Физика низких температур, 2008, т. 34, № 11, с. 1131–1138

Эффект Литтла–Паркса для двухзонных сверхпроводников

Ю.С. Ерин, С.В. Куплевахский, А.Н. Омельянчук

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: yerin@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 10 июля 2008 г.

В рамках подхода Гинзбурга–Ландау построена теория эффекта Литтла–Паркса для двухзонных сверхпроводников. Получена общая формула, отражающая зависимость относительного сдвига температуры сверхпроводящего перехода Δt_c от величины внешнего магнитного потока Ф. В частном случае формула описывает классический эффект Литтла–Паркса для однозонных сверхпроводников. Вопреки имеющимся в литературе утверждениям, зависимость $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ для двухзонных сверхпроводников строго периодическая, как и в классическом эффекте. Основное отличие от классического эффекта, допускающее экспериментальную проверку, заключается в непараболическом характере зависимости $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$. В случае совпадения физических параметров обеих зон на графике $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ появляются дополнительные наблюдаемые особенности. Исследование экстремальных свойств функционала свободной энергии позволило установить важное, не отмеченное ранее в литературе ограничение на один из феноменологических параметров.

У рамках підходу Гінзбурга–Ландау побудовано теорію ефекту Літтла–Паркса щодо двозонних надпровідників. Отримано загальну формулу, яка відображає залежність відносного зсуву температури надпровідного переходу Δt_c від величини зовнішнього магнітного потоку Ф. У окремому випадку формула описує класичний ефект Літтла–Паркса для однозонних надпровідників. Всупереч наявним у літературі твердженням, залежність $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ щодо двозонних надпровідників строго періодична, як і у класичному ефекті. Основна відмінність від класичного ефекту, що допускає експериментальну перевірку, полягає в непараболічному характері залежності $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$. У випадку збігу фізичних параметрів обох зон на графіку $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ з'являються додаткові особливості. Дослідження екстремальних властивостей функціонала вільної енергії дозволило встановити важливе, не відзначене раніше в літературі обмеження на один з феноменологічних параметрів.

PACS: **74.25.–q** Свойства сверхпроводников I и II рода;
74.20.De Феноменологические теории (двухжидкостная, Гинзбурга–Ландау и т.д.).

Ключевые слова: эффект Литтла–Паркса, двухзонная сверхпроводимость, теория Гинзбурга–Ландау, функционал свободной энергии.

1. Введение

Настоящая работа посвящена построению теории эффекта Литтла–Паркса для двухзонных сверхпроводников (таких, например, как недавно открытый [1] сверхпроводник MgB_2). Уместно напомнить, что классический эффект Литтла–Паркса для однозонных сверхпроводников хорошо известен в литературе [2–4] как одна из наиболее ярких демонстраций макроскопической когерентности фазы сверхпроводящего параметра порядка. Он наблюдается в открытых тонкостенных сверхпроводящих цилиндрах в присутствии постоянного внешнего магнитного поля, ориентированного вдоль оси цилиндра. В условиях, когда экранировка поля практически отсутствует, температура сверхпроводящего перехода $T_{c\Phi}$ (Ф — магнитный поток через цилиндр) испытывает строго периодические осцилляции (осцилляции Литтла–Паркса):

$$\frac{T_c - T_{c\Phi}}{T_c} \propto \min_n \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - n \right)^2 \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \qquad (1)$$

где $T_c \equiv T_{c\Phi}\big|_{\Phi=0}$, а $\Phi_0 = \dfrac{\pi\hbar c}{e}$ — квант магнитного потока.

В течение последнего десятилетия неоднократно обсуждался эффект Литтла–Паркса для однозонных сверхпроводников в нетрадиционной постановке. Так, например, исследовали осцилляции критической температуры в неоднородном сверхпроводящем цилиндре [5] и сверхпроводящих цилиндрах с магнитными включениями [6,7], а в работе [8] проанализировали возможность эффекта для сверхпроводящей пленки в форме листа Мебиуса.

К сожалению, до сих пор не проведены ни экспериментальные, ни теоретические исследования эффекта Литтла–Паркса в двухзонных сверхпроводящих структурах. Более того, имеющиеся в теоретической литературе краткие замечания на эту тему вызывают серьезные вопросы: например, в недавно опубликованном обзоре [9], всецело посвященном применению теории Гинзбурга–Ландау к двухзонной сверхпроводимости, утверждается, что в «двухзонных сверхпроводниках отсутствует периодичность осцилляций T_c Литтла–Паркса». Учитывая это обстоятельство, мы видим одну из целей нашей работы в том, чтобы прояснить ситуацию в рамках простого (и одновременно достаточно общего) подхода теории Гинзбурга–Ландау.

Исходным пунктом разд. 2 служит функционал свободной энергии Гиббса в приближении Гинзбурга–Ландау. Установлено важное ограничение на один из феноменологических параметров функционала, обеспечивающее существование абсолютного минимума. Путем минимизации функционала получена полная система уравнений среднего поля. В разд. 3 проанализирована устойчивость тривиального решения уравнений среднего поля, соответствующего нормальному состоянию, и получена общая формула для температуры сверхпроводящего перехода $T_{c\Phi}$, обнаруживающая строго периодические осцилляции Литтла–Паркса. Исследованы важные частные случаи и дана графическая иллюстрация. Наконец, в разд. 4 проведено обсуждение основных результатов и предложены некоторые выводы.

