

Структура и устойчивость нелинейных возбуждений в магнетиках при наличии локального высокочастотного поля и учете диссипации

А.С. Ковалев, Я.Е. Прилепский

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина*

E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua

А.А. Перетяцько

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина

Статья поступила в редакцию 8 августа 2008 г.

В рамках одномерного нелинейного уравнения Шредингера и его дискретного аналога рассмотрены солитоноподобные возбуждения легкоосного ферромагнетика, локализованные вблизи области точечной высокочастотной накачки циркулярным магнитным полем. В рамках упрощенной кусочно-нелинейной модели проанализировано влияние затухания на характер локализованных возбуждений и устойчивость таких состояний различного типа.

В межах одновимірного рівняння Шредингера та його дискретного аналога розглянуто солітоноподібні збудження легкоосного ферромагнетика, що локалізовані поблизу області точкової високо частотної накачки циркулярним магнітним полем. В межах спрощеної кусково-нелінійної моделі проаналізовано вплив загасання на характер локалізованих збуджень та стійкість таких станів різного типу.

PACS: 05.45.Yv Солитоны;
63.20.Pw Локализованные моды;
75.10.Nk Классические спиновые модели.

Ключевые слова: ферромагнетик, высокочастотное поле, локальные возбуждения, квазисолитонные состояния, нелинейное уравнение Шредингера, устойчивость.

1. Введение

Теоретическое и экспериментальное исследование нелинейной динамики твердых тел стало одним из перспективных, в смысле технологических приложений, направлений современной физики. Важным объектом нелинейной динамики и нелинейных структур являются *солитоны*, т.е. пространственно локализованные возбуждения различного типа над основным состоянием среды [1]. Один из видов нелинейных локализованных возбуждений — двухпараметрические динамические солитоны («бризеры», или «солитоны *огibaющей*»). Существование таких солитонов в магнетиках и оптических линиях передач подтверждено экспериментально [2–4]. В последнее время обсуждается практическое использование таких нелинейных

импульсов в технических устройствах: магнитных и акустических линиях задержки и оптических линиях передачи информации [3]. При этом возникает проблема возбуждения солитонных импульсов, управление ими, а поскольку, как правило, в среде существует сильное затухание, и задача усиления нелинейных сигналов. Экспериментальная ситуация в данном случае следующая: магнитные солитоны бризерного типа возбуждаются и детектируются тонкими полосовыми антеннами, расположенными на поверхности тонких и *узких* пленок железо-иттриевого граната (ЖИГ) [4]. Размеры антенн существенно меньше размеров пленки. Поэтому задача может рассматриваться как одномерная, а источник внешнего поля можно заменить на одномерную δ -функцию. Более того, в ряде экспери-

ментов магнитные солитоны возбуждались полосовыми антеннами в доменных границах [4]. В этом случае проблема становится строго одномерной. Однако данные о существовании не *движущихся* солитонов, а солитоноподобных стационарных состояний, локализованных вблизи излучателя, нам не известны, но известны экспериментальные данные о таких возбуждениях в двумерных магнитных пленках с точечным излучателем [5]. Из наблюдений структуры решетки цилиндрических магнитных доменов (ЦМД) можно сделать вывод о существовании области возбуждения магнетика, локализованной вблизи источника внешнего поля. Область возбужденного магнетика существенно превосходит размер этого источника, который также может считаться точечным. К сожалению, примененная экспериментальная методика (наблюдение решетки ЦМД) не может быть использована в экспериментах с одномерной геометрией. В данной работе теоретически показано, что такие нелинейные возбуждения, локализованные у источника внешней накачки, могут существовать и в одномерном случае.

Оказалось, что, кроме режима, при котором возникают распространяющиеся от источника солитоны и пространственно периодические нелинейные волны [4], возможна ситуация, когда при непрерывной накачке в окрестности точечного источника возникает стационарное локализованное возбуждение солитонного типа [5]. В нем потеря энергии за счет диссипации компенсируется источником внешнего высокочастотного поля. Трансформация солитонов при наличии затухания и пространственно однородного периодического внешнего поля рассматривалась ранее в [6]. С другой стороны, солитонная локализация при наличии точечных дефектов рассматривалась в [7,8]. Мы покажем, что локальное высокочастотное воздействие на среду приводит к качественно новым, по сравнению с рассмотренными в [6–8], явлениям. После того как Хасегава [3] предложил использовать оптические солитоны для передачи информации на большие расстояния, возникла проблема их затухания и усиления. В реальных линиях передач импульсы усиливаются специальными устройствами, включающими двухуровневые системы и фильтры, которые существенно изменяют форму прошедших импульсов. Возникает вопрос о возможности усиления импульсного сигнала пространственно локализованным источником высокочастотного поля с частотой, близкой к несущей частоте распространяющегося нелинейного импульса. Но при наличии вокруг источника поля солитоноподобного «облака» связанных с ним магновов или фотонов, проходящий импульс взаимодействует дополнительно с этим возбуждением. (Соотношение размеров области воздействия внешнего поля и области локализации возникающего нелиней-

ного возбуждения зависит от соотношений параметров среды и внешнего поля). Существование нелинейного возбуждения, локализованного вблизи источника внешнего поля, впервые теоретически (в приложении к длинным джозефсоновским контактам) было рассмотрено в работе [9], где было показано, что при приложении высокочастотного магнитного поля к границе контакта в нем возникает неоднородное распределение поля, амплитуда и профиль которого существенно зависят от амплитуды приложенного поля. Численно была продемонстрирована возможность двух режимов возбуждения: линейного и нелинейного, и результаты пояснены простыми качественными соображениями. Позже в работе [10] аналогичная задача в приложении к легкоосному ферромагнетику решалась также численно в рамках простой конечномерной модели для спиновой цепочки небольшой длины, а в отсутствие затухания — в работе [11]. Было показано, что основные результаты качественно совпадают с данными работы [9], хотя динамика носит более сложный характер. Недавно эти результаты были подтверждены в экспериментах на решетках поверхностных оптических волноводов [12].

В настоящей работе мы аналитически и численно рассмотрим проблему локализации нелинейных возбуждений при наличии пространственно локализованного высокочастотного внешнего поля и диссипации в рамках предложенной упрощенной модели. Подчеркнем, что речь идет не о параметрической пространственно однородной накачке, а о пространственно локализованном «прямом» силовом воздействии. Близкие проблемы, но в других постановках, рассматривались ранее. Так, в работе [13] исследованы квазисолитонные возбуждения в цепочке нелинейных ротаторов в условиях однородного параметрического возбуждения (а не локального прямого, как у нас) и наличия дефекта. В стационарном случае (до изучения устойчивости и учета диссипации) задача фактически сводится к рассмотренной в работе [8], что приводит к качественно другим результатам. В работе [14] была рассмотрена задача о нелинейном резонансе для изолированного магнитного момента во внешнем циркулярном поле и показано, что устойчивость разных состояний такая же, как и в случае стандартного нелинейного осциллятора, т.е. колебание с большой амплитудой всегда устойчиво. (Статья, несомненно, имеет отношение к данной работе.) В нашей статье мы подчеркиваем близость рассматриваемой солитонной проблемы к задаче об изолированном магнитном моменте (см. врезки на рис. 3 и 4). Но наличие распределенной системы и полуограниченного сплошного спектра приводит к существенному изменению условий устойчивости различных нелинейных состояний: квазисолитонные состояния с большой амплитудой

устойчивы лишь в некоторых «окнах» параметров внешнего поля. Это один из основных результатов данной работы. Несомненно, очень важна работа [15]. В ней впервые была рассмотрена задача о солитонных возбуждениях в однородной системе в условиях однородной прямой накачки (как у нас). В условиях точечной накачки меняются как свойства квазисолитонных возбуждений, так и их число. Сравнение характеристик нелинейных возбуждений в двух разных подходах и их различие важно и интересно. Наконец, необходимо отметить обзор [16]. Эта работа важна тем, что в ней рассмотрена нелинейная динамика в системе (дискретная система осцилляторов) с точечной прямой накачкой (как в нашей статье), но для системы осцилляторов с нелинейным взаимодействием между ними, что существенно меняет всю динамику рассматриваемой системы.

2. Солитоны в однородной среде без внешнего поля и затухания

Рассмотрение проводится в рамках одномерной модели (что соответствует ряду задач нелинейной теории магнетизма и нелинейной оптики), описываемой нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) и его дискретным аналогом (ДНУШ). В случае классического рассмотрения ферромагнетика с одноионной анизотропией типа «легкая ось» динамика намагниченности в длинноволновом пределе без учета затухания описывается уравнением Ландау–Лифшица [2]

$$\frac{\hbar}{2\mu_0} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + I \left[\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2} \right] + A\mathbf{Me} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{M} — вектор намагниченности, I — константа обменного взаимодействия, A — константа одноосной анизотропии вдоль направления \mathbf{e} . Как впервые показано в работе [17], при малых уровнях возбуждения для комплексной величины $\psi = M_x + iM_y$ уравнение (1) в безразмерных переменных сводится к НУШ:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \omega_0 \psi + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (2)$$

где положительный знак при нелинейном слагаемом соответствует так называемой фокусирующей нелинейности (притяжению между элементарными возбуждениями). В уравнении (2) оставлен параметр ω_0 ($\omega_0 > 0$), отвечающий границе спектра линейных волн (частоте однородного ферромагнитного резонанса), обладающих сильной дисперсией ($\omega = \omega_0 + k^2$). Уравнение (2) точно интегрируется и имеет солитонные решения, которые в общем случае двухпараметрические и характеризуются скоростью перемещения огибающей V и частотой внутренней прецессии ω . Ниже

будем обсуждать лишь неподвижные солитоны, решения для которых имеют вид

$$\psi(x, t) = \sqrt{2} \varepsilon \operatorname{ch}^{-1}(\varepsilon(x - x_0)) e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

где $\varepsilon = \sqrt{\omega_0 - \omega}$, x_0 — произвольная константа в случае однородной среды (положение центра солитона), а частота солитона $\omega < \omega_0$ — произвольный параметр, определяющий его амплитуду, полную энергию E и так называемую «норму»:

$$N(\omega) = \int |\psi|^2 dx, \quad (4)$$

соответствующую при квазиклассическом рассмотрении числу элементарных возбуждений (в нашем случае магнонов), связанных в солитоне. Функция $N(\omega)$ — важная характеристика нелинейных возбуждений, определяющая частотную зависимость энергии солитона $E = E(\omega)$. Напомним [1], что для стационарных одночастотных состояний $dE/dN = \omega$. Норма солитонного решения (3) равна $N_S = 4\varepsilon$ и, следовательно, $E_S = \omega_0 N_S - N_S^3/12$, в отличие от одного возбужденного магнитного момента, для которого $E = \omega_0 N - N^2/2$. Из последнего следует, что для изолированного момента норма решения равна $N_1 = \varepsilon^2$.

