ и подставив сюда формулу (П.9), приходим к выражению, которое вместе со вторым уравнением (П.8) образует систему линейных уравнений для неизвестных $(\vec{y} + \vec{b})$ и $[\vec{y}, \vec{b}]$:

$$\begin{cases} \vec{b}^{\,2}(\vec{y} + \vec{b}) + i\zeta[\vec{y}, \vec{b}] = \dfrac{\vec{\varepsilon}\vec{b}}{\zeta}\cdot\vec{b} + i[\vec{\varepsilon}, \vec{b}]\,, \\ \zeta\,(\vec{y} + \vec{b}) + i[\vec{y}, \vec{b}] = \vec{\varepsilon}. \end{cases} \qquad (\text{П.10})$$

Выписав ее решение для $\vec{y}+\vec{b}$, возведем его в квадрат и получим

$$(\vec{y}+\vec{b})^2 = \frac{\vec{\varepsilon}^2-(\vec{\varepsilon}\vec{b})^2/\zeta^2}{\zeta^2-\vec{b}^2}. \qquad (\text{П}.11)$$

Выделяя полный квадрат, перепишем первое уравнение системы (П.8) в виде

$$\left(\vec{y}+\vec{b}\right)^2 = \varepsilon_0^2-\zeta^2-\vec{b}^2. \qquad (\text{П}.12)$$

Приравняв выражение (П.11) к (П.12), приведем их к общему знаменателю и получим бикубическое уравнение для ζ:

$$\zeta^6-\zeta^4\varepsilon_0^2+\zeta^2(\varepsilon_0^2\vec{b}^2-\vec{b}^2\vec{b}^2+\vec{\varepsilon}^2)-(\vec{\varepsilon}\vec{b})^2=0. \qquad (\text{П}.13)$$

Кроме того, с учетом (П.5),

$$\vec{\varepsilon}\vec{b}=\xi_0(\vec{\xi}-\vec{b})\cdot\vec{b}+\vec{c}\vec{b}-i[\vec{\xi},\vec{b}]\,\vec{b}=\vec{c}\vec{b}.$$

Таким образом, бикубическое уравнение (П.13) для нахождения скалярной составляющей $\mathcal{E}$ можно записать в виде (26).

Переписав решение системы (П.10) для $\vec{y}+\vec{b}$, получим выражение для $\vec{y}$:

$$\vec{y}=\frac{1}{\zeta^2-\vec{b}^2}\left(\zeta\,\vec{\varepsilon}-\frac{\vec{\varepsilon}\vec{b}}{\zeta}\cdot\vec{b}-i[\vec{\varepsilon},\vec{b}]\right)-\vec{b}. \qquad (\text{П}.14)$$