2. Основные уравнения

Рассмотрим сверхпроводящую пленку в форме полого кругового цилиндра (трубки) с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 соответственно (см. рис. 1). Постоянное внешнее магнитное поле $\mathbf{H}$ приложено вдоль оси симметрии цилиндра: $\mathbf{H} = (0,0,H)$, где H может иметь произвольный знак. Длина образующей цилиндра L удовлетворяет условию

$$L \gg R_2 . \tag{2}$$

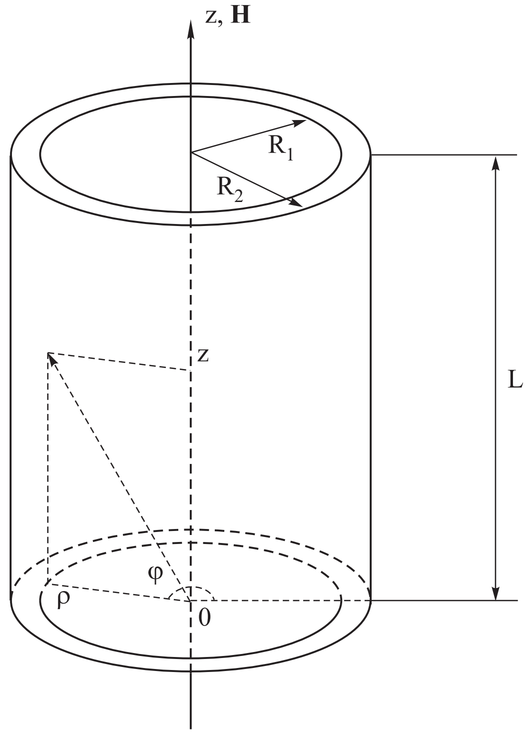

Рис. 1. Геометрия задачи (схематически). Выполняются условия $L \gg R_2$, $R_1 \gg \max\{\xi_1(0),\xi_2(0)\}$ и $R_2 - R_1 \ll \min\{\xi_{1,2},\lambda_{\min},R_1\}$ (см. обсуждение в тексте).

Ограничения на внутренний радиус цилиндра R_1 и толщину пленки $R_2 - R_1$ обсуждаются ниже (условия (5) и (6) соответственно).

Будем исходить из функционала свободной энергии Гиббса в приближении Гинзбурга–Ландау:

$$\mathcal{F}[|\psi_1|,|\psi_2|,\mathbf{A};\mathbf{H}] = \mathcal{F}_1[|\psi_1|,\mathbf{A}] + \mathcal{F}_2[|\psi_2|,\mathbf{A}] + \mathcal{F}_{12}[|\psi_1|,|\psi_2|,\mathbf{A}] + \int\limits_{\Omega_s+\Omega_a} \frac{(\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{H})^2}{8\pi}\, dv , \tag{3}$$

$$\mathcal{F}_1[|\psi_1|,\mathbf{A}] = \int\limits_{\Omega_s} \left[\alpha_1|\psi_1|^2 + \frac{1}{2}\beta_1|\psi_1|^4 + \frac{1}{2m_1}\left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_1 \right|^2 \right] dv ,$$

$$\mathcal{F}_2[|\psi_2|,\mathbf{A}] = \int\limits_{\Omega_s} \left[\alpha_2|\psi_2|^2 + \frac{1}{2}\beta_2|\psi_2|^4 + \frac{1}{2m_2}\left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_2 \right|^2 \right] dv ,$$

$$\mathcal{F}_{12}[|\psi_1|,|\psi_2|,\mathbf{A}] = -\int\limits_{\Omega_s} \Bigg[\gamma(\psi_1^*\psi_2 + \psi_1\psi_2^*) - \eta\Bigg[\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_1 \left(i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_2^* + \left(i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_1^* \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_2 \Bigg] \Bigg] dv .$$

Здесь $dv \equiv \rho d\rho d\varphi dz$ — элемент объема в цилиндрической системе координат, $\psi_{1,2} = |\psi_{1,2}| e^{i\chi_{1,2}}$ — комплекснозначные компоненты параметра сверхпроводящего порядка в зонах 1 и 2, а $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал локального магнитного поля $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{r})$: $\mathbf{h} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. Трехмерное интегрирование в трех первых слагаемых (3) выполняется по области пленки (Ω_s), а в слагаемом магнитной энергии — по области пленки и отверстия ($\Omega_s + \Omega_a$). Коэффициенты $\beta_{1,2}$ и γ, η от температуры не зависят, причем $\beta_{1,2} > 0$. Температурная зависимость коэффициентов $\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}(T)$ дается соотношениями

$$\alpha_1(T) = -a_1\left(1 - \frac{T}{T_{c_1}}\right), \alpha_2(T) = a_{20} - a_2\left(1 - \frac{T}{T_{c_1}}\right)$$

$$(a_{1,2} > 0,\ a_{20} \geq 0)\,, \tag{4}$$

где параметр T_{c_1} имеет смысл температуры сверхпроводящего перехода для зоны 1 в отсутствие межзонного взаимодействия ($\gamma = \eta = 0$) и $\mathbf{H} = 0$. (Попутно заметим, что зона 2 также становится сверхпроводящей в отсутствие межзонного взаимодействия, если $a_{20} / a_2 < 1$, при температуре $T_{c2} = T_{c1}(1 - a_{20}/a_2)$ для $\mathbf{H} = 0$.) Чтобы не выйти за границы приближения Гинзбурга–Ландау, подчиним внутренний радиус цилиндра условию

$$R_1 >> \max\{\xi_1(0), \xi_2(0)\}\,, \tag{5}$$

толщину сверхпроводящей пленки считаем «малой» в смысле выполнения соотношения

$$d \equiv R_2 - R_1 << \min\{\xi_{1,2}(T), \lambda_{\min}(T), R_1\}\,, \tag{6}$$

где $\xi_{1,2}(T) \equiv \hbar / \sqrt{2m_{1,2}|\alpha_{1,2}(T)|}$ — длины когерентности Гинзбурга–Ландау для зон 1 и 2 соответственно, а

$$\lambda_{\min}(T) \equiv \frac{c}{\sqrt{4\pi}e}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{|\overline{\psi}_1(T)|^2}{m_1} + \dfrac{|\overline{\psi}_2(T)|^2}{m_2} + 4|\eta||\overline{\psi}_1(T)||\overline{\psi}_2(T)|}}$$

— нижняя граница глубины проникновения магнитного поля [9] ($|\overline{\psi}_{1,2}|$ обозначают независящие от координат и размеров образца равновесные значения переменных $|\psi_{1,2}|$ при $\mathbf{H} = 0$.