При учете затухания в системе уравнение (2) модерируется следующим образом:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \omega_0 \psi + |\psi|^2 \psi + i\gamma \psi = 0, \quad (5)$$

где γ — декремент затухания спиновых волн. Уравнение (5) не имеет стационарных решений, и солитоны со временем затухают, но локализованное ВЧ поле может их стабилизировать.

3. Модель и постановка задачи. Линейный предел

Рассмотрим случай, когда к легкоосному ферромагнетику в узкой области пространства приложено переменное внешнее циркулярное магнитное поле с амплитудой h и частотой ω , вращающееся в плоскости, перпендикулярной направлению легкой оси. При этом в длинноволновом пределе уравнение (5) принимает вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \omega_0 \psi + |\psi|^2 \psi + i\gamma \psi = h e^{-i\omega t} \delta(x). \quad (6)$$

(Если область локализации внешнего поля имеет ширину $\Delta x = a$, то в правой части надо заменить $\delta(x) \rightarrow \delta(x/a)$, что приводит лишь к несущественной перенормировке амплитуды поля $h \rightarrow ah$. Во введенных безразмерных переменных область приложения внешнего поля порядка магнитной длины $l_0 = \sqrt{I/A}$.)

Заметим, что в обсуждавшейся в [16] задаче о точечной прямой накачке в длинноволновом пределе в уравнении (6) вместо слагаемых $\partial^2 \psi / \partial x^2 + |\psi|^2 \psi$ возникает так называемое «нелинейное дисперсионное слагаемое» $|\psi|^2 \partial^2 \psi / \partial x^2$, что существенно меняет нелинейную динамику системы и, в частности, может привести к существованию «экзотических» солитонов. В работе [18] исследовалась проблема существования и стабильности солитонных возбуждений при однородной внешней накачке, при которой в правой части уравнения (6) δ -функция заменяется константой. Локализация внешнего поля в нашем случае кардинально меняет постановку задачи и характер результатов. Следует упомянуть также демонстрацию экспериментальной возможности управления магнитными импульсами с помощью приложенного в узкой области внешнего магнитного поля [19], но в отличие от нашего случая речь идет о приложенном постоянном поле.

В настоящей работе изучена динамика магнитных (т.е. дискретных) систем, поэтому уравнение (6) следует рассматривать как длинноволновый предел следующего уравнения в конечных разностях:

$$i \frac{d\psi_n}{dt} + \Delta_2 \psi_n - \omega_0 \psi_n + |\psi_n|^2 \psi_n + i\gamma \psi_n = h e^{-i\omega t} \delta_{0n}, \quad (7)$$

где вторая разность $\Delta_2 \psi_n = \psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n$. (При таком подходе «шаг» дискретной цепочки совпадает с размером области приложения ВЧ поля.)

Нас будет интересовать возможность образования стационарных состояний, локализованных на рассматриваемом «активном элементе», т.е. решения вида $\psi(x, t) = u(x) \exp(-i\omega t)$, где $u(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. В отсутствие затухания функция $u(x)$ может быть вещественной. В этом случае уравнение (6) сводится к однородному в областях $x > 0$ и $x < 0$ с граничным условием при $x = 0$: $u_{+0} = u_{-0}$, $\partial u / \partial x|_{+0} - \partial u / \partial x|_{-0} = h$.

В отсутствие затухания в линейном пределе для одного магнитного момента имеем стандартную задачу о резонансе с вращением спина в фазе с внешним полем при $\omega > \omega_0$ и в противофазе с полем при $\omega < \omega_0$ (см. [16]). В системе с распределенными параметрами в отсутствие накачки область $\omega > \omega_0$ отвечает линейным волнам вида $\psi \sim \exp(-i\omega t + ikx)$ с законом дисперсии $\omega = \omega_0 + k^2$. При этом в области $\omega < \omega_0$ решения с конечной амплитудой отсутствуют. При наличии точечного высокочастотного воздействия с частотой $\omega > \omega_0$ на этой частоте происходит излучение монохроматической симметричной расходящейся волны вида $\psi_{\pm} = (h/2k) \exp[i(-\omega t \pm kx - \pi/2)]$. (В точке накачки фаза волны отличается от фазы внешнего поля на $\pi/2$.) В области $\omega < \omega_0$, где линейные волны отсутствуют, существуют симметричные локализованные (линей-

ные) состояния вида $\psi_{\pm} = (h/2k) \exp(-i\omega t \mp kx - i\pi)$ с $k = \sqrt{\omega_0 - \omega}$, т.е. вектор намагниченности в точке накачки вращается в противофазе с приложенным внешним полем, как и в случае одного спина. При одновременном учете затухания и накачки также возможны стационарные состояния. В области частот внешнего поля $\omega > \omega_0$ излучаемые линейные волны затухают с расстоянием, и при малой диссипации область затухания порядка величины $\sqrt{\omega - \omega_0} / \gamma$. В области $\omega < \omega_0$ убывание поля с расстоянием в локальном колебании становится немонотонным, и пространственное спадание поля сопровождается осцилляциями с периодом порядка $\sqrt{\omega_0 - \omega} / \gamma$. Нелинейные локализованные стационарные возбуждения солитонного типа при наличии затухания без внешней накачки отсутствуют: солитоны типа (3) с течением времени затухают. Их амплитуда понижается как $\exp(-\gamma t)$, а область локализации растет как $\exp(\gamma t)$ [12]. Однако мы покажем, что локализованная накачка может стабилизировать такие квазисолитонные состояния.

4. Нелинейные локальные возбуждения в системе без затухания

Изучение нелинейных локальных состояний в условиях точечной накачки начнем со случая отсутствия затухания ($\gamma = 0$ в (6)). При этом уравнение (6) в областях $z > 0$ и $z < 0$ совпадает с уравнением (2), и для построения нелинейных локализованных решений можно воспользоваться солитонными решениями (3), подобрав константы x_0 таким образом, чтобы решения удовлетворяли указанным выше граничным условиям в точке воздействия поля. Различие ситуации в двух случаях заключается в следующем. В однородной системе частота солитона ω может быть произвольной (но меньшей ω_0) и положение центра солитона x_0 также произвольно. В системе с периодическим точечным воздействием высокочастотного поля частота локализованных решений задается частотой внешнего поля (т.е. $\psi \sim \exp(-i\omega t)$), его центр локализации определяется точкой приложения поля, а вид решения зависит от частоты и амплитуды поля, т.е. параметр x_0 теперь не произволен, а определяется параметрами внешнего поля (его частотой и амплитудой).

Классификация возможных локализованных возбуждений стационарного типа $\psi(x, t) = u(x) \exp(-i\omega t)$ легко прослеживается на «фазовой плоскости» ($u(x), du(x)/dx$) данной системы (все они симметричны относительно точки накачки). Связь этих величин определяется соотношениями $(du/dx)^2 = \epsilon^2 u^2 - u^4/2$ при $x > 0$ и $du/dx|_{x=+0} = h/2$. Фазовый портрет системы изображен на рис. 1, где приведены только линии, соответствующие локализованным состояниям с

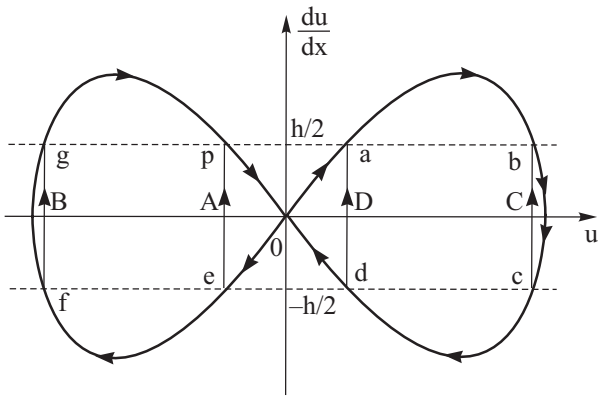


Рис. 1. Фазовый портрет локализованных состояний в отсутствие затухания.

