Физика низких температур, 2010, т. 36, № 8/9, с. 933–940

Влияние кросс-корреляций между неоднородностями на спектр и затухание спиновых и упругих волн

В.А. Игнатченко, Д.С. Полухин

Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН, г. Красноярск, 660036, Россия
E-mail: vignatch@iph.krasn.ru

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2009 г.

Исследованы законы дисперсии и затухания спиновых волн в ферромагнетике с неоднородностями параметров обмена и магнитной анизотропии и упругих волн в изотропной среде с неоднородностями плотности вещества и силовых упругих констант с учетом кросс-корреляций между этими неоднородностями. Установлена общая закономерность, не зависящая от физической природы волн: характер действия кросс-корреляций между неоднородностями любых двух параметров вещества на спектр волн определяется тем, принадлежат ли оба параметра к той же самой части гамильтониана (т.е. оба относятся к кинетической или оба — к потенциальной части) или они принадлежат к разным частям гамильтониана. В первом случае положительные кросс-корреляции приводят к большей модификации закона дисперсии и росту затухания волн, во втором случае — к уменьшению этих характеристик. Соответственно отрицательные кросс-корреляции в каждом из этих случаев приводят к обратным эффектам. Дано качественное объяснение этой закономерности.

Досліджено закони дисперсії та загасання спінових хвиль у феромагнетику з неоднорідністю параметрів обміну і магнітної анізотропії та пружних хвиль в ізотропному середовищі з неоднорідністю густини речовини і силових пружних констант із урахуванням крос-кореляцій між цими неоднорідностями. Установлено загальну закономірність, яка не залежить від фізичної природи хвиль: характер дії крос-кореляцій між неоднорідностями будь-яких двох параметрів речовини на спектр хвиль визначається тим, чи належать обидва параметри до тієї ж самої частини гамільтоніана (тобто обидва належать до кінетичної або обидва — до потенціальної частини) або до різних частин гамільтоніана. У першому випадку позитивні крос-кореляції призводять до більшої модифікації закону дисперсії та зростанню загасання хвиль, у другому — до зменшення цих характеристик. Відповідно негативні крос-кореляції в кожному із цих випадків призводять до зворотних ефектів. Дано якісне пояснення цієї закономірності.

PACS: 75.30.Ds Спиновые волны;
76.50.+g Ферромагнитный, антиферромагнитный и ферримагнитный резонансы; спин-волновой резонанс;
63.50.–x Колебательные состояния в неупорядоченных системах;
63.20.kp Фононное взаимодействие дефектов.

Ключевые слова: спиновые волны, упругие волны, неоднородности, корреляции, кросс-корреляции, дисперсия, затухание.

1. Введение. Корреляции и кросс-корреляции

Аморфные и нанокристаллические материалы широко используются в различных устройствах современной электроники, построенных на основе распространения и преобразования электромагнитных, упругих и спиновых волн. С точки зрения теории, такие материалы характеризуются двумя основными свойствами: 1) неоднородностью всех параметров гамильтониана (плотности вещества, упругих силовых констант, параметров обмена, магнитной анизотропии и т.д.); 2) протяженными корреляциями этих неоднородностей, корреляционный радиус которых определяется как топологическим, так и композиционным беспорядком и может меняться в широких пределах (десятки и сотни межатомных расстояний). Наличие больших корреляционных радиусов делает невозможным использование хорошо развитых теоретических методов, учитывающих влияние некоррелированных (δ-коррелированных) неоднородностей для расчета целого ряда эффектов в этих материалах.

Идея о том, что спиновые и упругие волны в ферромагнетике должны рассматриваться в рамках единого магнитоупругого континуума, была высказана в основополагающих работах Турова и Ирхинина [1], Ахиезера, Барьяхтара и Пелетминского [2] и Киттеля [3], в которых развита теория связанных магнитоупругих волн и явления магнитоупругого резонанса, возникающего в области пересечения дисперсионных кривых невозмущенных спиновых и упругих волн. Однако проблемы, связанные с учетом корреляций неоднородностей, достаточно сложны, и мы будем исследовать их отдельно для спиновых и упругих волн, пренебрегая магнитоупругим взаимодействием. Такое рассмотрение возможно либо для материалов с малым магнитоупругим параметром, либо для частот, далеких от частот магнитоупругого резонанса.

Влияние неоднородностей с произвольными радиусами корреляций на спектр и затухание спиновых волн в модели сплошной среды учтено в работах [4–7] в первом неисчезающем приближении теории возмущении. Влияние неоднородностей с произвольными радиусами корреляций на спектр и затухание упругих волн в изотропной среде учитывалось в работах [4,8,9]. В работах [4–7,9] влияние каждого флуктуирующего параметра среды $A_i(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$, рассматривалось отдельно.