1. X.K. Chen, M.J. Konstantinovic, J.C. Irwin, D.D. Lawrie, and J.P. Franck, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 157002 (2001).
2. F. Giubieo, D. Roditchev, W. Sacks, R. Lamy, D.X. Thanh, and J. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 177008 (2001).
3. F. Bouquet, R.A. Fisher, N.E. Phillips, D.G. Hinks, and J.D. Jorgensen, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 047001 (2001).
4. A. Floris, G. Profeta, N.N. Lathiotakis, M. Lüders, M.A.L. Marques, C. Franchini, E.K.U. Gross, A. Continenza, and S. Massidda, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 037004 (2005).
5. Н.Н. Боголюбов, *ДАН СССР* **119**, 52 (1958).
6. A. Bohr, B.R. Mottelson, and D. Pines, *Phys. Rev.* **110**, 936 (1958).
7. А.Б. Мигдал, *Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер*, Наука, Москва (1965) [A.B. Migdal, *Theory of Finite Fermi Systems, and Applications to Atomic Nuclei*, Interscience Publishers, New York (1967)].
8. W. Heisenberg, *Z. Phys.* **77**, 1 (1932).
9. И.А. Ахиезер, Б.И. Барц, Ю.Л. Болотин, *Письма в ЖЭТФ* **11**, 557 (1970).
10. Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **30**, 1058 (1956) [*Sov. Phys. JETP* **3**, 920 (1957)].
11. В.П. Силин, *ЖЭТФ* **33**, 495 (1957) [*Sov. Phys. JETP* **6**, 387 (1958)].
12. А.С. Пелетминский, С.В. Пелетминский, Ю.В. Слюсаренко, *ФНТ* **25**, 211 (1999) [*Low Temp. Phys*. **25**, 153 (1999)].
13. А.С. Пелетминский, С.В. Пелетминский, Ю.В. Слюсаренко, *ФНТ* **25**, 417 (1999) [*Low Temp. Phys*. **25**, 303 (1999)].
14. Ю.В. Слюсаренко, *ФНТ* **24**, 291 (1998) [*Low Temp. Phys*. **24**, 219 (1998)].
15. Ю.В. Слюсаренко, *ФНТ* **24**, 522 (1998) [*Low Temp. Phys*. **24**, 393 (1998)].
16. A.P. Ivashin, S.V. Peletminsky, and Yu.V. Slyusarenko, *Ukr. J. Phys.* **52**, 128 (2007).
17. В.В. Красильников, С.В. Пелетминский, А.А. Яценко, А.А. Рожков, *ЭЧАЯ* **19**, 1440 (1988).
18. С.В. Пелетминский, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **191**, 174 (1989) [*Proc. Steklov Institute of Mathematics* **191**, 193 (1992)].
19. V.V. Krasil'nikov, S.V. Peletminskij, and A.A. Yatsenko, *Physica A* **162**, 513 (1990).
20. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский, В.В. Красильников, А.А. Яценко, *УФН* **163**, 1 (1993) [*Phys. Usp.* **36**, 35 (1993)].
21. A.I. Akhiezer, V.V. Krasilnikov, S.V. Peletminskiy, and A.A. Yatsenko, *Phys. Rep.* **245**, 1 (1994).
22. В.В. Красильников, Ю.М. Полуэктов, *ФНТ* **16**, 819 (1990) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **16**, 483 (1990)].
23. А.А. Исаев, С.В. Пелетминский, *УФЖ* **37**, 952 (1992) [*Ukr. J. Phys* **37**, 952 (1992)].
24. А.Н. Тарасов, *ФНТ* **24**, 429 (1998) [*Low Temp. Phys.* **24**, 324 (1998)].
25. A.N. Tarasov, *Probl. Atom. Sci. Techn.* № 6, 356 (2001).
26. A.N. Tarasov, *Probl. Atom. Sci. Techn.* № 3, 418 (2007).
27. A.N. Tarasov, *J. Mol. Liq.* **93**, 87 (2001).
28. A.N. Tarasov, *Physica B* **329–333**, 100 (2003).
29. А.И. Ахиезер, А.А. Исаев, С.В. Пелетминский, А.П. Рекало, А.А. Яценко, *ЖЭТФ* **112**, 3 (1997) [*JETP* **85**, 1 (1997)].
30. А.И. Ахиезер, А.А. Исаев, С.В. Пелетминский, А.А. Яценко, *ТМФ* **115**, 459 (1998) [*Theor. Math. Phys.* **115**, 723 (1998)].
31. A.I. Akhiezer, A.A. Isaev, S.V. Peletminsky, and A.A. Yatsenko, *Phys. Rev. C* **63**, 021304(R) (2001).
32. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский, А.А. Яценко, *ФНТ* **20**, 650 (1994) [*Low Temp. Phys.* **20**, 509 (1994)].
33. A.I. Akhiezer, A.A. Isayev, S.V. Peletminsky, and A.A. Yatsenko, *Phys. Lett. B* **451**, 430 (1999).
34. A.I. Akhiezer, A.A. Isayev, S.V. Peletminsky, and A.A. Yatsenko, *Physica B* **284–288**, 395 (2000).
35. A.I. Akhiezer, A.A. Isayev, S.V. Peletminsky, and A.A. Yatsenko, *J. Low Temp. Phys.* **119**, 299 (2000).
36. A.A. Isayev and G. Röpke, *Phys. Rev. C* **66**, 034315 (2002).
37. A.A. Isayev, *Phys. Rev. C* **65**, 031302 (2002).
38. M.Yu. Kovalevskii, A.A. Rozhkov, and L.V. Logvinova, *Physica A* **336**, 271 (2004).
39. М.Ю. Ковалевский, А.А. Рожков, *ТМФ* **113**, 313 (1997) [*Theor. Math. Phys.* **113**, 1462 (1997)].
40. В.В. Красильников, А.А. Рожков, А.А. Яценко, *ФНТ* **16**, 1368 (1990) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **16**, 776 (1990)].