асимптотиками $u(\infty) = 0$. На рисунке видно, что существуют четыре типа локальных квазисолионных состояний. (В работах [9,10] рассматривались только два из них.) На фазовом портрете изображающая точка перемещается по сепаратрисным петлям, соответствующим солитонным решениям (3), и испытывает скачки снизу вверх от значения $du/dx = -h/2$ до значения $du/dx = h/2$. Четверем решениям отвечают траектории $0ep0$ (A), $0efgp0$ (B), $0abcbcd0$ (C) и $0abcdabcd0$ (D). Профили этих решений приведены на рис. 2 в виде кривых A, B, C и D. При малых значениях амплитуды поля первое из этих решений A — малоамплитудное и напоминает решение линейной задачи (как и в линейном случае, фаза прецессии намагниченности в точке приложения поля отличается на π от фазы внешнего поля). Профили решений B и C при этом близки к солитонным решениям (3) с разными знаками. Наконец, решение D представляет два солитонных решения, симметрично расположенных относительно точки на-

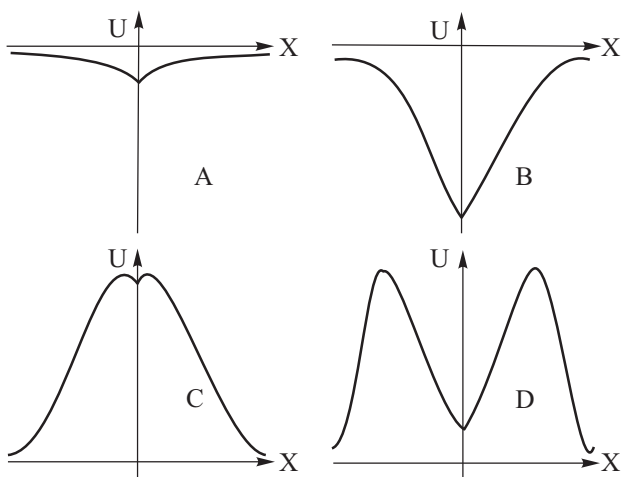


Рис. 2. Профили возможных локализованных квазисолионных состояний без учета затухания.

качки на большом расстоянии друг от друга. Очевидно, что в решениях A и B на полуоси $x > 0$ параметр x_0 отрицателен, а в решениях C и D — положителен. Явный вид зависимостей параметра x_0 (для области $x > 0$) от параметров внешнего поля (ω, h) для локализованных состояний следующий:

$$x_0^{(A,B)} = \frac{1}{\epsilon} \text{Arsh} \left[-\sqrt{2}\epsilon^2 / (h \mp \sqrt{2\epsilon^4 / h^2 - 1}) \right], \quad (8)$$

$$x_0^{(C,D)} = \frac{1}{\epsilon} \text{Arsh} \left[\sqrt{2}\epsilon^2 / (h \mp \sqrt{2\epsilon^4 / h^2 - 1}) \right]. \quad (9)$$

Выражения (3), (8), (9) полностью определяют точные аналитические выражения для всех локализованных состояний в условиях внешней накачки. Из самого вида решения и соотношений (8), (9) видно, что все локализованные решения существуют только в области значений параметров накачки, определяемой неравенством $0 < h < \sqrt{2}\epsilon^2$. (Параметр h предполагается положительным.) Таким образом, в отличие от солитонов в однородной системе, которые существуют во всей области частот вне спектра линейных волн (при $\omega < \omega_0$), солитоноподобные состояния в системе с накачкой существуют лишь при частотах, меньших критической частоты $\omega < \omega_* = \omega_0 - h/\sqrt{2}$. Между областью частот спектра линейных волн и областью локальных возбуждений (при $\omega_* < \omega < \omega_0$) локализованные стационарные возбуждения не существуют. По-видимому, в этой области параметров внешнего поля могут существовать два нестационарных динамических режима: излучение периодического цуга солитонов от точки накачки, распространяющихся в обе стороны от нее, и нестационарное (типа предельного цикла) или хаотическое локализованное состояние. Ниже мы будем обсуждать только стационарные локализованные состояния.

Из выражений (8), (9) видно существенное различие ситуации в случае однородной прямой накачки (как в [15]) и в нашем случае. Различие видно из сравнения областей существования локализованных состояний. На плоскости параметров внешнего воздействия (h, ϵ) соотношения критических значений параметров $h_c = h_c(\epsilon)$ различны: при однородной накачке $h_c \sim \epsilon^3$, а при точечной $h_c \sim \epsilon^2$.

Поскольку используемое уравнение описывает лишь малоамплитудные возбуждения магнетика, для решений B, C, D следует, что $\epsilon \ll 1$. Максимальный градиент поля намагниченности в этих решениях равен $|du/dx|_{\max} = \epsilon^2/2$. Поэтому из условия применимости длинноволнового приближения ($du/dx \ll 1$) также следует неравенство $\epsilon \ll 1$, а из условия $h < \sqrt{2}\epsilon^2$ следует ограничение на амплитуду поля: $h \ll \epsilon$. Для решения A условие применимости уравнения (малоамплитудности) сводится к неравенству $h \ll \epsilon$, а при-

менимость длинноволнового приближения — к неравенству $h \ll 1$. Таким образом, все решения рассматриваются лишь в области малых амплитуд внешнего поля $h \ll 1$. Что касается частот внешнего поля, то решение A можно рассматривать и при $\epsilon \sim 1$, в то время как решения B, C, D — только при $\epsilon \ll 1$.

Удобно характеризовать полученные решения интегральными величинами типа полной энергии или нормы. Вычислим их норму (4). В общем случае при наличии внешнего воздействия норма решения не сохраняется, и ее изменение со временем определяется формулой $dN/dt = ih[\bar{\psi}(0) \exp(-i\omega t) - \psi(0) \exp(i\omega t)]$. Но для рассматриваемых стационарных состояний вида $\psi = u \exp(-i\omega t)$ с вещественной функцией u норма постоянна, равна $N = 4\epsilon(1 + th \epsilon x_0)$ и имеет следующую зависимость от параметров внешнего поля:

$$N_{AB} = 4\epsilon \left(1 - \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - h^2/2\epsilon^4}} / \sqrt{2} \right), \quad (10)$$

$$N_{CD} = 4\epsilon \left(1 + \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - h^2/2\epsilon^4}} / \sqrt{2} \right). \quad (11)$$

При фиксированной амплитуде внешнего поля h эти зависимости $N(\omega)$ приведены на рис. 3 (в виде зависимости $N(\epsilon)$). (Здесь же на врезке показана соответствующая зависимость для изолированного магнитного момента.) При критическом значении частоты ω_* ($\epsilon_* = \sqrt{h}/\sqrt[4]{2}$) возникает пара решений A, B с величиной нормы $N_{AB} = 2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2} - 1)\sqrt{h}$ и пара решений C, D с нормой $N_{CD} = 2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2} + 1)\sqrt{h}$. Таким образом, локальные состояния возникают бифуркационным образом сразу с конечной нормой. (В однородной системе без накачки малоамплитудные солитоны возникают на границе спектра линейных волн с нулевой нормой.)

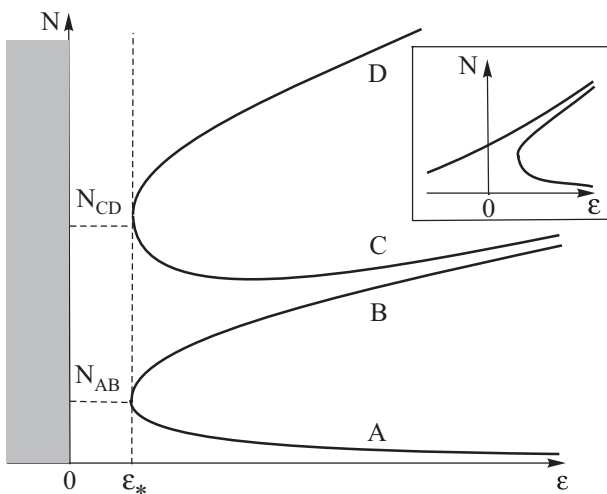


Рис. 3. Зависимости нормы локализованных состояний от частоты вынуждающей силы (от параметра ϵ). На врезке приведена соответствующая зависимость для изолированного магнитного момента.

Для решения A асимптотика при больших отрицательных частотах ($\epsilon \rightarrow \infty, N \rightarrow 0$) имеет вид $N_A \approx h^2/4\epsilon^3$, что совпадает с соответствующей зависимостью в линейном пределе. Асимптотики решений B, C, D в пределе больших частот накачки ($\epsilon \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$) имеют вид

$$N_{B,C}(\epsilon \rightarrow \infty) \approx 4\epsilon(1 \mp h/2\sqrt{2}\epsilon^2) \approx 4\epsilon, \quad (12)$$

$$N_D(\epsilon \rightarrow \infty) \approx 8\epsilon(1 - h^2/18\epsilon^4) \approx 2N_{B,C}. \quad (13)$$

В этом пределе норма решений B, C совпадает с нормой солитонного решения (3) и сами эти решения близки к солитонному. Норма решения D примерно в 2 раза превышает норму решений B, C : вместо одного солитона, связанного с точкой накачки, имеем два солитона с той же частотой, разнесенных на большое расстояние от этой точки.