Использование функционалов типа (3) для описания двухзонной сверхпроводимости обсуждалось, например, в работах [9–16], причем в [14,15] использовался микроскопический подход. В частности, было показано [14], что коэффициент γ (вообще говоря, отличный от нуля вне зависимости от наличия межзонного рассеяния) может иметь произвольный знак. Коэффициент η не равен нулю только в присутствии межзонного рассеяния [15]. В целях большей общности мы будем предполагать, что он также может иметь произвольный знак. Однако, как будет показано ниже, для существования абсолютного минимума (3) необходимо, чтобы выполнялось ограничение

$$|\eta| < \frac{1}{2\sqrt{m_1 m_2}}\,. \tag{7}$$

Условия стационарности $\mathcal{F}$

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{A}} = 0\,, \quad \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi_{1,2}} = 0\,, \tag{8}$$

и последующая фиксация калибровки, в принципе, дают полную систему уравнений среднего поля для определения равновесных значений $\mathbf{A}$ и $\psi_{1,2}$. Однако удобнее вначале упростить (3), используя симметрию задачи и условия (2), (6).

В силу условия (2), $\mathbf{h} = \mathbf{H}$, практически, всюду в области Ω_a (отверстие). Выберем калибровку вектор-потенциала так, что в области Ω_a будем иметь

$$\mathbf{A} = (0, A_\varphi(\rho), 0)\,, \quad A_\varphi(\rho) = \frac{H\rho}{2}\,. \tag{9}$$

Ввиду условия (6) можно пренебречь экранировкой $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\rho)$ и изменениями $A_\varphi = A_\varphi(\rho)$ в Ω_c. Таким образом, выражение (9) оказывается справедливым, фактически, во всей области $\Omega_s + \Omega_a$, а вклад магнитной энергии в (3) пренебрежимо мал. Учтем также то обстоятельство, что симметрия задачи и условие (6) обеспечивают независимость $|\psi_{1,2}|$ от координат, а координатная зависимость фаз компонент параметра порядка, ввиду (9), сводится к зависимости от угла φ ($\chi_{1,2} = \chi_{1,2}(\varphi)$) при условиях непрерывности

$$\chi_{1,2}(2\pi) - \chi_{1,2}(0) = 2\pi n_{1,2}\,, \quad \frac{d\chi_{1,2}}{d\varphi}(2\pi) = \frac{d\chi_{1,2}}{d\varphi}(0)\,,$$

$$n_{1,2} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{10}$$

Заметим еще, что вместо фаз $\chi_{1,2}$ удобно ввести новые функциональные переменные φ и θ [16]:

$$\varphi = \chi_1 - \chi_2\,,$$

$$\theta = c_1(|\psi_1|, |\psi_2|, \chi_1 - \chi_2)\chi_1 + c_2(|\psi_1|, |\psi_2|, \chi_1 - \chi_2)\chi_2, \tag{11}$$

где

$$c_1(|\psi_1|, |\psi_2|, \chi_1 - \chi_2) \equiv$$

$$\equiv \frac{\dfrac{|\psi_1|^2}{m_1} + 2\eta|\psi_1||\psi_2|\cos(\chi_1 - \chi_2)}{\dfrac{|\psi_1|^2}{m_1} + \dfrac{|\psi_2|^2}{m_2} + 4\eta|\psi_1||\psi_2|\cos(\chi_1 - \chi_2)}\,,$$

$$c_2(|\psi_1|, |\psi_2|, \chi_1 - \chi_2) \equiv \tag{12}$$

$$\equiv \frac{\dfrac{|\psi_2|^2}{m_2} + 2\eta|\psi_1||\psi_2|\cos(\chi_1 - \chi_2)}{\dfrac{|\psi_1|^2}{m_1} + \dfrac{|\psi_2|^2}{m_2} + 4\eta|\psi_1||\psi_2|\cos(\chi_1 - \chi_2)}\,.$$

Поскольку $D(\phi,\theta)/D(\chi_1,\chi_2)\neq 0$ при всех χ_1 и χ_2, новые функциональные переменные независимы и могут считаться произвольными гладкими функциями φ (т.е. $\phi=\phi(\varphi)$ и $\theta=\theta(\varphi)$), удовлетворяющими граничным условиям:

$$\phi(2\pi)-\phi(0)=2\pi(n_1-n_2)\,,\quad \frac{d\phi}{d\varphi}(2\pi)=\frac{d\phi}{d\varphi}(0) \qquad (13)$$

и

$$\theta(2\pi)-\theta(0)=$$
$$=2\pi[c_1(|\psi_1|,|\psi_2|,\phi(0))n_1+c_2(|\psi_1|,|\psi_2|,\phi(0))n_2]\,,$$
$$\frac{d\theta}{d\varphi}(2\pi)=\frac{d\theta}{d\varphi}(0)\,,\ n_{1,2}=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (14)$$

соответственно (см. (11)).