41. M.Yu. Kovalevskii and A.A. Rozhkov, *Physica A* **216**, 169 (1995).
42. G.E. Volovik, *Exotic Properties of* ^{3}He , World Scientific, Singapore (1992).
43. D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium*, Taylor&Francis, London (1990).
44. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов*, Физматлит, Москва (2006).
45. С.В. Пелетминский, А.А. Яценко, С.Н. Шульга, *ФНТ* **30**, 261 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 191 (2004)].
46. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, Ю.В. Слюсаренко, *ТМФ* **74**, 281 (1988) [*Theor. Math. Phys.* **74**, 186 (1988)].
47. С.Н. Шульга, А.А. Яценко, *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна*, №710, *Сер. фізична «Ядра, частинки, поля»*, вип. 3/28, 31 (2005).
48. С.М. Шульга, О.О. Яценко, *Вісник Львівського університету, сер. фізична*, вип. 39, 68 (2006).
49. S. Shulga, *Problems of Atomic Science and Technology* №**1(77)**, 302 (2012).
50. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977) [A.I. Akhiezer and S.V. Peletminsky, *Methods of Statistical Physics*, Pergamon Press, Oxford (1981)].
51. Б.И. Барц, Ю.Л. Болотин, Е.В. Инопин, В.Ю. Гончар, *Метод Хартри–Фока в теории ядра*, Наукова думка, Киев (1982) [B.I. Barts, Yu.L. Bolotin, E.V. Inopin, and V.Yu. Gonchar, *The Hartree-Fock Method in the Theory of Nucleus*, Naukova Dumka, Kiev (1982)].
52. Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117**, 648 (1960).
53. M.J. Stephen, *Phys. Rev. A* **139**, 197 (1965).
54. O. Betheder-Matibet and P. Nozieres, *Ann. Phys. (NY)* **51**, 392 (1969).
55. А. Лейн, *Теория ядра*, Атомиздат, Москва (1967) [A.M. Lane, *Nuclear Theory*, Benjamin, NY (1964)].
56. А.Г. Ситенко, В.Н. Тартаковский, *Лекции по теории ядра*, Атомиздат, Москва (1972).
57. A.L. Goodman, *Phys. Rev. C* **60**, 014311 (1999).
58. G. Röpke, A. Schnell, P. Schuck, and U. Lombardo, *Phys. Rev. C* **61**, 024306 (2000).
59. Th. Alm, B.L. Friman, G. Röpke, and H. Schulz, *Nucl. Phys. A* **551**, 45 (1993).
60. M. Baldo, U. Lombardo, and P. Schuck, *Phys. Rev. C* **52**, 975 (1995).
61. E. Garrido, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra, and P. Schuck, *Phys. Rev. C* **60**, 064312 (1999).
62. A. Sedrakian and U. Lombardo, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 602 (2000).
63. L. Amundsen and E. Østgaard, *Nucl. Phys. A* **442**, 163 (1985).
64. W. Zuo and G.C. Lu, *Phys. Rev. C* **75**, 045806 (2007).
65. J. Margueron, H. Sagawa, and K. Hagino, *Phys. Rev. C* **77**, 054309 (2008).
66. Y. Tiana, Z.Y. Maa, and P. Ring, *Phys. Lett. B* **676**, 44 (2009).
67. K. Hebeler, T. Duguet, T. Lesinski, and A. Schwenk, *Phys. Rev. C* **80**, 044321 (2009).
68. S.S. Zhang, L.G. Cao, U. Lombardo, E.G. Zhao, and S.G. Zhou, *Phys. Rev. C* **81**, 044313 (2010).
69. N. Chamel, *Phys. Rev. C* **82**, 014313 (2010).
70. R.M. Aguirre and A.L. De Paoli, *Phys. Rev. C* **83**, 044325 (2011).
71. R. Aguirre, *Phys. Rev. C* **85**, 064314 (2012).
72. A.L. Goodman, *Phys. Rev. C* **58**, R3051 (1998).
73. A. Gezerlis, G.F. Bertsch, and Y.L. Luo, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 252502 (2011).
74. T.H.R. Skyrme, *Philos. Mag.* **1**, 1043 (1956); *Nucl. Phys.* **9**, 615 (1959); *ibid.* **9**, 635 (1959).
75. M. Bender, P.-H. Heenen, and P.-G. Reinhard, *Rev. Mod. Rhys.* **75**, 121 (2003).
76. M. Brack, C. Guet, and H.-B. Hekansson, *Phys. Rep.* **123**, 275 (1985).
77. A.V. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 331 (1975).
78. А. Абрагам, М. Гольдман, *Ядерный магнетизм: порядок и беспорядок*, Мир, Москва (1984), т. 1 [A. Abragam and M. Goldman, *Nuclear Magnetism: Order and Disorder*, Clarendon press, Oxford (1982)].