Зависимость $N(\omega, h)$ очень важна с теоретической точки зрения, так как фактически задает связь энергии возбуждения с его частотой и амплитудой. С точки зрения эксперимента более важной является зависимость при фиксированной частоте амплитуды возбуждения от амплитуды внешнего поля, которую легче изменять, чем частоту. В работах [9–11] были исследованы зависимости амплитуды локализованных возбуждений в точке приложения внешнего поля от амплитуды поля. Однако в [9,10] была рассмотрена зависимость модуля амплитуды поля, из-за чего «потеряна» часть решений. Как показано выше, решения попарно имеют одинаковые амплитуды при $x = 0$, отличаясь при этом знаком и имея существенно различный профиль. Амплитуду возбуждения в точке при-

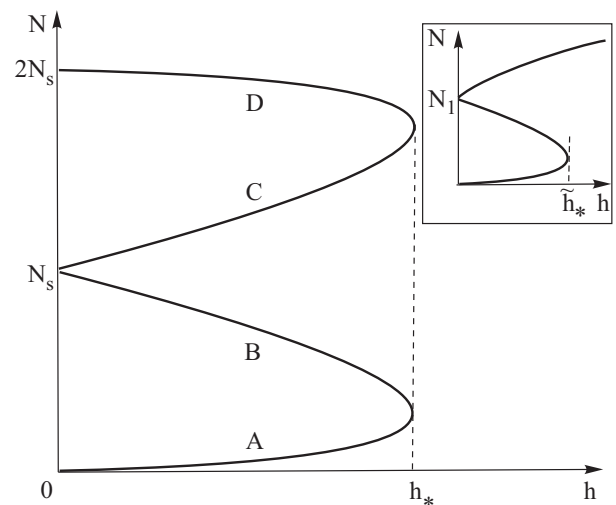


Рис. 4. Зависимость нормы локализованных состояний от амплитуды приложенного поля. На врезке — соответствующая зависимость для одного магнитного момента.

ложения внешнего поля легко связать с нормой решения:

$$u(x=0) = N/2^{3/2} - \sqrt{2}\epsilon. \quad (14)$$

В малых полях $N_A \approx h^2/4\epsilon^3$, $N_B \approx 4\epsilon - \sqrt{2}h/\epsilon$, $N_C \approx 4\epsilon + \sqrt{2}h/\epsilon$ и $N_D \approx 8\epsilon - h^2/4\epsilon^3$. Максимальная амплитуда внешнего поля, ниже которой существуют локализованные решения, равна $h_* = \sqrt{2}\epsilon^2$. Соответствующий график приведен на рис. 4. (На врезке показана зависимость для одного магнитного момента. Качественно эти зависимости совпадают для нижних ветвей, хотя характерные критические параметры отличаются: $N_S = 4\epsilon$, $N_1 = \epsilon^2$.)

5. Влияние затухания на динамику локализованных состояний. Упрощенная модель

Учет затухания существенно влияет на свойства квазисолитонных состояний, локализованных у «активного элемента», что было продемонстрировано в [10]. В частности, решение D уже не может существовать, так как оно описывает два солитона, расположенных далеко от точки накачки, т.е. в области, где диссипация не компенсируется внешним полем.

При наличии затухания распределение намагниченности будет описываться уже комплексной функцией: $u(x) = R(x) + iJ(x)$. Поэтому уравнение (6) (в случае стационарных состояний) трансформируется в следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2R}{dx^2} - \epsilon^2 R - \gamma J + R(R^2 + J^2) = h\delta(x), \quad (15)$$

$$\frac{d^2J}{dx^2} - \epsilon^2 J + \gamma R + J(R^2 + J^2) = 0$$

с граничными условиями в точке $x = 0$:

$$\left. \frac{dR}{dx} \right|_{+0} - \left. \frac{dR}{dx} \right|_{-0} = h, \quad R|_{+0} = R|_{-0}; \quad (16)$$

$$\left. \frac{dJ}{dx} \right|_{+0} = \left. \frac{dJ}{dx} \right|_{-0}, \quad J|_{+0} = J|_{-0}.$$

Однако решить такую систему нелинейных неоднородных уравнений аналитически не удастся. Поэтому предлагается рассмотреть упрощенную модель, в основном учитывающую особенности пространственной структуры нелинейных стационарных состояний. Поскольку в отсутствие затухания решения A , B , C экспоненциально убывают с расстоянием от точки приложения внешнего поля, а затухание в этом случае может привести лишь к дополнительному уменьшению области локализации, то на первом шаге мы сохраним нелинейность лишь в точке накачки ($x = 0$), а в остальной части пространства ($x > 0$, $x < 0$) будем счи-

тать среду линейной. (Такой подход используется, например, в нелинейной гидродинамике при выводе уравнения KdV для нелинейных поверхностных волн, когда нелинейность не учитывается в объеме, а только в граничных условиях на поверхности [20]. Исследование нелинейных упругих поверхностных волн у границы полупространства также демонстрирует сходство результатов, полученных при учете нелинейности среды в полупространстве и при учете ее только в поверхностном слое [21].) В нашем случае мы также получаем результаты, качественно сходные с результатами в исходной модели. Однако теперь решение типа D отсутствует и в решении типа C поле от источника убывает монотонно. Профили поля намагниченности в трех возможных локализованных состояниях близки к таковым для квазисолитонных возбуждений, изображенным на рис. 2 в виде графиков A , B , C . Предложенная модель во многом аналогична задаче об ангармоническом осцилляторе в условиях резонанса. В частности, зависимость нормы возбуждения от частоты (ϵ) в области $\omega < \omega_0$ качественно такая же, как и для ангармонического осциллятора. (Сравните графики на рис. 3 и 4.) Однако наличие контакта с полуограниченными линейными магнитными системами делает ее похожей на исходную модель: имеется полуограниченная область спектра линейных волн и частоты локальных состояний лежат лишь в области вне этого сплошного спектра, полная норма локализованных решений N при малых значениях затухания возрастает при приближении к границе сплошного спектра ($N \sim 1/\gamma$) и расходится при $\gamma \rightarrow 0$.

Исследование предложенного упрощенного подхода начнем с дискретно-непрерывной модели, т.е. системы, состоящей из нелинейного элемента, на который действует внешнее поле и который взаимодействует с двумя непрерывными распределенными линейными системами. Для описания такой модели удобно рассматривать по отдельности намагниченность нелинейного возбуждаемого участка ψ_0 и континуальное поле ψ для непрерывного распределения в линейной системе (поле в точке «сшивки» линейных систем и нелинейного элемента, т.е. на границе линейных участков обозначим через ψ_s). С учетом этого динамические уравнения записываются следующим образом:

$$i \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + 2v(\psi_s - \psi_0) - \omega_0 \psi_0 + |\psi_0|^2 \psi_0 + i\gamma \psi_0 = h e^{-i\omega t}, \quad (17)$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \omega_0 \psi + i\gamma \psi = 0. \quad (18)$$

Данную систему уравнений необходимо дополнить граничными условиями «непрерывной сшивки» ли-

нейных полюсов и нелинейного дискретного элемента, которые имеют следующий вид:

$$v(\psi_{\pm s} - \psi_0) = \pm \frac{d\psi}{dx} \Big|_{\pm s}, \quad \text{при } x > 0, \quad x < 0, \quad (19)$$

где введен новый дополнительный параметр v , который характеризует взаимодействие между активным элементом и связанными с ним линейными цепочками. В упрощенном подходе система (17)–(19) играет роль уравнения (6) исходной модели, а вместо дискретного уравнения (7) теперь можно воспользоваться дискретной системой уравнений

$$i \frac{d\psi_n}{dt} + \Delta_2 \psi_n - \omega_0 \psi_n + (v \Delta_2 \psi_n + |\psi_n|^2 \psi_n - h e^{-i\omega t}) \delta_{n0} + (v-1)(\psi_n - \psi_0)(\delta_{n1} + \delta_{n,-1}) + i\gamma \psi_n = 0. \quad (20)$$

Прежде всего, изучим кусочно-непрерывную систему (17)–(19). Как указывалось выше, решения этой системы (т.е. выражения для $u(x)$) комплексны:

$$\psi(x, t) = [R(x) + iJ(x)] e^{-i\omega t}, \quad \psi_0(t) = (R_0 + iJ_0) e^{-i\omega t}, \quad (21)$$

а граничные условия переписутся следующим образом (выпишем граничные условия только для $x > 0$):

$$v(R_s - R_0) = dR/dx|_s, \quad v(J_s - J_0) = dJ/dx|_s. \quad (22)$$

Решения уравнения (18) при $x > 0$ и $x < 0$ вне области ВЧ накачки имеют вид

$$\begin{pmatrix} R_{\pm} \\ J_{\pm} \end{pmatrix} = e^{\mp \alpha x} \left[\begin{pmatrix} R_s \\ J_s \end{pmatrix} \cos(\beta x) \pm \begin{pmatrix} -J_s \\ +R_s \end{pmatrix} \sin(\beta x) \right], \quad (23)$$

где $\alpha = \sqrt{\sqrt{\epsilon^4 + \gamma^2 + \epsilon^2} / \sqrt{2}}$, $\beta = \sqrt{\sqrt{\epsilon^4 + \gamma^2 - \epsilon^2} / \sqrt{2}}$. (При использовании длинноволнового приближения в уравнении (18) следует учитывать неравенства $\alpha, \beta \ll 1$. Это приводит к ограничению на параметры системы: $\gamma \ll 1$ и $\epsilon \ll 1$.) Из граничных условий следует связь амплитуды на границе (R_s, J_s) с амплитудой нелинейного элемента (R_0, J_0) :

$$\begin{aligned} R_s &= -v[J_0\beta - R_0(v + \alpha)] / \Phi, \\ J_s &= v[R_0\beta + J_0(v + \alpha)] / \Phi, \\ \Phi &= (v + \alpha)^2 + \beta^2. \end{aligned}$$

Подставляя полученные решения (23) линейной системы в уравнение (17), находим систему алгебраических уравнений для амплитуды в точке накачки (R_0, J_0) , содержащую параметры задачи ϵ, h, γ и v . Ее можно представить в виде одного кубического уравнения для нормы колебания активного элемента $n_0 = R_0^2 + J_0^2$:

$$n_0^3 + 2Gn_0^2 + (G^2 + P^2)n_0 - h^2 = 0, \quad (24)$$

где $G = 2v^2(v + \alpha) / \Phi - (\epsilon^2 + 2v)$ и $P = 2v^2\beta / \Phi + \gamma$. (Очевидно, что $P > 0$, и легко показать, что $G < 0$.) Величины (R_0, J_0) просто выражаются через решение уравнения (24):

$$R_0 = n_0(n_0 + G) / h, \quad J_0 = -n_0P / h. \quad (25)$$

Полная норма (4) решения, которая для нашей модели имеет вид $N = 2 \int_0^{\infty} |\psi|^2 dx + |\psi_0|^2$, пропорциональна n_0 :

$$N(\omega, h, \gamma, v) = n_0(1 + v^2 / \alpha\beta). \quad (26)$$

Поэтому достаточно выяснить зависимость нормы колебания в точке накачки $n_0(h, \epsilon; \gamma, v)$ от параметров системы (γ, v) и параметров внешнего воздействия (h, ω) для различных решений. При учете затухания максимум возбуждения системы находится в точке приложения внешнего поля и значение амплитуды поля $u(x = 0)$ однозначно определяет полную норму решения.