В результате, приходим к искомой упрощенной форме (3):

$$\frac{\mathcal{F}[|\psi_1|,|\psi_2|,\theta,\phi;\Phi]}{V_s}=\alpha_1|\psi_1|^2+\frac{1}{2}\beta_1|\psi_1|^4+$$
$$+\alpha_2|\psi_2|^2+\frac{1}{2}\beta_2|\psi_2|^4-2\gamma\cos\phi|\psi_1||\psi_2|+$$
$$+\frac{\hbar^2 Q[\theta;\Phi]}{2}\left(\frac{|\psi_1|^2}{m_1}+\frac{|\psi_2|^2}{m_2}+4\eta\cos\phi|\psi_1||\psi_2|\right)+$$
$$+\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}C(|\psi_1|,|\psi_2|,\phi)\left(\frac{d\phi}{d\varphi}\right)^2 d\varphi\,, \qquad (15)$$

где

$$Q[\theta;\Phi]=\frac{1}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{d\theta}{d\varphi}-\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 d\varphi,$$

$$C(|\psi_1|,|\psi_2|,\phi)\equiv$$
$$\equiv\left(\frac{c_2^2}{m_1}|\psi_1|^2+\frac{c_1^2}{m_2}|\psi_2|^2-4c_1c_2\eta\cos\phi\,|\psi_1||\psi_2|\right)\frac{\hbar^2}{2}\,,$$

$$c_{1,2}=c_{1,2}(|\psi_1|,|\psi_2|,\phi)\,,$$

$R=(R_1+R_2)/2$, $V_s=2\pi RLd$ — объем сверхпроводящего цилиндра, $\Phi_0=\pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока, $\Phi=\pi HR^2$ — магнитный поток через отверстие цилиндра.

Докажем теперь, что условие (7) обеспечивает существование абсолютного минимума (15) (а следовательно, и исходного функционала (3)). Действительно, в силу этого условия $C(|\psi_1|,|\psi_2|,\phi)>0$ (если $|\psi_1|+|\psi_2|\neq 0$), и, кроме того, квадратичная форма переменных $|\psi_1|$, $|\psi_2|$, являющаяся множителем при функции $Q[\theta;\Phi]$, положительно определена. Поэтому правая часть (15) ограничена снизу плотностью равновесной свободной энергией цилиндра в отсутствие внешнего поля, F_0/V_s:

$$\frac{\mathcal{F}}{V_s}\geq\alpha_1|\psi_1|^2+\frac{1}{2}\beta_1|\psi_1|^4+\alpha_2|\psi_2|^2+\frac{1}{2}\beta_2|\psi_2|^4+\frac{\hbar^2\min\limits_\theta Q[\theta;\Phi]}{2}\left(\frac{|\psi_1|^2}{m_1}+\frac{|\psi_2|^2}{m_2}\right)-2|\psi_1||\psi_2|[\gamma-\eta\hbar^2\min_\theta Q[\theta;\Phi]]\cos\phi\geq$$
$$\geq\alpha_1|\psi_1|^2+\frac{1}{2}\beta_1|\psi_1|^4+\alpha_2|\psi_2|^2+\frac{1}{2}\beta_2|\psi_2|^4+\frac{\hbar^2\min\limits_\theta Q[\theta;\Phi]}{2}\left(\frac{|\psi_1|^2}{m_1}+\frac{|\psi_2|^2}{m_2}\right)-2|\psi_1||\psi_2||\gamma-\eta\hbar^2\min_\theta Q[\theta;\Phi]|\geq$$
$$\geq\alpha_1|\psi_1|^2+\frac{1}{2}\beta_1|\psi_1|^4+\alpha_2|\psi_2|^2+\frac{1}{2}\beta_2|\psi_2|^4-2|\psi_1||\psi_2||\gamma|+\frac{\hbar^2\min\limits_\theta Q[\theta;\Phi]}{2}\left(\frac{|\psi_1|^2}{m_1}+\frac{|\psi_2|^2}{m_2}-4|\eta||\psi_1||\psi_2|\right)\geq$$
$$\geq\alpha_1|\psi_1|^2+\frac{1}{2}\beta_1|\psi_1|^4+\alpha_2|\psi_2|^2+\frac{1}{2}\beta_2|\psi_2|^4-2|\psi_1||\psi_2||\gamma|\geq$$
$$\geq\alpha_1|\overline{\psi}_1|^2+\frac{1}{2}\beta_1|\overline{\psi}_1|^4+\alpha_2|\overline{\psi}_2|^2+\frac{1}{2}\beta_2|\overline{\psi}_2|^4-2|\overline{\psi}_1||\overline{\psi}_2||\gamma|\equiv\frac{F_0}{V_s}\,, \qquad (16)$$

где $|\overline{\psi}_1|$, $|\overline{\psi}_2|$ — решение системы уравнений

$$\alpha_1|\psi_1|+\beta_1|\psi_1|^3-|\gamma||\psi_2|=0\,,$$
$$\alpha_2|\psi_2|+\beta_2|\psi_2|^3-|\gamma||\psi_1|=0\,,$$

минимизирующее предпоследнюю строку (16). Подчеркнем, что в случае невыполнения условия (7), т.е. когда

$$|\eta|\geq\frac{1}{2\sqrt{m_1m_2}}\,,$$

функционал (3) и его упрощенные формы (например, (15)) не обладают свойством минимизируемости (неограниченны снизу) и потому не могут быть использованы в физических приложениях.