Случайная функция $A_i(\mathbf{x})$ для каждого *i*-го параметра среды может быть представлена в виде

$$A_i(\mathbf{x}) = A_i[1 + \gamma_i \rho_i(\mathbf{x})], \qquad (1)$$

где A_i и γ_i — соответственно среднее значение и относительное среднеквадратичное отклонение функции $A_i(\mathbf{x})$, а $\rho_i(\mathbf{x})$ — центрированная ($<\rho_i(\mathbf{x})>=0$) и нормированная ($<\rho_i^2(\mathbf{x})>=1$) однородная случайная функция координат. Стохастические характеристики случайной функции $\rho_i(\mathbf{x})$ описываются корреляционной функцией $K_{ii}(\mathbf{r})$ или связанной с ней преобразованием Фурье спектральной плотностью $S_{ii}(\mathbf{k})$ неоднородностей:

$$K_{ii}(\mathbf{r}) = <\rho_i(\mathbf{x})\rho_i(\mathbf{x}+\mathbf{r})>, \ S_{ii}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int K_{ii}(\mathbf{r})\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}} d\mathbf{r}, \qquad (2)$$

где $|\mathbf{r}|$ — расстояние между двумя точками в пространстве, а угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций случайной функции $\rho_i(\mathbf{x})$.

Главный результат теории, развитой в работах [4], заключается в том, что в окрестности волнового числа $k = k_{ii}/2$ должно наблюдаться изменение законов дисперсии $\omega'(k)$ и затухания $\omega''(k)$ и оно различно для неоднородностей разных физических параметров. Эти эффекты обусловлены тем, что волны по-разному рассеиваются на коррелированных ($k > k_{ii}/2$) и некоррелированных ($k << k_{ii}/2$) участках неоднородностей. Теория, в которой неоднородность каждого параметра рассматривается отдельно, приближенно справедлива в ряде случаев.

Однако в общем случае усреднение стохастических волновых уравнений, содержащих несколько неоднородных параметров $A_i(\mathbf{x})$, приводит к тому, что $\omega'(k)$ и $\omega''(k)$, как и все неслучайные характеристики случайной системы, становятся функционалами не только корреляционных (автокорреляционных) функций $K_{ii}(\mathbf{r})$ каждого параметра A_i, но и функций взаимных корреляций (кросс-корреляций) между параметрами $K_{ij}(\mathbf{r})$ (или их спектральных плотностей $S_{ij}(\mathbf{k})$) вида

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = <\rho_i(\mathbf{x})\rho_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})>, \ S_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int K_{ij}(\mathbf{r})\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}} d\mathbf{r}, \qquad (3)$$

где $i \neq j$ и усреднение проводится по ансамблям реализаций обеих случайных функций $\rho_i(\mathbf{x})$ и $\rho_j(\mathbf{x})$.

В отличие от автокорреляционной функции $K_{ii}(\mathbf{r})$, которая равна единице при $\mathbf{r} = 0$, кросс-корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} = 0$ равна некоторому безразмерному коэффициенту κ_{ij}. Этот коэффициент характеризует величину и знак кросс-корреляций между параметрами A_i и A_j и может принимать произвольное значение в интервале от -1 до $+1$. Конкретная величина и знак κ_{ij} должны определяться из опыта или рассчитываться из микроскопической модели, учитывающей реальные и, в некоторых случаях весьма сложные, физические связи между параметрами A_i и A_j. Такое формализованное описание позволяет исследовать на первом этапе влияние кросс-корреляций на спектр системы в общем виде, без детального обсуждения физических механизмов, которые привели к возникновению этих кросс-корреляций.

В предельных случаях $\kappa_{ij} = \pm 1$ стохастические кросс-корреляции переходят в детерминистические связи между неоднородностями различных параметров. При $\kappa_{ij} = 1$ случайные функции $\rho_i(\mathbf{x})$ и $\rho_j(\mathbf{x})$ совпадают друг с другом, а при $\kappa_{ij} = -1$ являются зеркальным отображением друг друга. В общем случае наличие кросс-корреляций, не меняя среднеквадратичных отклонений γ_i и γ_j случайных функций $A_i(\mathbf{x})$ и $A_j(\mathbf{x})$, приводит к частичной стохастической пространственной синхронизации этих функций, степень которой определяется величиной коэффициента кросс-корреляций κ_{ij}.

Цель настоящей работы — расчет влияния кросс-корреляций произвольной величины и знака между различными параметрами среды на спектр и затухание спиновых и упругих волн.

2. Спиновые волны

В работе [10] рассмотрена модель ферромагнетика, в котором неоднородными являются параметр обмена $\alpha(\mathbf{x})$ и величина одноосной магнитной анизотропии $\beta(\mathbf{x})$. Направление анизотропии $\mathbf{n}$ предполагается постоянным и совпадающим с направлением внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$. Плотность энергии W в этой модели имеет вид

$$W = \frac{1}{2}\alpha(\mathbf{x})\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 - \mathbf{MH} - \frac{1}{2}\beta(\mathbf{x})(\mathbf{Mn})^2 . \qquad (4)$$

Представим параметры обмена $\alpha(\mathbf{x})$ и анизотропии $\beta(\mathbf{x})$ в виде (1), где $A_i = \alpha$, β и $\gamma_i = \gamma_\alpha$, γ_β. Поперечные проекции намагниченности $m_x(\mathbf{x},t), m_y(\mathbf{x},t) \sim \sim \exp(i\omega t)$ описываются системой линейных уравнений с зависящими от $\mathbf{x}$ коэффициентами:

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{g} m_x &= M_0\beta m_y + M_0\beta\gamma_\beta\rho_\beta m_y + Hm_y - \\ &- M_0\alpha(\nabla^2 m_y + \gamma_\alpha\rho_\alpha\nabla^2 m_y + \gamma_\alpha\nabla\rho_\alpha\nabla m_y) , \\ \frac{i\omega}{g} m_y &= M_0\beta m_x + M_0\beta\gamma_\beta\rho_\beta m_x + Hm_x - \\ &- M_0\alpha(\nabla^2 m_x + \gamma_\alpha\rho_\alpha\nabla^2 m_x + \gamma_\alpha\nabla\rho_\alpha\nabla m_x) , \end{aligned} \qquad (5)$$

где g — гиромагнитное отношение.