Рассмотрим плоскость параметров внешнего поля (h, ϵ) . Анализ уравнения (24) показывает, что на ней можно выделить 4 области (рис. 5). В областях I, II и III существует единственное решение этого уравнения, а в заштрихованной области IV — три решения. Зависимость $n_0(h, \epsilon)$ образует над плоскостью параметров внешнего поля «поверхность со складкой», возникающей в точке A [22]. Границы областей существования решений разного вида легко находятся. Удобно ввести выражения для нижней и верхней гра-

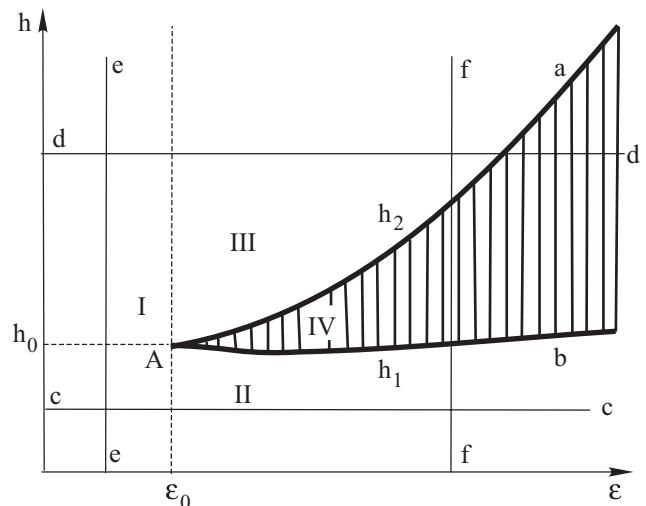


Рис. 5. Плоскость параметров внешнего ВЧ поля (h, ϵ) и области существования локализованных возбуждений различного типа. Заштрихована область существования трех различных решений.

ниц области IV существования трех различных локализованных состояний:

$$h_{1,2}^2(\epsilon, \gamma) = -(2/27)[G(G^2 + 9P^2) \pm (G^2 - 3P^2)^{3/2}]. \quad (27)$$

Точке *A* на рис. 5, в которой $G = -\sqrt{3}P$, отвечает значение частоты $\epsilon = \epsilon_0(\gamma)$, зависящее от параметра затухания: $\epsilon_0^2 \approx \gamma/\sqrt{3}$ при $\gamma \ll 1$ и $\epsilon_0^2 \approx \sqrt{3}\gamma$ при $\gamma \gg 1$. Соответствующее значение амплитуды поля $h_0(\gamma)$ зависит от затухания таким образом: $h_0 \approx (4/3)^{9/8}\gamma^{3/4}$ при $\gamma \ll 1$ и $h_0 \approx (4/3)^{3/4}\gamma^{3/2}$ при $\gamma \gg 1$. (Напомним, что при $\gamma \gg 1$ и $\epsilon \gg 1$ длинноволновое рассмотрение задачи неприменимо.) При $\gamma \ll 1$ и $\epsilon - \epsilon_0 \ll \epsilon_0$ имеем $h_{1,2} \approx h_0 \mp (2/3)^{3/4}(\epsilon - \epsilon_0)^{3/2}$, а линии (а) $h = h_2(\epsilon)$ и (б) $h = h_1(\epsilon)$ с ростом частоты ϵ расходятся пропорционально $(\epsilon - \epsilon_0)^{3/2}$, согласно общей теории дифференциальных уравнений [15]. При больших значениях амплитуды поля и параметра затухания асимптотики границ области трех решений имеют вид $h_1 \approx \gamma\epsilon$ и $h_2 \approx 2\epsilon^3/3^{3/2}$.

В области IV $G^2 - 3P^2 > 0$ и параметры $h_1(\epsilon, \gamma)$ и $h_2(\epsilon, \gamma)$ вещественны. Трех локализованным состояниям с $n_0^{(l)} < n_0^{(m)} < n_0^{(h)}$ отвечают решения

$$n_0^{(l)} = -\frac{2G}{3} - \sqrt[3]{2(h_2^2 - h_1^2)} \cos \frac{2}{3} \arccos \sqrt{\frac{h_2^2 - h^2}{h_2^2 - h_1^2}}, \quad (28)$$

$$n_0^{(h)} = -\frac{2G}{3} + \sqrt[3]{2(h_2^2 - h_1^2)} \cos \frac{2}{3} \arccos \sqrt{\frac{h^2 - h_1^2}{h_2^2 - h_1^2}}, \quad (29)$$

$$n_0^{(m)} = -2G - n_0^{(l)} - n_0^{(h)}. \quad (30)$$

Решения для $n_0^{(m)}$ и $n_0^{(h)}$ совпадают при $h = h_2$, а для $n_0^{(m)}$ и $n_0^{(l)}$ — при $h = h_1$.

В незаштрихованных областях на рис. 5 существует лишь одно локальное состояние. В областях II при $h < h_1$ и $\epsilon > \epsilon_0$ и III при $h > h_2$ и $\epsilon > \epsilon_0$ решения соответственно имеют вид

$$n_0^{(II)} = -\frac{2G}{3} - \sqrt[3]{2(h_2^2 - h_1^2)} \operatorname{ch} \frac{2}{3} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{h_2^2 - h^2}{h_2^2 - h_1^2}}, \quad (31)$$

$$n_0^{(III)} = -\frac{2G}{3} + \sqrt[3]{2(h_2^2 - h_1^2)} \operatorname{ch} \frac{2}{3} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{h^2 - h_1^2}{h_2^2 - h_1^2}}. \quad (32)$$

Наконец, в области I с $G^2 - 3P^2 < 0$ функции h_i становятся комплексными, но решение и его норма остаются вещественными. Если в формулах (27) заменить $G^2 - 3P^2$ на $3P^2 - G^2$, то, обозначив полученные выражения через \tilde{h}_i^2 , решение можно записать в виде

$$n_0^{(I)} = -\frac{2G}{3} + \sqrt[3]{2(\tilde{h}_2^2 - \tilde{h}_1^2)} \operatorname{sh} \frac{1}{3} \operatorname{Arsh} \frac{\tilde{h}_2^2 + \tilde{h}_1^2 - 2h^2}{\tilde{h}_2^2 - \tilde{h}_1^2}. \quad (33)$$

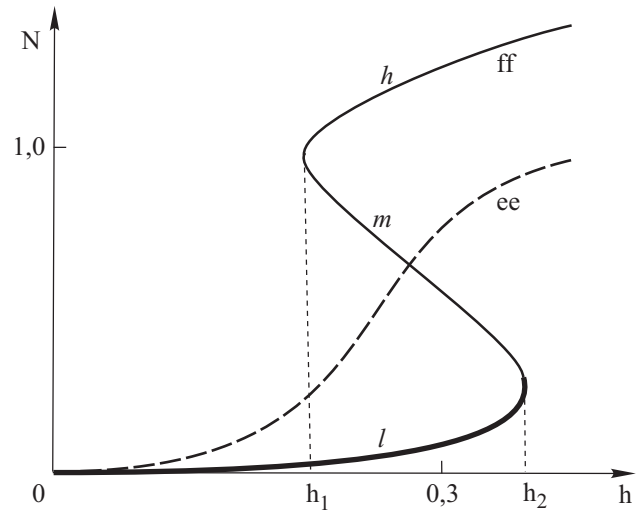


Рис. 6. Зависимость норм локализованных возбуждений от амплитуды поля накачки для кусочно-нелинейной модели.

Зависимость нормы локальных возбуждений от амплитуды внешнего поля $N = N(h, \epsilon = \text{const})$ представлена на рис. 6 для величины затухания $\gamma = 0,1$. Кривая *ee* соответствует частоте $\epsilon = 0,15 < \epsilon_0$ и сечению *ee* на рис. 5, кривая *ff* отвечает частоте $\epsilon = 0,5 > \epsilon_0$ и сечению *ff* на этом рисунке. На рис. 6 жирной линией выделена устойчивая нижняя ветвь *l*, а ветви *m* и *h* при данном выборе параметра γ неустойчивы.