Вычисление функциональных производных в условиях стационарности

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\theta}=0\,,\quad \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\phi}=0 \qquad (17)$$

при учете (13) и (14) дает:

$$\left(\frac{|\psi_1|^2}{2m_1}+\frac{|\psi_2|^2}{2m_2}+2\eta|\psi_1||\psi_2|\cos\phi\right)\frac{d^2\theta}{d\varphi^2}-$$

$$-2\eta|\psi_1||\psi_2|\frac{d\phi}{d\varphi}\left(\frac{d\theta}{d\varphi}-\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\sin\phi=0\,, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(C(|\psi_1|,|\psi_2|,\phi)\frac{d\phi}{d\varphi}\right)+\eta|\psi_1||\psi_2|\sin\phi\left(\frac{d\theta}{d\varphi}-\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial C(|\psi_1|,|\psi_2|,\phi)}{\partial\phi}\left(\frac{d\phi}{d\varphi}\right)^2-\gamma|\psi_1||\psi_2|\sin\phi=0\,. \qquad (19)$$

Поскольку нас интересует абсолютный минимум (15), уравнения (18) (условие непрерывности сверхпроводящего тока, циркулирующего по поверхности цилиндра [16]) и (19) допускают существенное упрощение. А именно: из цепочки неравенств (16) очевидно, что абсолютный минимум (15) будет достигаться в точке, где $d\phi/d\varphi=0$ ($\phi=\text{const}$). Отсюда, вместо уравнений (18) и (19), получаем элементарную систему

$$\sin\phi=0\,, \qquad (20)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\varphi^2}=0 \qquad (21)$$

при граничных условиях (см. (13) и(14))

$$\theta(2\pi)-\theta(0)=2\pi n\,, \quad \frac{d\theta}{d\varphi}(2\pi)=\frac{d\theta}{d\varphi}(0)\,, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (22)$$

Выбор физически неэквивалентных решений (20) ($\phi=0\bmod 2\pi$ или $\phi=\pi\bmod 2\pi$) также определяется требованием минимальности (15) (см. неравенства (16)) и сводится к условию [16]

$$\cos\phi=\operatorname{sgn}\left[\gamma-\eta\hbar^2\min_{\theta}Q[\theta;\Phi]\right]. \qquad (23)$$

Как видим, величина Φ может влиять на выбор значения ϕ лишь в случае $\eta\neq0$ и $\gamma\eta>0$. Если же $\gamma\eta\le0$ ($\gamma\neq0$), правильным решением при $\gamma<0$ будет $\phi=\pi\bmod 2\pi$, а при $\gamma>0$ — $\phi=0\bmod 2\pi$, вне зависимости от значений Φ. Решение уравнения (21) при условиях (22) очевидно:

$$\theta(\varphi)=n\varphi+\theta(0)\,, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots, \quad \varphi\in[0,2\pi]\,.$$

Подставляя в правую часть (15) минимизирующие значения переменных ϕ и θ, находим:

$$\frac{\mathcal{F}[|\psi_1|,|\psi_2|;\Phi]}{V_s}=\left[\alpha_1+\frac{\hbar^2Q(\Phi)}{2m_1}\right]|\psi_1|^2+\frac{\beta_1}{2}|\psi_1|^4+$$

$$+\left[\alpha_2+\frac{\hbar^2Q(\Phi)}{2m_2}\right]|\psi_2|^2+\frac{\beta_2}{2}|\psi_2|^4-2|\gamma-\eta\hbar^2Q(\Phi)||\psi_1||\psi_2|\,, \qquad (24)$$

где функция

$$Q(\Phi)\equiv\frac{1}{R^2}\min_n\left(n-\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2$$

ограничена и периодична:

$$0\le Q(\Phi)\le\frac{1}{4R^2}\,,\quad Q(\Phi+\Phi_0)=Q(\Phi)\,.$$

Условия стационарности

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial|\psi_1|}=0\,,\ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial|\psi_2|}=0$$

дают систему уравнений для определения равновесных значений $|\psi_1|$ и $|\psi_2|$:

$$\left[\alpha_1+\frac{\hbar^2Q(\Phi)}{2m_1}\right]|\psi_1|+\beta_1|\psi_1|^3-|\gamma-\eta\hbar^2Q(\Phi)||\psi_2|=0\,, \qquad (25)$$

$$\left[\alpha_2+\frac{\hbar^2Q(\Phi)}{2m_2}\right]|\psi_2|+\beta_2|\psi_2|^3-|\gamma-\eta\hbar^2Q(\Phi)||\psi_1|=0. \qquad (26)$$

3. Осцилляции температуры сверхпроводящего перехода

Температура сверхпроводящего перехода при заданном значении магнитного потока, $T_{c\Phi}$, определяется как температура, при которой тривиальное решение $|\psi_1|=|\psi_2|=0$ уравнений (25) и (26), соответствующее нормальной фазе, становится неустойчивым. Для определения границы устойчивости тривиального решения рассмотрим второй дифференциал (24) в точке $|\psi_1|=|\psi_2|=0$:

$$\frac{1}{V_s}\delta^2\mathcal{F}[\delta|\psi_1|,\delta|\psi_2|;T,\Phi]=$$

$$=\left[\alpha_1(T)+\frac{\hbar^2Q(\Phi)}{2m_1}\right](\delta|\psi_1|)^2+\left[\alpha_2(T)+\frac{\hbar^2Q(\Phi)}{2m_2}\right](\delta|\psi_2|)^2-$$

$$-2|\gamma-\eta\hbar^2Q(\Phi)|\delta|\psi_1|\delta|\psi_2|\,, \qquad (27)$$

где $\delta|\psi_{1,2}|$ — произвольные неотрицательные бесконечно малые. При температурах $T>T_{c\Phi}$, очевидно, должно выполняться условие $\delta^2\mathcal{F}>0$ (положительная определенность $\delta^2\mathcal{F}$). В точке $T=T_{c\Phi}$ квадратичная форма (27) теряет свойство положительной определенности:

$$\delta^2\mathcal{F}\ge0\,. \qquad (28)$$

Условие (28) означает, что наименьшее из собственных чисел μ_1,μ_2 ($\mu_1<\mu_2$) матрицы квадратичной формы