Проводя преобразование Фурье и вводя циркулярные проекции, получаем для резонансной проекции $m(\mathbf{k})$ интегральное уравнение:

$$(\nu - k^2)m(\mathbf{k}) = \gamma_\alpha \int (\mathbf{kk}_1)\rho_\alpha(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)m(\mathbf{k}_1)\, d\mathbf{k}_1 + \\ + \frac{\beta\gamma_\beta}{\alpha}\int \rho_\beta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)m(\mathbf{k}_1)\, d\mathbf{k}_1 , \qquad (6)$$

где введено обозначение $\nu = (\omega - \omega_0)/gM_0\alpha$. Здесь ω_0 — частота ферромагнитного резонанса.

Усредняем уравнение (6) по случайным реализациям функции $\rho_\alpha(\mathbf{k})$ и $\rho_\beta(\mathbf{k})$. Образовавшиеся под интегралами средние от произведений случайных функций ρ и m расцепляем в первом неисчезающем приближении теорий возмущений (приближение Бурре [11]). В результате получаем общий вид дисперсионного уравнения для спиновых волн в виде

$$\nu - k^2 = \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\nu - k_1^2}\Big[\gamma^2(\mathbf{kk}_1)^2 S_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1) + \\ + 2\gamma\eta_\beta(\mathbf{kk}_1)S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1) + \eta_\beta^2 S_{\beta\beta}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\Big], \qquad (7)$$

где введены обозначения $\gamma = \gamma_\alpha$, $\eta_\beta = \beta\gamma_\beta/\alpha$. Члены, пропорциональные γ^2 и η_β^2, учитывают в этом уравнении влияние неоднородностей обмена и анизотропии соответственно. Член, пропорциональный произведению $\gamma\eta_\beta$, учитывает влияние кросс-корреляций между неоднородностями обмена и анизотропии.

2.1. 1D неоднородности

Предполагаем, что спад корреляций экспоненциальный как для автокорреляционных функций обмена $K_{\alpha\alpha}(r)$ и анизотропии $K_{\beta\beta}(r)$, так и для функции кросс-корреляций между флуктуациями обмена и анизотропии $K_{\alpha\beta}(r)$:

$$K_{ii}(r) = \exp(-k_{ii}r),\ K_{ij}(r) = \kappa \exp(-k_{ij}r), \qquad (8)$$

где в нашем случае $K_{ii} = K_{\alpha\alpha}$ или $K_{\beta\beta}$; $K_{ij} = K_{\alpha\beta}$; $k_{ii} = r_{ii}^{-1}$ и $k_{ij} = r_{ij}^{-1}$ — корреляционные волновые числа, а r_{ii} и r_{ij} — корреляционные радиусы.

В общем случае величина корреляционного радиуса r_{ii} для неоднородностей каждого параметра i может быть различна. Могут быть различными и величины радиусов кросс-корреляций r_{ij} между неоднородностями различных параметров i и j. В дальнейшем ограничимся для простоты случаем, когда все корреляционные радиусы примерно одинаковы $r_{ii} \approx r_{ij} \approx r_c$.

Согласно формулам (2) и (3), этим корреляционным функциям соответствуют спектральные плотности вида

$$S_{\alpha\alpha}(k) = S_{\beta\beta}(k) = \frac{1}{\pi}\frac{k_c}{k_c^2 + k^2},\ S_{\alpha\beta}(k) = \frac{\kappa}{\pi}\frac{k_c}{k_c^2 + k^2}. \qquad (9)$$

Вычисляя интегралы в формуле (7) методом теории вычетов, получаем комплексный закон дисперсии, положив в правой части выражения (7) $\sqrt{\nu} \approx k$. Представляя ν в виде $\nu = \nu' + i\nu''$, получаем закон дисперсии спиновых волн с учетом взаимных корреляций между неоднородностями параметров обмена и магнитной анизотропии в виде

$$\nu' = k^2\left(1 - \gamma^2\frac{1+3u^2}{1+4u^2} - \frac{2\kappa\gamma\eta}{1+4u^2}\right) + \frac{\eta^2 k_c^2}{1+4u^2} \qquad (10)$$

и затухание спиновых волн в виде

$$\nu'' = k^2\left(\gamma^2\frac{u(1+2u^2)}{1+4u^2} + \frac{4\kappa\gamma\eta u}{1+4u^2}\right) + \frac{\eta^2(1+2u^2)k_c^2}{u(1+4u^2)}, \qquad (11)$$

где введены безразмерные обозначения $u = k/k_c$, $\eta = \eta_\beta/k_c^2$.