С физической точки зрения важно также знать зависимости норм решений от частоты при постоянной амплитуде накачки $N = N(\epsilon, h = \text{const})$, поскольку они определяют энергии разных локализованных возбуждений. Эти зависимости приведены на рис. 7 для величины затухания $\gamma = 0,3$. Кривая *cc* соответствует амплитуде внешнего поля $h = 0,45 < h_0$ и сечению *cc* на рис. 5, кривая *ff* отвечает частоте $\epsilon = 0,5 > \epsilon_0$ и сече-

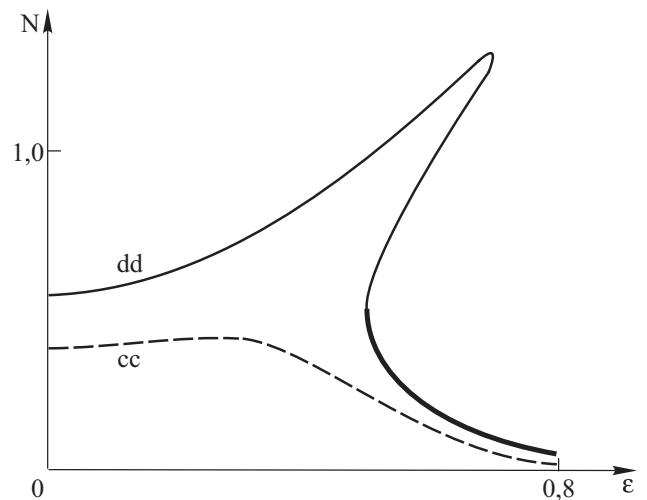


Рис. 7. Зависимость норм локализованных возбуждений от частоты внешнего поля для кусочно-нелинейной модели.

нию f_n на этом рисунке. На рис. 7 жирной линией выделена устойчивая нижняя ветвь l .

Сравнение зависимостей, приведенных на рис. 6 и 7 для предложенной упрощенной модели, с соответствующими зависимостями на рис. 4 и 3 для исходной нелинейной модели и с зависимостями на врезках на этих рисунках для изолированного магнитного момента показывает, что упрощенная модель описывает ситуацию, промежуточную между нелинейным осциллятором и солитоном. Вместе с тем, она правильно качественно описывает многие характерные черты нелинейной локализации возбуждений в условиях точечной накачки.

Перед исследованием устойчивости локальных состояний разного типа рассмотрим их энергию, что даст дополнительную информацию об этой устойчивости. Вернемся к системе дискретных уравнений (20). Данную систему можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}_n} - \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_n} = -i\gamma \psi_n, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_n} - \frac{\partial L}{\partial \psi_n} = i\gamma \bar{\psi}_n, \quad (34)$$

где $\bar{\psi}_n$ — величина, комплексно сопряженная ψ_n , т.е. как уравнения движения в форме Лагранжа с функцией Лагранжа вида (для простоты ограничимся случаем $v = 1$)

$$L = \sum_n \left[\frac{i}{2} \left(\frac{d\psi_n}{dt} \bar{\psi}_n - \frac{d\bar{\psi}_n}{dt} \psi_n \right) - \omega_0 |\psi_n|^2 - |\psi_n - \psi_{n-1}|^2 \right] - h(\bar{\psi}_0 e^{-i\omega t} + \psi_0 e^{i\omega t}) + \frac{1}{2} |\psi_0|^4. \quad (35)$$

Следовательно, энергия системы имеет вид

$$E = \sum_n (\omega_0 |\psi_n|^2 + |\psi_n - \psi_{n-1}|^2) + h(\bar{\psi}_0 e^{-i\omega t} + \psi_0 e^{i\omega t}) - \frac{1}{2} |\psi_0|^4. \quad (36)$$

Переходя к длинноволновому пределу, можно получить выражение для энергии исходной кусочно-непрерывной системы:

$$E = \omega_0 |\psi_0|^2 + 2v |\psi_0 - \psi_s|^2 + h(\bar{\psi}_0 e^{-i\omega t} + \psi_0 e^{i\omega t}) - \frac{1}{2} |\psi_0|^4 + 2 \int_0^\infty \left(\omega_0 |\psi|^2 + \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 \right) dx. \quad (37)$$

В общем случае энергия системы не сохраняется и ее изменение со временем характеризуется диссипативной функцией. В данном случае это изменение в терминах полевой переменной $u(t) = \psi(t) e^{i\omega t}$ можно записать в виде

$$\frac{dE}{dt} = i\gamma \left\{ u_0 \frac{d\bar{u}_0}{dt} - \bar{u}_0 \frac{du_0}{dt} + 2 \int_0^\infty \left(u_0 \frac{d\bar{u}_0}{dt} - \bar{u}_0 \frac{du_0}{dt} \right) dx \right\}, \quad (38)$$

откуда видно, что энергия в случае стационарных состояний не изменяется.

6. Устойчивость локализованных состояний

Исследуем стабильность найденных стационарных решений по отношению к малым возмущениям, зависящим от времени. Возвращаясь к исходной системе уравнений (17)–(19), будем искать решения в виде

$$\Psi_0(t) = [R_0 + r_0(t) + i(J_0 + j_0(t))] \exp(-i\omega t),$$

$$\psi(t) = [R + r(t) + i(J + j(t))] \exp(-i\omega t),$$

где $r, j \ll R_0, J_0$ — малые добавки к найденным стационарным локализованным состояниям R_0, J_0 . После подстановки в исходные уравнения и их линеаризации по малым добавкам r, j получаем систему уравнений для вещественной и мнимой частей:

$$-\frac{dj_0}{dt} + vr_s + vr_{-s} + [3R_0^2 + J_0^2 - (2v + \varepsilon^2)]r_0 + (2J_0R_0 - \gamma)j_0 = 0, \quad (39)$$

$$\frac{dr_0}{dt} + vj_s + vj_{-s} + [3R_0^2 + R_0^2 - (2v + \varepsilon^2)]j_0 + (2J_0R_0 + \gamma)r_0 = 0,$$

$$-\frac{\partial j}{\partial t} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \varepsilon^2 r - \gamma j = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} - \varepsilon^2 j + \gamma r = 0.$$

Эта система дополняется граничными условиями между нелинейным элементом и линейными полюсами

$$v(r_{\pm s} - r_0) = \pm \frac{\partial r}{\partial x} \Big|_{\pm s}, \quad v(j_{\pm s} - j_0) = \pm \frac{\partial j}{\partial x} \Big|_{\pm s}. \quad (40)$$

Представим функции r, j в областях $x > 0$ and $x < 0$ в следующем виде:

$$r_{\pm}(t, x) = a_{\pm} \exp(\lambda t + \mu_{\pm} x), \quad j_{\pm}(t, x) = b_{\pm} \exp(\lambda t + \mu_{\pm} x),$$

и для нелинейного элемента в виде $r_0(t) = r_0 e^{\lambda t}$, $j_0(t) = j_0 e^{\lambda t}$, где амплитуды малых возмущений r, j, r_0, j_0 зависят от амплитуды и частоты внешнего поля, величины затухания и параметра взаимодействия активного элемента с линейными подсистемами δ . Стабильность локализованных состояний определяется величиной параметра λ , который, вообще говоря, является комплексным: $\lambda = \Lambda + i\ell$. Если вещественная часть Λ отрицательна, то решение для малых добавок экспоненциально убывает и является устойчивым. Решение неустойчиво при $\Lambda > 0$, и если при этом мнимая часть ℓ не равна нулю, то имеет место так называемая модуляционная неустойчивость. Нас будут инте-

решать лишь пространственно локализованные возмущения обсуждаемых состояний, удовлетворяющие условию ограниченности на бесконечности. Такие возмущения отвечают условию $\text{Re } \mu_+ < 0$ и $\text{Re } \mu_- > 0$. Для линейных полюсов система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \varepsilon^2 r - \tilde{\lambda} j = 0, \quad \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} - \varepsilon^2 r + \tilde{\lambda} r = 0, \quad (41)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda + \gamma$. Отсюда следует, что

$$(\mu_{\pm}^2 - \varepsilon^2)^2 = -\tilde{\lambda}^2, \quad (42)$$

$$b_{\pm} = a_{\pm}(\mu_{\pm}^2 - \varepsilon^2) / \tilde{\lambda}. \quad (43)$$

Пользуясь соотношениями (42), (43) и граничными условиями (40), легко доказать, что возможны лишь пространственно симметричные возмущения с $\mu_+ = -\mu_- = \mu$ и $\text{Re } \mu_+ < 0$. Для симметричной моды возникает следующая нелинейная задача на собственные значения (λ):

$$(3n_0 - \xi)(n_0 - \xi) + \tilde{\lambda}^2 = 0, \quad (44)$$

где $\xi = \varepsilon^2 + 2v\mu / (\mu - v)$ с зависимостью $\mu = \mu(\lambda)$, определяемой соотношением (42), и функцией $n_0 = n_0(\varepsilon, h, \gamma, v)$, определяемой из уравнения (24). Компоненты комплексного числа $\lambda = \Lambda + iI$ можно выразить в терминах $\mu = M + im$: $I = \pm(M^2 - m^2 - \varepsilon^2)$ и $\Lambda = -\gamma \pm 2Mm$. Поэтому критерий стабильности решений $\Lambda < 0$ может быть переписан в виде $|m| < \gamma/2 |M|$. Задача на собственные значения (44) сводится к решению полиномиального уравнения

$$\begin{aligned} &\mu^6 - 2v\mu^5 + (v^2 - 2\varepsilon^2)\mu^4 + 4v\varepsilon^2\mu^3 + \\ &+ \mu^2[-3n_0^2 + 4n_0(2v + \varepsilon^2) - 4v^2 - 2\varepsilon^2v^2 - 4\varepsilon^2v] + \\ &+ \mu[6vn_0^2 - 8n_0(v^2 + v\varepsilon^2) + 4v^2\varepsilon^2] + v^2n_0(4\varepsilon^2 - 3n_0) = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Численное исследование этого уравнения для нахождения зависимости параметра λ от параметров внешнего поля и параметров системы ($h, \varepsilon, \gamma, v$) показывает, что квазимагнанные локализованные возбуждения нижней ветви (l) зависимости $n_0(h)$ устойчивы. Квазисолитонные локализованные возбуждения средней ветви (m) зависимости $n_0(h)$ (B -солитоны) неустойчивы. Более сложна ситуация с устойчивостью C -солитонов верхней ветви (h) зависимости $n_0(h)$. В случае $v = 1$ эти решения неустойчивы при параметрах, лежащих вне области у нижней границы $h_1(\varepsilon)$, расширяющейся с ростом параметра ε (рис. 8). Область устойчивости ограничена на рисунке линией s и границей области трехзначных решений $h_1(\varepsilon)$. В области неустойчивости выше линии s неустойчивость