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \dfrac{\hbar^2 Q}{2m_1} & -|\gamma - \eta\hbar^2 Q| \\ -|\gamma - \eta\hbar^2 Q| & \alpha_2 + \dfrac{\hbar^2 Q}{2m_2} \end{pmatrix} \tag{29}$$

обращается в нуль (см., например, [17]). Поскольку

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\hbar^2 Q}{2m_1} + \frac{\hbar^2 Q}{2m_2}\right)\left[1 \mp \sqrt{1 - 4\frac{\left(\alpha_1 + \dfrac{\hbar^2 Q}{2m_1}\right)\left(\alpha_2 + \dfrac{\hbar^2 Q}{2m_2}\right) - (\gamma - \eta\hbar^2 Q)^2}{\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \dfrac{\hbar^2 Q}{2m_1} + \dfrac{\hbar^2 Q}{2m_2}\right)^2}}\right], \tag{30}$$

где знаки «–» и «+» относятся к μ_1 и μ_2 соответственно, из условия $\mu_1(T_{c\Phi}) = 0$ находим:

$$T_{c\Phi} = T_c - \frac{T_c}{1 + \sqrt{\left(\dfrac{a_{20}}{2a_2}\right)^2 + \dfrac{\gamma^2}{a_1 a_2}} - \dfrac{a_{20}}{2a_2}} \times$$

$$\times\left\{\sqrt{\left(\frac{a_{20}}{2a_2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{a_1 a_2}} + \frac{a_1\dfrac{\hbar^2 Q(\Phi)}{2m_2} + a_2\dfrac{\hbar^2 Q(\Phi)}{2m_1}}{2a_1 a_2} - \frac{\sqrt{\left[a_1 a_{20} + a_1\dfrac{\hbar^2 Q(\Phi)}{2m_2} - a_2\dfrac{\hbar^2 Q(\Phi)}{2m_1}\right]^2 + 4a_1 a_2[\gamma - \eta\hbar^2 Q(\Phi)]^2}}{2a_1 a_2}\right\}, \tag{31}$$

где мы учли определение (4), а также выражение [16] для критической температуры двухзонного сверхпроводника при $\Phi = 0$ ($T_{c\Phi}|_{\Phi=0} \equiv T_c$):

$$T_c = T_{c1}\left(1 + \sqrt{\left(\frac{a_{20}}{2a_2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{a_1 a_2}} - \frac{a_{20}}{2a_2}\right). \tag{32}$$

Представляет интерес относительный сдвиг критической температуры $\Delta t_c \equiv (T_c - T_{c\Phi})/T_c$. Для удобства анализа зависимости $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ введем безразмерные параметры

$$p \equiv \frac{a_{20}}{a_2}, \quad l \equiv \frac{a_1}{a_2}, \quad \bar{\gamma} \equiv \frac{\gamma}{a_1}, \quad k \equiv \frac{m_1}{m_2},$$
$$\bar{\xi} \equiv \frac{\hbar}{R\sqrt{2m_1 a_1}} << 1, \quad \bar{\eta} \equiv 2\eta m_1 \ (|\bar{\eta}| < \sqrt{k}) \tag{33}$$

и безразмерную функцию

$$\bar{Q}(\Phi) \equiv \min_n\left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 \left(0 \le \bar{Q}(\Phi) \le \frac{1}{4}, \bar{Q}(\Phi + \Phi_0) = \bar{Q}(\Phi)\right). \tag{34}$$

В терминах параметров (33) и функции (34) искомая зависимость имеет вид

$$\Delta t_c = \frac{1}{2 + \sqrt{p^2 + 4l\bar{\gamma}^2} - p}\left\{\sqrt{p^2 + 4l\bar{\gamma}^2} + \bar{\xi}^2(kl+1)\bar{Q}(\Phi) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{[p + \bar{\xi}^2(kl-1)\bar{Q}(\Phi)]^2 + 4l[\bar{\gamma} - \bar{\eta}\bar{\xi}^2\bar{Q}(\Phi)]^2}\right\}. \tag{35}$$

Формулы (31) и (35) дают полное математическое описание эффекта Литтла–Паркса в двухзонных сверхпроводниках. В качестве частного случая они содержат классический эффект Литтла–Паркса для однозонного сверхпроводника [2–4]. Для определенности будем рассматривать далее (35). Положим $\bar{\gamma} = \bar{\eta} = 0$ (отсутствие межзонного взаимодействия) и $p > 1$ (зона 2 несверхпроводящая при всех температурах). Как и следовало (см. [2–4] и Введение), получаем:

$$\Delta t_c = \bar{\xi}^2\bar{Q}(\Phi). \tag{36}$$

Вопреки утверждениям работы [9], из общей формулы (35) немедленно следует строго периодическая (с периодом Φ_0) зависимость $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ для двухзонных сверхпроводников, что вполне аналогично классическому случаю (36). Как и в классическом случае, сдвиг температуры сверхпроводящего перехода равен нулю в точках $\Phi/\Phi_0 = n$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) и достигает максимального значения в точках $\Phi/\Phi_0 = n \pm 1/2$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), когда оптимальные значения дискретной переменной n меняются на единицу. (В этих последних точках функция $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ имеет особенности (недифференцируемость).)