2.2. 3D неоднородности

Предполагаем, что спад корреляций характеризуется изотропными корреляционными функциями, зависящими только от модуля радиуса-вектора $r = |\mathbf{r}|$ вида (8). Согласно формулам (2) и (3), этим корреляционным функциям соответствуют спектральные плотности вида

$$S_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) = S_{\beta\beta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pi^2}\frac{k_c}{(k_c^2+k^2)^2},$$
$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{\kappa}{\pi^2}\frac{k_c}{(k_c^2+k^2)^2}. \qquad (12)$$

Подставляя эти выражения в (7) и проводя интегрирование в сферической системе координат, получаем закон дисперсии $\nu'(k)$ и затухание спиновых волн $\nu''(k)$ с учетом взаимных корреляций между $3D$ неоднородностями параметров обмена и магнитной анизотропии в виде

$$\frac{\nu'}{k_c^2} = u^2\left\{1-\gamma^2\left[\frac{1+5u^2}{1+4u^2}+\frac{1}{u^2}-\frac{(1+2u^2)\,\mathrm{arctg}\,(2u)}{2u^3}\right]\right\}+$$
$$+2\kappa\gamma\eta\left(\frac{\mathrm{arctg}\,(2u)}{2u}-\frac{1+3u^2}{1+4u^2}\right)-\frac{\eta^2}{1+4u^2}, \qquad (13)$$

$$\frac{\nu''}{k_c^2} = \gamma^2u^3\left[\frac{1}{u^2}+\frac{2u^2}{1+4u^2}-\frac{(1+2u^2)\ln(1+4u^2)}{4u^4}\right]+$$
$$+2\kappa\gamma\eta\left[\frac{u(1+2u^2)}{1+4u^2}-\frac{\ln(1+4u^2)}{4u}\right]+\frac{2\eta^2u}{1+4u^2}. \qquad (14)$$

Модификации закона дисперсии, описываемые формулой (13), показаны на рис. 1,*а*. Пунктирной линией на этом рисунке показан закон дисперсии $\nu' = k^2$, соответствующий однородному ферромагнетику ($\gamma = \eta = 0$). Сплошная кривая соответствует суммарной модификации закона дисперсии, к которой приводит одновременное присутствие неоднородностей обмена и анизотропии при отсутствии взаимных корреляций между ними ($\gamma \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\kappa = 0$). Видно, что положительные кросс-корреляции (штриховая кривая, $\kappa > 0$) приводят к большему отступлению закона дисперсии, а отрицательные (штрих-пунктирная кривая, $\kappa < 0$), напротив, уменьшают модификацию этого закона по сравнению с той, которая обусловлена совместным действием некоррелированных неоднородностей обмена и анизотропии.

Затухание $\nu''(k)$, обусловленное $3D$ неоднородностями обмена и анизотропии и описываемое формулой (14), показано на рис. 1,*б*. Сплошная кривая на этом рисунке соответствует суммарному эффекту, к которому приводят одновременное присутствие неоднородностей обмена и анизотропии при отсутствии взаимных корреляций между ними ($\gamma \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\kappa = 0$). Видно, что положительные кросс-корреляции (штриховая кривая, $\kappa > 0$) приводят к возрастанию, а отрицательные (штрих-пунктир, $\kappa < 0$) — к уменьшению затухания волн. Изменение величины затухания под действием кросс-корреляций является функцией k или соответственно частоты. Для $\kappa < 0$ наиболее сильное уменьшение затухания должно наблюдаться в окрестности $k \sim k_c$.

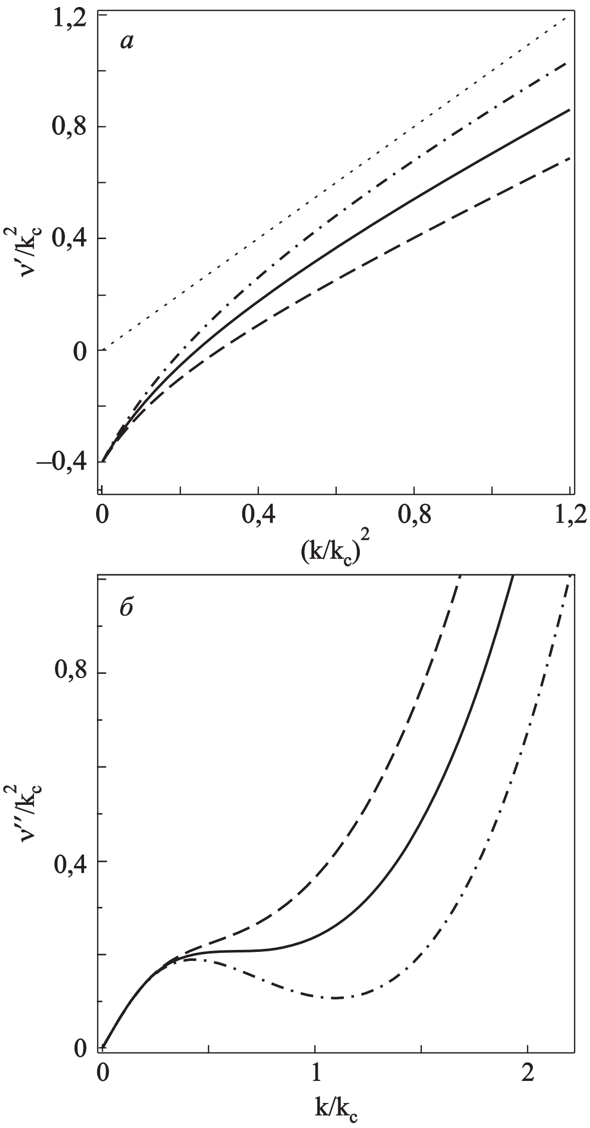

Рис. 1. Закон дисперсии (*а*) и затухание (*б*) спиновых волн в ферромагнетике с $3D$ неоднородностями обмена и анизотропии для $\kappa = 0$ (сплошные кривые), $\kappa = 0{,}8$ (штриховые кривые) и $\kappa = -0{,}8$ (штрих-пунктир). Пунктир — закон дисперсии в однородном ферромагнетике.