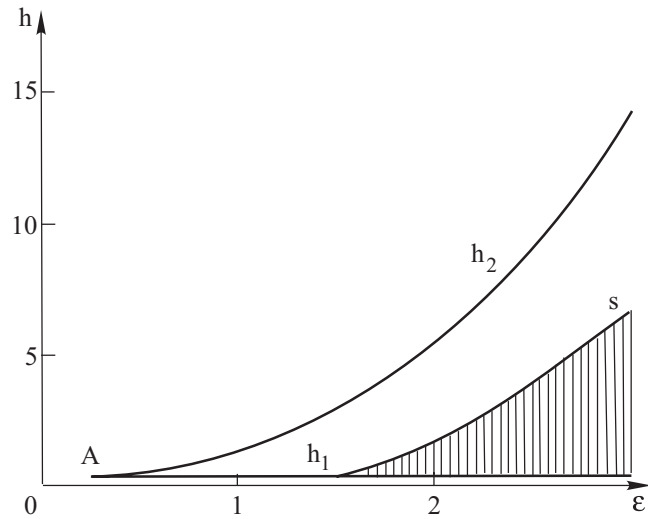


Рис. 8. Область существования квазисолитонных B -состояний ($h_1 < h < h_2$) и C -состояний ($h_1 < h$). Заштрихована область устойчивости C -солитонов.

носит модуляционный характер. Поскольку энергия квазисолитонного состояния выше энергии квазимагннного локального состояния, C -солитоны не реализуются даже в области их устойчивости, и гистерезис в полевой зависимости намагниченности отсутствует (в отличие от результата работ [10,11]). Кроме того, заметим, что устойчивые квазисолитонные состояния возникают при $\varepsilon \approx 1,5$ (при $\gamma = 0,1$), т.е. в области, где неприменимо длинноволновое приближение. С другой стороны, очевидно, что в пределе $v \rightarrow 0$ (изолированный спин) возникает стандартная задача о нелинейном резонансе осциллятора, при котором верхняя ветка устойчива при всех значениях частоты внешнего поля. Поэтому рассмотрим систему с распределенными параметрами при $v < 1$ (ослабленная связь активного элемента с остальной системой). На рис. 9 приведены результаты численного анализа уравнения (45) при $\gamma = 0,1$ и $v = 0,3$. На рисунке видно, что, кроме области устойчивости C -солитонов между границей $h = h_1$ и линией s , возникает дополнительная область устойчивости с амплитудами полей $h > h_c$ выше линии C (на рисунке заштрихована область неустойчивости решений C -типа). Поскольку эта область устойчивости «пересекается» с областью существования устойчивых квазимагннных состояний ($h_c < h_2$), в полевой зависимости намагниченности возможен гистерезис. На врезке рис. 9 приведена полевая зависимость, соответствующая сечению pp на основном рисунке при фиксированном значении частоты. Области устойчивости на рис. 9 возникают бифуркационным образом при значениях частоты $\varepsilon \approx 0,8$ и $\varepsilon \approx 1,7$. Таким образом, гистерезис полевой зависимости возникает при частотах ($\varepsilon \sim 1$), при кото-

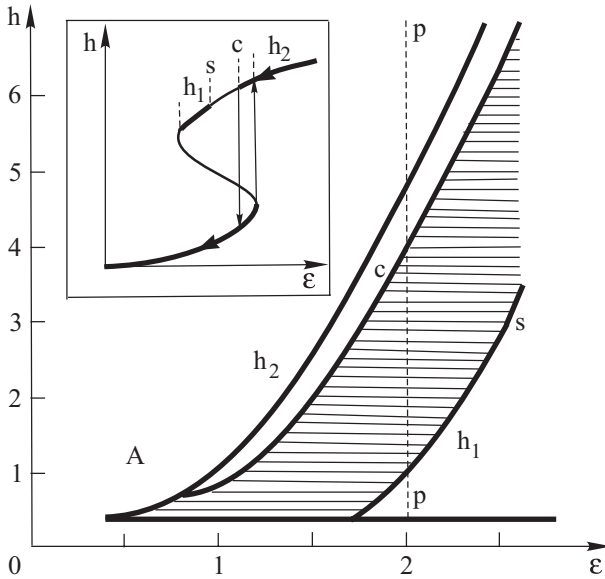


Рис. 9. Области устойчивости $h_1 < h < h_s$, $h > h_c$ и неустойчивости (заштрихована) локальных состояний С-типа на плоскости параметров внешнего поля.

рых несправедливо длинноволновое рассмотрение. Поэтому в заключение рассмотрим явление локализации возбуждений в дискретной модели магнетика.

7. Влияние дискретности решетки на структуру и устойчивость квазисолитонных возбуждений

Вернемся к дискретному описанию магнитной системы в рамках предложенной упрощенной модели, т.е. к системе разностных уравнений (20), и для простоты ограничимся случаем $v = 1$. Для величин $u_n = \psi_n \exp(i\omega t)$ система (20) сводится к следующей:

$$i \frac{du_n}{dt} - 2u_n + u_{n+1} + u_{n-1} - \varepsilon^2 u_n + i\gamma u_n + (|u_n|^2 u_n - h)\delta_{n0} = 0. \tag{46}$$

Рассмотрим стационарные решения этого уравнения. Вне «активного элемента», подверженного воздействию внешнего поля, локализованные решения для $u_n = R_n + iJ_n$ имеют вид, аналогичный выражениям (23):

$$\begin{pmatrix} R_{n\pm} \\ J_{n\pm} \end{pmatrix} = e^{\mp i\tilde{\alpha}(n-1)} \times \left[\begin{pmatrix} R_1 \\ J_1 \end{pmatrix} \cos(\tilde{\beta}(n-1)) \pm \begin{pmatrix} -J_1 \\ +R_1 \end{pmatrix} \sin(\tilde{\beta}(n-1)) \right], \tag{47}$$

где

$$\tilde{\alpha} = \text{Arcsh } D_+, \quad \tilde{\beta} = \arcsin \tilde{D}_-,$$

$$D_{\pm} = \sqrt{\sqrt{z^2 + \gamma^2} \pm z / \sqrt{2}} \quad \text{и} \quad z = \varepsilon^2 + (\varepsilon^4 + \gamma^2) / 4.$$

Область локализации нелинейного возбуждения в дискретном подходе $\tilde{l} \sim 1/\tilde{\alpha}$ слабо отличается от таковой в длинноволновом пределе $l \sim 1/\alpha$ (при больших частотах $\varepsilon \gg 1$ имеем $l \sim 1/\varepsilon$ и $\tilde{l} \sim 1/2 \ln \varepsilon$, что различается лишь при $\varepsilon > 5$). При этом уравнение для нормы центрального магнитного момента \tilde{n}_0 , на который действует поле, сохраняет вид уравнения (24) при замене $G, P \rightarrow \tilde{G}, \tilde{P}$, где $\tilde{G} = 2e^{-\tilde{\alpha}} \cos \tilde{\beta} - (2 + \varepsilon^2)$, $\tilde{P} = 2e^{-\tilde{\alpha}} \sin \tilde{\beta} + \gamma$. Также при замене $G, P \rightarrow \tilde{G}, \tilde{P}$ сохраняется связь амплитуды активного элемента с его нормой (25), выражения (26) для границ области существования трех решений $h_{1,2}(G, P)$ и вид решений различного типа (28)–(33) $u^{(i)} = u^{(i)}(h, h_1, h_2)$. Зависимости $h_{1,2}(G, P)$ и решения $u^{(i)} = u^{(i)}(h, h_1, h_2)$ практически не видоизменяются, а изменение нормы решений даже при больших частотах $\varepsilon \sim 10^3$ мало: $\delta n_0 / n_0 \sim 10^{-4}$. Связь амплитуды активного элемента и амплитуды соседнего спина с номером l принимает вид

$$R_1 = \exp(-\tilde{\alpha})(R_0 \cos \tilde{\beta} - J_0 \sin \tilde{\beta}),$$

$$J_1 = \exp(-\tilde{\alpha})(R_0 \sin \tilde{\beta} + J_0 \cos \tilde{\beta}).$$

Новые параметры $\tilde{G}, \tilde{P}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, h_1, h_2$ и решения $u^{(i)}$ переходят в старые выражения для $G, P, \alpha, \beta, h_1, h_2$ и $u^{(i)}$ в пределе $\varepsilon \ll 1, \gamma \sim \varepsilon^2 \ll 1$, но зависимости от исходных параметров задачи (ε, h, γ) , конечно, изменятся. Тем не менее, например, область существования трех разных локализованных состояний, изображенная на рис. 5, практически не меняется при переходе от непрерывного описания к дискретной модели. В наиболее интересном случае малого затухания $\gamma \ll 1$ область вблизи критической точки $A(\varepsilon_0 \approx \gamma^{1/2}/3^{1/4} \ll 1, h_0 \approx (4/3)^{9/8} \gamma^{3/4} \ll 1)$ соответствует длинноволновому пределу и не меняется. Сохраняются асимптотики и в «антиконтинуальном пределе» $\varepsilon \gg 1$: $h_1 \approx \gamma \varepsilon, h_2 \approx 2\varepsilon^3 / 3^{3/2}$.