Theory of superfluid states with singlet and triplet types of pairing in nuclear matter

S.N. Shulga and Yu.V. Slusarenko

The paper presents the results of investigation of superfluid states in a two-component Fermi liquid in the framework of the Fermi liquid approach. Particular attention is paid to superfluid states in nuclear matter which are characterized by the superposition of singlet and triplet types of pairing in spin and isospin spaces. The authors have formulated the basic points of the Fermi liquid approach which are used in the study of superfluidity in nuclear matter with the superposition of singlet and triplet types of pairing. Derivation of the system of self-consistency equations and their solution are presented. For concrete calculations the interaction in the Skyrme model is taken. Using this model the conditions for the existence of the considered states are determined. These conditions impose certain constraints on the potential of interaction and on the density of particles in the system. It is shown that the states with a complete set of nonzero order parameters are realized only in a narrow density range, whose width and position in the density scale depend on the choice of a particular Skyrme force. Considered are 18 different parameterizations, and indicated is for which of them the studied types of superfluid states may appear. The problem of stability of the states with superposition of singlet and triplet types of pairing is studied. It is shown that the lowest value of the thermodynamic potential corresponds to purely triplet states, then in order of increasing there are the thermodynamic potential of purely singlet states, and mixed singlet-triplet states. The case of unitary states is considered separately. For these states the solutions of the self-consistency equations are analyzed too. The density range for these states is defined and it is shown that this range is different than from that which corresponds to the nonunitary states. In addition, studied is the problem of the existence of unitary superfluid states with the superposition of singlet and triplet superfluidity in the case of asymmetrical nuclear matter. It is shown that the appearance of asymmetry causes the unitarity of superfluid states in nuclear matter to be broken.

PACS: **21.65.–f** Nuclear matter;
26.60.–c Nuclear matter aspects of neutron stars;
71.10.Ay Fermi-liquid theory and other phenomenological models;
21.60.Jz Nuclear density functional theory and extensions (includes Hartree–Fock and random-phase approximations).

Keywords: superfluidity, Fermi liquid approach, self consistency equations, order parameter, nuclear matter, Skyrme forces.