3. Упругие волны

В работе [12] рассмотрена модель изотропной упругой среды, где неоднородными являются силовые константы $\lambda(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ и плотность вещества $p(\mathbf{x})$. Уравнение движения для вектора смещения $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ имеет вид

$$-p(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\lambda(\mathbf{x})\frac{\partial u_f}{\partial x_f}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\mu(\mathbf{x})\frac{\partial u_s}{\partial x_f}\right)+\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\mu(\mathbf{x})\frac{\partial u_f}{\partial x_s}\right)=0, \qquad (15)$$

где индексы s, f пробегают значения x, y, z, и по дважды повторяющемуся индексу f подразумевается суммирование по всем координатам. Представим зависящие от координат параметры $p(\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ в виде (1).

Принимая, что $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\sim e^{-i\omega t}\mathbf{u}(\mathbf{x})$, и проводя преобразование Фурье, получаем из (15) векторное уравнение для трансформанты фурье-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$:

$$(\omega^2-\upsilon_t^2k^2)\mathbf{u}(\mathbf{k})-(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)\mathbf{k}(\mathbf{ku}(\mathbf{k}))=-\gamma_p\omega^2\int\rho_p(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{u}(\mathbf{k}_1)\,d\mathbf{k}_1+\gamma_\mu\upsilon_t^2\int(\mathbf{kk}_1)\rho_\mu(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{u}(\mathbf{k}_1)\,d\mathbf{k}_1+$$
$$+\gamma_\lambda(\upsilon_l^2-2\upsilon_t^2)\mathbf{k}\int\rho_\lambda(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_1\mathbf{u}(\mathbf{k}_1))\,d\mathbf{k}_1+\gamma_\mu\upsilon_t^2\int\mathbf{k}_1\rho_\mu(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)(\mathbf{ku}(\mathbf{k}_1))\,d\mathbf{k}_1. \qquad (16)$$

Повышаем индексы при $\mathbf{k}$ в уравнении (16) на единицу и выражаем из полученного уравнения функцию $\mathbf{u}(\mathbf{k}_1)$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}_1)=-\gamma_p\omega^2\int\frac{\rho_p(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{u}(\mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_2}{\omega^2-\upsilon_t^2k_1^2}-\gamma_p\omega^2(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)\int\frac{\mathbf{k}_1\rho_p(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1\mathbf{u}(\mathbf{k}_2))\,d\mathbf{k}_2}{(\omega^2-\upsilon_t^2k_1^2)(\omega^2-\upsilon_l^2k_1^2)}+$$
$$+\gamma_\lambda(\upsilon_l^2-2\upsilon_t^2)\int\frac{\mathbf{k}_1\rho_\lambda(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_2\mathbf{u}(\mathbf{k}_2))\,d\mathbf{k}_2}{\omega^2-\upsilon_t^2k_1^2}+\gamma_\mu\upsilon_t^2\int\frac{(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)\rho_\lambda(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{u}(\mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_2}{\omega^2-\upsilon_t^2k_1^2}+$$
$$+\gamma_\lambda(\upsilon_l^2-2\upsilon_t^2)(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)\int\frac{k_1^2\mathbf{k}_1\rho_\lambda(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_2\mathbf{u}(\mathbf{k}_2))\,d\mathbf{k}_2}{(\omega^2-\upsilon_t^2k_1^2)(\omega^2-\upsilon_l^2k_1^2)}+\gamma_\mu\upsilon_t^2\int\frac{\mathbf{k}_2\rho_\lambda(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1\mathbf{u}(\mathbf{k}_2))\,d\mathbf{k}_2}{\omega^2-\upsilon_t^2k_1^2}+$$
$$+2\gamma_\mu\upsilon_t^2(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)\int\frac{\mathbf{k}_1(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)\rho_\lambda(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1\mathbf{u}(\mathbf{k}_2))\,d\mathbf{k}_2}{(\omega^2-\upsilon_t^2k_1^2)(\omega^2-\upsilon_l^2k_1^2)}. \qquad (17)$$