Для анализа устойчивости локализованных дискретных состояний, как и выше, вводим малые добавки к локальным стационарным состояниям:

$$\psi_0(t) = [R_0 + r_0(t) + i(J_0 + j_0(t))] \exp(-i\omega t),$$

$$\psi_n(t) = [R_n + r_n(t) + i(J_n + j_n(t))] \exp(-i\omega t)$$

при $|n| \geq 1$. Система уравнений (39) при этом модифицируется таким образом:

$$\begin{aligned}
 -\frac{dj_0}{dt} + r_1 + r_{-1} + [3R_0^2 + J_0^2 - (2 + \varepsilon^2)]r_0 + (2J_0R_0 - \gamma)j_0 &= 0, \\
 \frac{dr_0}{dt} + j_1 + j_{-1} + [3J_0^2 + R_0^2 - (2 + \varepsilon^2)]j_0 + (2J_0R_0 + \gamma)r_0 &= 0, \\
 -\frac{\partial j_n}{\partial t} - (2 + \varepsilon^2)r_n + r_{n+1} + r_{n-1} - \gamma j_n &= 0, \\
 \frac{\partial r_n}{\partial t} - (2 + \varepsilon^2)j_n + j_{n+1} + j_{n-1} + \gamma r_n &= 0, \quad |n| \geq 1.
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

Представив функции r_n, j_n в областях $n > 0$ и $n < 0$ в виде

$$\begin{aligned}
 r_{n\pm}(t) &= a_{\pm} \exp(\lambda t + \mu_{\pm}(n-1)), \\
 j_{n\pm}(t) &= b_{\pm} \exp(\lambda t + \mu_{\pm}(n-1))
 \end{aligned}$$

и получив вместо (42), (43) связь

$$(2 \operatorname{ch} \mu_{\pm} - 2 - \varepsilon^2)^2 = -\tilde{\lambda}^2,$$

$$b_{\pm} = a_{\pm}(2 \operatorname{ch} \mu_{\pm} - 2 - \varepsilon^2) / \tilde{\lambda} \quad \text{и} \quad u_0 = u_1 \exp(-\mu),$$

для единственно возможной симметричной моды малых возбуждений легко получить нелинейную задачу на собственные значения $\tilde{\lambda}$, которая отличается от уравнения (44) только заменой параметра ξ на $\xi = \varepsilon^2 + 2 - 2 \exp \mu$. При этом для функции $\eta = \exp \mu$ получается полиномиальное уравнения

$$\begin{aligned}
 3\eta^4 + 2\eta^3[4\tilde{n}_0 - 2 - \varepsilon^2] + \eta^2(3\tilde{n}_0^2 - 4\tilde{n}_0(2 + \varepsilon^2) - 2) + \\
 + 2(2 + \varepsilon^2)\eta - 1 = 0,
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

которое допускает численное исследование. Оно показывает, что в физически интересном случае малого затухания ($\gamma \ll 1$) и однородной системы ($v = 1$) верхняя квазисолитонная ветвь локализованных возбуждений устойчива при $\varepsilon > 1,5$, т.е. в области частот, в которой справедливо рассмотрение проблемы в рамках дискретного подхода. Области параметров устойчивых и неустойчивых (заштрихована) квазисолитонных состояний изображены на рис. 10.

Таким образом, в дискретном подходе в области частот $1,5 < \varepsilon < 1,9$ при $h > h_1$ существует область гистерезиса намагниченности квазисолитонных состояний, а при $\varepsilon > 1,9$ во всей области существования таких квазисолитонных возбуждений они устойчивы (хотя, им и отвечает условный минимум энергии).

Заключение

Рассмотрены нелинейные возбуждения солитонного типа в легкоосном ферромагнетике, возникающие при локальном возбуждении магнетика высокочастотным циркулярно-поляризованным внешним магнитным полем. Проблема представляет интерес для экспериментального исследования возможности возбуждения магнитных солитонов и их усиления в маг-

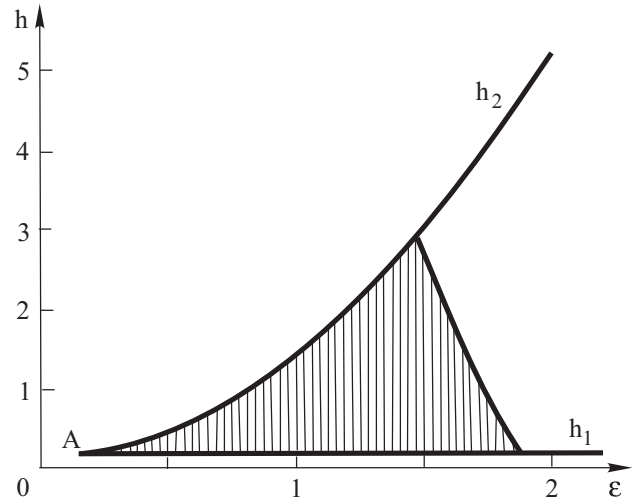


Рис. 10. Области устойчивости и неустойчивости (заштриховано) квазисолитонных состояний С-типа.

нитоупорядоченных средах с диссипацией. В рамках предложенных упрощенных теоретических моделей (кусочно-линейных, непрерывных и дискретных) продемонстрирована возможность существования таких солитонных состояний и исследована их устойчивость. Возникающие локализованные возбуждения обладают как свойствами магнитных солитонов, так и свойствами изолированного магнитного момента в условиях нелинейного резонанса.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Договора о научном сотрудничестве между НАНУ (Украина) и CNRS (Франция), Объединенного научного проекта НАНУ и РФФИ № 24-02а, Гранта НАНУ по исследованию наноструктур, Гранта Royal Society of UK № 2007/K1 и Гранта Шведской академии наук.

1. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
2. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
3. Yu.S. Kivshar and G.P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, San Diego (2003); G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, San Diego (2001).
4. Б.А. Калиникос, Н.Г. Ковшиков, А.Н. Славин, *Письма в ЖЭТФ* **38**, 343 (1983); В.С. Горнаков, Л.М. Дедух, В.И. Никитенко, *Письма в ЖЭТФ* **39**, 199 (1984).
5. Н. Dötch, in: *Magnetic Bubbles*, Panstwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa (1976), p. 113.
6. М.М. Богдан, А.М. Косевич, И.В. Манжос, *ФНТ* **11**, 991 (1985).
7. А.М. Косевич, А.С.Ковалев, *ФНТ* **1**, 1544 (1975).
8. М.М. Богдан, И.В. Герасимчук, А.С. Ковалев, *ФНТ* **23**, 197 (1997).
9. О.Н. Olsen and M.R. Samuelsen, *Phys. Rev.* **B34**, 3510 (1986).

10. А.С. Ковалев, А.А. Степанов, *Тез. докл. XXVI Всесоюзного совещания по физике низких температур*, Донецк, т. 2 (1990), с. 211.
11. А.С. Ковалев, А.А. Степанов, А.А. Перетьяко, *Нелинейный мир* **4**, 417 (2008).
12. S. Suntsov, K. Makris, D. Christodoulides, G. Stegeman, A. Nache, R. Morandotti, Y. Yang, G. Salamo, and M. Sorel, in: *Nonlinear Optics* (2005), p. 134.
13. N.V. Alexeeva, I.V. Barashenkov, and G.P. Tsironis, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3053 (2000).
14. А.И. Ахиезер, А.С. Бакай, *УФЖ* **14**, 355 (1969).
15. В.Е. Елеонский, Н.Н. Кирова, *ЖЭТФ* **25**, 658 (1978).
16. А.С. Бакай, *Вопросы теории нелинейных колебаний и их применение в физике*, Препринт ХФТИ 71-4, Харьков, 1-143 (1971).
17. Е.Б. Волжан, Н.П. Гиорградзе, А.Д. Патарая, *ФТТ* **18**, 2546 (1976).
18. I.V. Barashenkov and E.V. Zemlyanina, *arXiv:patt-sol/9906001v1*, 1-8 (1999).
19. S.O. Demokritov, A.A. Serga, A. Andre, V.E. Demidov, M.P. Kostylev, B. Hillebrands, and A.N. Slavin, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 047201 (2004).
20. A.C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, Philadelphia, SIAM (1985).
21. А.С. Ковалев, Е.С. Соколова, А.П. Майер, Ж.А. Можен, *ФНТ* **29**, 394 (2003).
22. Д. Эрроусмит, К. Плейс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва (1986).

Structure and stability of nonlinear excitations in magnets under the influence of localized ac field and damping

A.S. Kovalev, Y.E. Prilepsky, and A.A. Peretyatko

The soliton-type excitations localized near the domain of external ac-circular magnetic field are investigated in the framework of the one-dimension nonlinear Schrodinger equation and its discrete analog. The influence of damping on localized excitations of different types and their stability are analyzed using the simplified piecewise model.

PACS: 05.45.Yv Solitons;
63.20.Pw Localized modes;
75.10.Hk Classical spin models.

Keywords: ferromagnetic, ac field, localized excitations, quasisoliton states, nonlinear Schrodinger equation, stability.