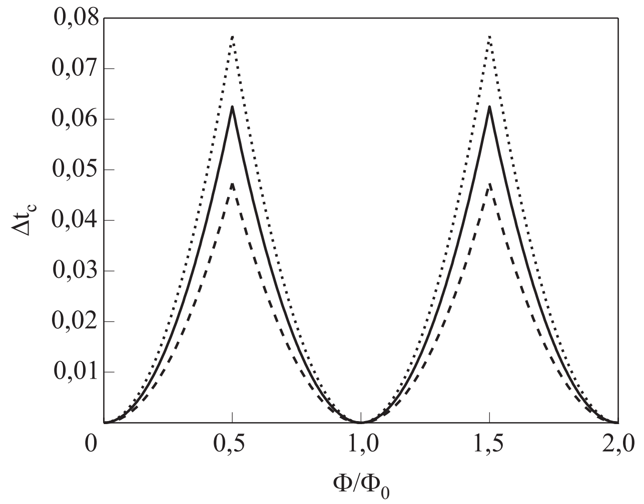

Рис. 2. Зависимость $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ для случая однозонного (сплошная линия) и двухзонного сверхпроводников ($p = 1,1765$, $l = 0,8333$, $\bar{\gamma} = 0,7059$) с $\bar{\eta} = 0$ (пунктирная линия) и $\bar{\eta} = 0,9$ (точечная линия). Значения остальных параметров: $\bar{\xi} = 0,5$, $k = 1$.

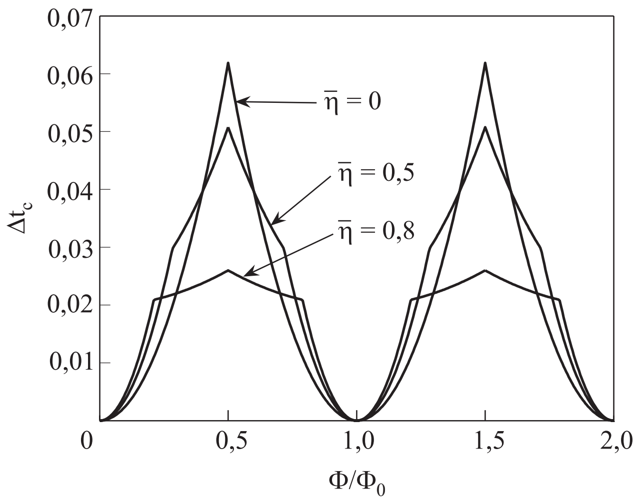

Рис. 3. Зависимость $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ для случая совпадения физических параметров зон 1 и 2: $p = 0$; $l = k = 1$ и значений $\bar{\eta}$, указанных на графиках. Значения остальных параметров: $\bar{\gamma} = 0,01$ и $\bar{\xi} = 0,5$.

Основное качественное отличие от классического случая (36) заключается в непараболическом характере зависимости $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ в областях с фиксированным оптимальным значением n, когда $|\Phi/\Phi_0 - n| < 1/2$ (см. рис. 2). Этот характерный эффект двухзонной сверхпроводимости допускает экспериментальную проверку.

В разделе 2 мы указывали на возможность чередования состояний $\phi = 0 \bmod 2\pi$ и $\phi = \pi \bmod 2\pi$, когда $\overline{\gamma\eta} > 0$ (см. обсуждение условия (23)). Такое чередование происходит, если $0 < |\bar{\gamma}| < |\bar{\eta}|\bar{\xi}^2/4$. В частности, если $0 < \bar{\gamma} < \bar{\eta}\bar{\xi}^2/4$, в областях $|\Phi/\Phi_0 - n| < \sqrt{\bar{\gamma}/(|\bar{\eta}|\bar{\xi}^2)}$ сверхпроводящий цилиндр находится в состоянии $\phi = 0 \bmod 2\pi$, а в областях $\sqrt{\bar{\gamma}/(|\bar{\eta}|\bar{\xi}^2)} < |\Phi/\Phi_0 - n| < 1/2$ реализуется состояние $\phi = \pi \bmod 2\pi$. Если же $\bar{\eta}\bar{\xi}^2/4 < \bar{\gamma} < 0$, состояния $\varphi = 0 \bmod 2\pi$ и $\phi = \pi \bmod 2\pi$ чередуются в обратном порядке. Хотя в общем случае переходы между состояниями $\phi = 0 \bmod 2\pi$ и $\phi = \pi \bmod 2\pi$ не сопровождаются какими-либо новыми наблюдаемыми особенностями зависимости $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$, укажем один специальный случай, когда такие особенности все же возникают.

Пусть физические параметры зон 1 и 2 полностью совпадают:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha = -a\left(1 - \frac{T}{T_{c_1}}\right)(a_{20} = 0),\; m_1 = m_2, \quad (37)$$

$$\beta_1 = \beta_2 \equiv \beta;\; p = 0,\; l = k = 1.$$

Подстановка (37) в общую формулу (35) дает:

$$\Delta t_c = \frac{1}{1+|\bar{\gamma}|}\left[|\bar{\gamma}| + \bar{\xi}^2\bar{Q}(\Phi) - |\bar{\gamma} - \bar{\eta}\bar{\xi}^2\bar{Q}(\Phi)|\right]. \quad (38)$$

Если выполнены условия

$$\overline{\gamma\eta} > 0,\; 0 < |\bar{\gamma}| < \frac{|\bar{\eta}|\bar{\xi}^2}{4}, \quad (39)$$

недифференцируемость правой части (38) в точках

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = n \pm \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{|\bar{\eta}|\bar{\xi}^2}},\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (40)$$

(точки перехода между состояниями $\phi = 0 \bmod 2\pi$ и $\phi = \pi \bmod 2\pi$) порождает новые наблюдаемые особенности зависимости $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$, полностью отсутствующие в классическом случае [2–4] (см. рис. 3).