Подставляя это выражение в правую часть уравнения (16), усредняя полученное уравнение по случайным реализациям функций $\rho_p(\mathbf{k})$, $\rho_\mu(\mathbf{k})$ и $\rho_\lambda(\mathbf{k})$ и расцепляя образовавшиеся корреляторы в приближении Бурре [11], получаем комплексные дисперсионные соотношения $\omega(k)$ для поперечных волн в виде

$$\omega=\upsilon_tk\left\{1-\frac{\upsilon_t^2}{2}\left[\gamma_p^2u^2\left(2L_{tpp}^{t20}-(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)(L_{ltpp}^{t40}-L_{ltpp}^{t42})\right)-4\gamma_p\gamma_\mu u\left(L_{tp\mu}^{t31}-(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)(L_{ltp\mu}^{t51}-L_{ltp\mu}^{t53})\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\gamma_\mu^2\left(L_{t\mu\mu}^{t40}+L_{t\mu\mu}^{t42}-4(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)(L_{lt\mu\mu}^{t62}-L_{lt\mu\mu}^{t64})\right)\right]\right\}, \qquad (18)$$

а для продольных волн в виде

$$\omega=\upsilon_lk\left\{1-\upsilon_l^2\left[\gamma_p^2u^2\left(L_{tpp}^{l20}-(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)L_{ltpp}^{l42}\right)-2\gamma_p\gamma_\lambda u(1-2\beta^2)\left(L_{tp\lambda}^{l31}-(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)L_{ltp\lambda}^{l51}\right)-\right.\right.$$
$$-4\gamma_p\gamma_\mu\beta^2(L_{tp\mu}^{l31}-(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)L_{ltp\mu}^{l53})+\gamma_\lambda^2(1-2\beta^2)^2(L_{t\lambda\lambda}^{l40}-(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)L_{lt\lambda\lambda}^{l60})+ \qquad (19)$$
$$\left.\left.+4\gamma_\lambda\gamma_\mu\beta^2(1-2\beta^2)\left(L_{t\lambda\mu}^{l42}-(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)L_{lt\lambda\mu}^{l62}\right)+4\gamma_\mu^2\beta^4\left(L_{t\mu\mu}^{l42}-(\upsilon_l^2-\upsilon_t^2)L_{lt\mu\mu}^{l64}\right)\right]\right\},$$

где $\beta=\upsilon_t/\upsilon_l$.

В эти выражения входят 22 комплексных интегральных выражения, которые можно обобщенно записать в виде

$$L_{tij}^{lmn}=\frac{1}{\upsilon_t^2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1\frac{u_1^mx^nS_{ij}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_1)}{Z_1}\,du_1dx,\quad L_{ltij}^{lmn}=\frac{1}{\upsilon_l^2\upsilon_t^2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1\frac{u_1^mx^nS_{ij}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_1)}{Z_2}\,du_1dx,$$
$$L_{ltpp}^{tmn}=\frac{1}{\upsilon_l^2\upsilon_t^2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1\frac{u_1^mx^nS_{ij}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_1)}{Z_4}\,du_1dx,\quad L_{tij}^{tmn}=\frac{1}{\upsilon_t^2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1\frac{u_1^mx^nS_{ij}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_1)}{Z_3}\,du_1dx, \qquad (20)$$

где $Z_1=u_1^2-u^2/\beta^2$, $Z_2=(u_1^2-u^2/\beta^2)(u_1^2-u^2)$, $Z_3=u_1^2-u^2$, $Z_4=(u_1^2-\beta^2u^2)(u_1^2-u^2)$.

В выражениях (20) можно выделить две группы интегралов, описывающих процессы различной физической природы: интегралы L_{tij}^{tmn}, не содержащие β, определяют вклад в модификацию дисперсионного закона процессов рассеяния для волн одного и того же типа, а все остальные интегралы, содержащие β, описывают вклад в модификацию дисперсионного закона процессов рассеяния с изменением типа волн.

Интегралы (20) вычислялись по u_1 методом теории вычетов, затем интегрирование по x сводилось к табличным интегралам [13].

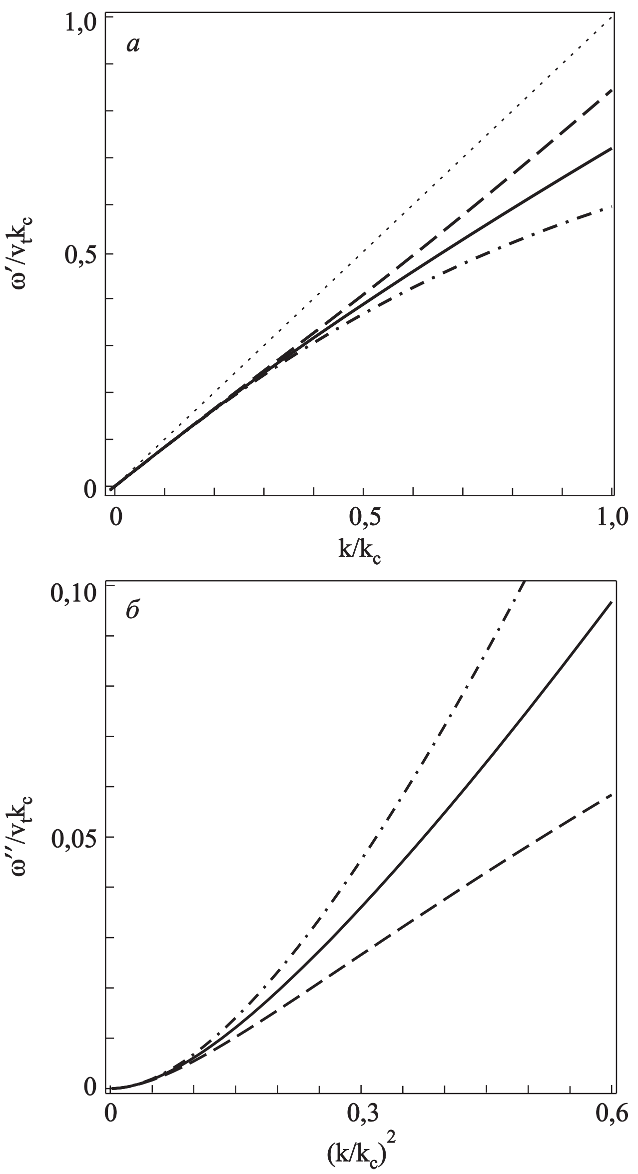

Рис. 2. Законы дисперсии (*а*) и затухания (*б*) поперечных упругих волн в среде при различных значениях коэффициентов кросс-корреляций $\kappa_{p\mu}$ между 3D неоднородностями плотности и силовой константы вещества: $\kappa_{p\mu} = 0$ (сплошные кривые); $\kappa_{p\mu} = 0{,}9$ (штриховые кривые); $\kappa_{p\mu} = -0{,}9$ (штрих-пунктир). Пунктирной прямой показан закон дисперсии в однородной среде.

Вид зависимостей $\omega'(k)$ и $\omega''(k^2)$ для поперечных волн показан на рис. 2 при различных значениях коэффициентов кросс-корреляций κ_{ij} между неоднородностями. На рис. 2,*а* видно, что при отсутствии кросс-корреляций (сплошная кривая) происходит как отклонение дисперсионной кривой поперечных волн от невозмущенного закона дисперсии (пунктирная линия) в сторону малых частот, так и дальнейший изгиб этой кривой в том же направлении в окрестности точки $k / k_c = 0{,}5$. Появление положительных кросс-корреляций между неоднородностями p и μ приводит к приближению дисперсионной кривой (штриховая кривая) к невозмущенному закону дисперсии и уменьшению ее изгиба. Отрицательные кросс-корреляции увеличивают модификацию закона дисперсии (штрих-пунктирная кривая). Затухание ω'' поперечных волн как функция k^2 показано на рис. 2,*б*. В этих координатах левее точки кроссовера $(k / k_c)^2 = 0{,}25$ функция $\omega''(k^2)$ имеет вид параболы, а правее — прямой линии. Появление положительных кросс-корреляций между неоднородностями p и μ приводит к уменьшению (штриховая кривая), а отрицательных кросс-корреляций — к увеличению (штрих-пунктирная кривая) затухания. Таким образом, в этом случае действие кросс-корреляций приводит к эффектам в волновом спектре упругих волн, прямо противоположным тем, к которым приводят кросс-корреляции между неоднородностями обмена и анизотропии в спектре спиновых волн (см. рис. 1).

Для продольных волн кросс-корреляции между неоднородностями плотности и упругих констант ($\kappa_{p\mu}$ и $\kappa_{p\lambda}$) вызывают эффекты, подобные показанным на рис. 2. Однако кросс-корреляции между упругими константами μ и λ приводят к прямо противоположным эффектам: при положительном значении $\kappa_{\lambda\mu}$ происходит увеличение модификаций закона дисперсии и затухания, при отрицательном $\kappa_{\lambda\mu}$ — их уменьшение.

4. Обсуждение результатов и заключение

В работе получен парадоксальный, на первый взгляд, результат, что положительные кросс-корреляции ($\kappa_{ij} > 0$) между неоднородностями некоторых параметров вещества приводят к усилению модификации закона дисперсии и росту затухания волн, тогда как такие же по знаку кросс-корреляции между неоднородностями других параметров вещества вызывают ослабление этой модификации и уменьшение затухания волн. Поскольку отрицательные ($\kappa_{ij} < 0$) кросс-корреляции всегда приводят к эффектам, противоположным тем, к которым приводят положительные кросс-корреляции, их действие обладает подобной же двузначностью.

Эта двузначность снимается, если обратить внимание на то, что параметр p относится к кинетической части гамильтониана, а параметры μ и λ, так же как параметры α и β, — к потенциальной части. Это позволяет предположить, что характер действия кросс-корреляций между параметрами меняется в зависимости от того, относятся ли оба параметра к одной и той же части гамильтониана или же эти параметры принадлежат к различным частям гамильтониана.

Физический механизм таких различий в характере действия кросс-корреляций можно понять на следующей упрощенной модели неоднородной среды. Закон дисперсии продольных упругих волн в однородной изотропной среде определяется выражением

$$\omega = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{p}\right)^{1/2} k . \quad (21)$$