4. Обсуждение и выводы

В рамках подхода Гинзбурга–Ландау построена теория эффекта Литтла–Паркса для двухзонных сверхпроводников. Получена достаточно простая формула (35), описывающая зависимость относительного сдвига температуры сверхпроводящего перехода Δt_c от величины внешнего магнитного потока Φ. В качестве частного случая формула (35) содержит хорошо известный из литературы [2–4] эффект Литтла–Паркса для однозонных сверхпроводников (36).

Основное отличие от классического эффекта (36), допускающее экспериментальную проверку, заключается в непараболическом характере зависимости $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ в областях, где $|\Phi/\Phi_0 - n| < 1/2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). При этом не подтверждается утверждение [9] об отсутствии периодичности осцилляций Литтла–Паркса ввиду различия физических параметров зон 1 и 2: из общей формулы (35) однозначно следует строгая периодичность (с периодом Φ_0) зависимости $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$, как и в классическом случае (36). Напротив, новые наблюдаемые особенности (недифференцируемость) зависимости $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$, полностью отсутствующие в классическом случае, появляются именно при совпадении параметров зон 1 и 2: см. формулу (38) при условиях (39) и рис. 3.

Исследование экстремальных свойств исходного функционала свободной энергии (3) привело к выводу о существовании важного ограничения (7) на величину феноменологического параметра η. При невыполнении условия (7) функционал (3) неограничен снизу, не обладает свойством минимизируемости и не может быть использован в физических приложениях. Насколько нам известно, условие (7) ранее не было отмечено в литературе.

Кроме того, было показано, что абсолютному минимуму функционала свободной энергии (3) соответствуют состояния с постоянной разностью фаз φ комплекснозначных компонент параметра порядка ψ_1 и ψ_2 ($\varphi = 0 \bmod 2\pi$ или $\varphi = \pi \bmod 2\pi$). По этой причине солитонные состояния, связанные с градиентами ϕ и обсуждавшиеся в литературе [18,19], не дают вклад в осцилляции Литтла–Паркса.

Подводя итог, авторы надеются, что полученные в работе результаты будут стимулировать экспериментальные исследования эффекта Литтла–Паркса в двухзонных сверхпроводниках, а также будут способствовать дальнейшему развитию теории как в рамках подхода Гинзбурга–Ландау, так и на последовательно микроскопической основе.

1. J. Nagamatsu, N. Nakagawa, T. Muranaka, Y. Zenitani, J. Akimitsu, *Nature* **410**, 63 (2001).
2. P.G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Benjamin, New York (1966).
3. А.А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
4. M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill, New York (1996).
5. A.V. Nikulov and I.N. Zhilyaev, *J. Low Temp. Phys*. **112**, 227 (1998).
6. A.Yu. Aladyshkin, A.S. Mel'nikov, and D.A. Ryzhov, *J. Phys.: Condens. Matter* **15**, 6591 (2003).
7. D.S. Golubovic, W.V. Pogosov, M. Morelle, and V.V. Moshchalkov, *Phys. Rev*. **B68**, 172503 (2003).
8. H. Masahiko and E. Hiromichi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **70**, 3495 (2001).
9. И.Н. Аскерзаде, *УФН* **176**, 1925 (2006).
10. H. Doh, M. Sigrist, B.K. Cho, and S.I. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5350 (1999).
11. I.N. Askerzade, *Physica* **C397**, 99 (2003).
12. I.N. Askerzade, *Acta Phys. Slovaca* **53**, 321 (2003).
13. A. Gurevich, *Physica* **C456**, 160 (2003).
14. A. Gurevich, *Phys. Rev*. **B67**, 184515 (2003); *cond-mat/0701281*.
15. M.E. Zhitomirsky and V.-H. Dao, *Phys. Rev*. **B69**, 054508 (2004).
16. Y.S. Yerin and A.N. Omelyanchouk, *ФНТ* **33**, 538 (2007).
17. В.С. Буслаев, *Вариационное исчисление*, Изд-во ЛГУ, Ленинград (1980).
18. Y. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017002 (2002).
19. H. Bluhm, N.C. Koshnick, M.E. Huber, and K.A. Moler, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 237002 (2006).

Little–Parks effect for two-band superconductors

Y.S. Yerin, S.V. Kuplevakhsky, and A.N. Omelyanchuk

The theory of the Little–Parks effect for two-band superconductors is constructed within the framework of the Ginzburg–Landau approach. A general formula describing the dependence of relative shift of the superconducting transition temperature, Δt_c, on external magnetic flux, Φ, is derived. As a particular case, this formula contains the classical Little–Parks effect for one-band superconductors. Contrary to the statements available in literature, the dependence $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ is strictly periodic, as in the classical effect. The main distinction from the classical effect, which allows for experimental observation, lies in the nonparabolic character of the dependence $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$. In the case where the physical parameters of both the bands coincide, the graph $\Delta t_c = \Delta t_c(\Phi)$ exhibits additional features. As a result of the investigation into extremal properties of the free-energy functional we have established an important restriction on one of the phenomenological parameters unnoticed in previous literature.

PACS: **74.25.–q** Properties of type I and type II superconductors;
74.20.De Phenomenological theories (two-fluid, Ginzburg–Landau, etc.).

Keywords: Little–Parks effect, two-band superconductivity, Ginzburg–Landau theory, free energy functional.