В случае очень плавных неоднородностей с характерным размером $2r_c$, много большим длины волны $(k_c << k)$, среду можно приближенно представить как состоящую из множества однородных областей размера $2r_c$, внутри которых параметры среды p, μ и λ постоянны, но различны в разных областях (модель независимых зерен — кристаллитов). Если флуктуации величин p, μ и λ некоррелированы между собой, то частота при данном k может существенно различаться в разных областях, так как будут существовать области, в которых произошло одновременно увеличение μ (или λ) и уменьшение p (или наоборот) относительно средних значений этих величин, а частота волны определяется отношением $\lambda + 2\mu$ и p. Положительные кросс-корреляции приводят к пространственной синхронизации флуктуаций двух случайных функций без изменения величин среднеквадратичных отклонений каждой из функций. Поэтому теперь в каждой из наших областей отклонению (любого знака) величины μ (или λ) от ее среднего значения соответствует отклонение того же знака величины p от своего среднего. В результате случайный разброс частот волн в различных областях вещества уменьшается. Можно представить себе даже гипотетическую предельную ситуацию, когда частота упругих волн будет во всем пространстве практически одинакова, несмотря на сильные отклонения как μ (или λ), так и p в различных областях пространства. Отрицательные кросс-корреляции приводят к пространственной синхронизации отклонений μ (или λ) и p с противоположными знаками и, соответственно, к еще большему разбросу частот волн в различных областях, чем для случая $\kappa_{p\mu} = 0$. На этом примере можно также качественно рассмотреть влияние кросс-корреляций между λ и μ. При отсутствии этих кросс-корреляций, наряду со случаями одновременного увеличения или уменьшения λ и μ, имеются случаи, когда при увеличении (уменьшении) λ происходит уменьшение (увеличение) μ. Включение положительных кросс-корреляций исключает последние случаи: теперь λ и μ увеличиваются или уменьшаются синхронно, что усиливает разброс значений ω в различных областях вещества. Такое же качественное рассмотрение влияния кросс-корреляций между различными параметрами гамильтониана может быть проведено на упрощенной модели неоднородной среды для случая спиновых волн.

В выражении (21), как и в любом выражении для частоты волны, параметры, соответствующие потенциальной части гамильтониана (в данном случае λ и μ), стоят в числителе, а параметры, соответствующие кинетической части гамильтониана (в данном случае p), — в знаменателе. В соответствии с этим, анализ полученных в работе результатов, а также проведенное качественное рассмотрение на модели независимых зерен позволяет сформулировать общую закономерность действия кросс-корреляций, не зависящую от физической природы волн: характер действия кросс-корреляций между неоднородностями любых двух параметров вещества на волновой спектр определяется тем, принадлежат ли оба параметра, связанные кросс-корреляциями, к той же самой части гамильтониана (т.е. оба относятся к кинетической или оба — к потенциальной части) или они принадлежат к разным частям гамильтониана. В первом случае положительные кросс-корреляции приводят к росту модификации закона дисперсии и затухания волн, во втором случае — к уменьшению этих характеристик. Соответственно, отрицательные кросс-корреляции в каждом из этих случаев приводят к обратным эффектам.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы №27.1 Президиума РАН, Государственного контракта №02.740.11.0220 по Федеральной целевой программе и Государственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы», Проект №2.1.1/3498.

1. Е.А. Туров, Ю.П. Ирхин, *ФММ* **3,** 15 (1956).
2. А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский, *ЖЭТФ* **35**, 228 (1958).
3. C. Kittel, *Phys. Rev.* **110,** 835 (1958).
4. В.А. Игнатченко, Р.С. Исхаков, *ЖЭТФ* **72,** 1005 (1977); *там же* **74**, 1386 (1978); *там же* **75**, 1438 (1978).
5. М.В. Медведев, *ФТТ* **22**, 1944 (1980).
6. М.В. Медведев, М.В. Садовский, *ФТТ* **23**, 1943 (1981).
7. K. Handrich and R. Öttking, *Phys. Status Solidi (b)* **216**, 1073 (1999).
8. В.А. Игнатченко, Л.И. Дейч, *ФТТ* **27,** 1883 (1985).
9. K. Handrich and R. Öttking, *Phys. Status Solidi (b)* **255**, 289 (2001).
10. В.А. Игнатченко, Д.С. Полухин, *ФТТ* **51**, 892 (2009).
11. R.C. Bourret, *Nuovo Cimento* **26**, 1 (1962).
12. В.А. Игнатченко, Д.С. Полухин, *ЖЭТФ* **137**, (2010).
13. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, том. 1, Наука, Москва (1981).

Effects of cross correlations between inhomogeneities on the spectrum and damping of spin and elastic waves

V.A. Ignatchenko and D.S. Polukhin

Laws of dispersion and damping of spin waves in a ferromagnet with inhomogeneities of the exchange and magnetic-anisotropy parameters, as well as elastic waves in an isotropic medium with inhomogeneities of the density of material and elastic force constants are studied with taking into account cross correlations between these inhomogeneities. The general law that is independent of the wave nature is established: effects of cross correlations between inhomogeneities of any two material parameters on the wave spectrum are determined by the fact whether both these parameters belong to the same part of the Hamiltonian (that is, both are related to the kinetic part or to the potential one) or they belong to the different parts of the Hamiltonian. In the first case the positive cross correlations lead to a more dramatic modification of the dispersion law and an increase in wave damping, and in the second case to the decrease of these characteristics. Correspondingly, the negative cross correlations in the each of these cases lead to inverse effects. A qualitative explanation of this law is given.

PACS: 75.30.Ds Spin waves;
76.50.+g Ferromagnetic, antiferromagnetic, and ferrimagnetic resonances; spin-wave resonance;
63.50.–x Vibrational states in disordered systems;
63.20.kp Phonon-defect interactions.

Keywords: spin waves, elastic waves, inhomogeneities, correlations, cross correlations, dispersion, damping.