

Блоховские осцилляции спиновых волн в неоднородном магнитном поле

В.В. Ганн

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 64108, Украина
E-mail: gann@kipt.kharkov.ua*

Ю.А. Косевич

*Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, ул. Косыгина, 4, г. Москва, 119991, Россия
E-mail: yukosevich@gmail.com*

Статья поступила в редакцию 17 марта 2010 г.

Рассмотрены одночастичные возбуждения в квазиодномерной ферромагнитной спиновой цепочке, помещенной в неоднородное магнитное поле с большим градиентом. В магнитном поле с постоянным градиентом происходит динамическая локализация спиновой волны, образуется система локальных уровней с эквидистантным спектром энергий, имеющим вид «лестницы» Ванье–Зеемана. Это явление аналогично блоховским осцилляциям электрона в слабом электрическом поле. В полубесконечной цепочке спектр спиновых возбуждений ограничен снизу; с ростом энергии наблюдается постепенный переход от спиновых волн в неоднородном магнитном поле к состояниям типа блоховских осцилляций. Рассмотрена бесконечная цепочка спинов, находящихся в магнитном поле, постоянном при $x < 0$ и линейно возрастающем в области $x > 0$. В этих условиях над зоной спиновых волн возникает система локальных уровней типа Ванье–Зеемана, спектр которых при больших значениях энергии становится эквидистантным. Обсуждаются возможности экспериментального наблюдения блоховских осцилляций спиновых волн.

Розглянуто одночасткові збудження у квазіодновимірному ферромагнітному спіновому ланцюжку, який поміщено у неоднорідне магнітне поле з великим градієнтом. У магнітному полі з постійним градієнтом відбувається динамічна локалізація спінової хвилі, утворюється система локальних рівнів з еквідистантним спектром енергій, що мають вид «сходінки» Ванье–Зеемана. Це явище аналогічне блохівським осциляціям електрона в слабкому електричному полі. У напівнескінченному ланцюжку спектр спінових порушень обмежен знизу; з ростом енергії спостерігається поступовий перехід від спінових хвиль у неоднорідному магнітному полі до станів типу блохівських осциляцій. Розглянуто нескінченний ланцюжок спінів, що перебувають у магнітному полі, постійному при $x < 0$, та в полі, яке лінійно зростає в області $x > 0$. У цих умовах над зоною спінових хвиль виникає система локальних рівнів типу Ванье–Зеемана, спектр яких при більших значеннях енергії стає еквідистантним. Обговорюються можливості експериментального спостереження блохівських осциляцій спінових хвиль.

PACS: 75.10. Pq Модели спиновых цепочек;
75.30. Ds Спиновые волны;
75.40. Gb Динамические свойства.

Ключевые слова: спиновые волны, спиновые цепочки, низкоразмерные магнетики, блоховские осцилляции.

Как известно, энергетический спектр электрона, находящегося в периодическом поле, имеет зонный характер. Если такую систему поместить в однородное электрическое поле, то электрон начнет ускоряться,

его кинетическая энергия будет возрастать до тех пор, пока его импульс не достигнет границы зоны Бриллюэна. Отразившись от нее, электрон будет двигаться против поля пока он не затормозится в электрическом

поле и не меняет направление своего импульса. Такие колебания электрона известны под названием блоховских осцилляций [1,2]. Брэгговские отражения могут вызывать блоховские осцилляции волн любой природы (электронных, оптических, акустических), распространяющихся в решетке, находящейся в слабом однородном поле [3,4]. Аналогичное явление может существовать и в магнитных системах, помещенных в неоднородное магнитное поле [5]. В работах [6–8] были исследованы «квазиблоховские» осцилляции магнитного солитона между двумя точками поворота, возникающими при наличии неоднородного магнитного поля. В настоящей работе рассмотрены одночастичные блоховские осцилляции спиновых волн в ферромагнитной цепочке спинов, помещенных в неоднородное магнитное поле, постоянное при $x < 0$ и линейно возрастающее в области $x > 0$ с достаточно большим градиентом, обеспечивающим динамическую локализацию спиновой волны. В этих условиях над зоной спиновых волн возникает система локальных уровней, спектр которых при больших значениях энергии становится эквидистантным и образует «лестницу» Ванье–Зеемана.

От спиновых волн к блоховским осцилляциям

Спектр спиновых волн в тонкой ферромагнитной пленке $0 < x < d$ был впервые получен Киттелем [9,10] на основе решения уравнения Ландау–Лифшица для намагниченности \mathbf{M} :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = g\mathbf{M} \times [\mathbf{H}_0 - \alpha \Delta \mathbf{M}], \quad (1)$$

где g — гиромагнитное отношение, α — постоянная неоднородного обмена с условиями закрепления спинов на границах:

$$\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}(d) = \mathbf{M}_0 \text{ (условие Киттеля)}. \quad (2)$$

Используя граничные условия (2), получаем спектр частот киттелевских мод:

$$\omega_n = \omega_0 + gM_0\alpha \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2, \quad (3)$$

где $\omega_0 = gH_0$ — частота однородного ферромагнитного резонанса в поле H_0 и $n = 1, 2, 3 \dots$

Если использовать граничные условия Радо [11] $\partial \mathbf{M}(0) / \partial x = \partial \mathbf{M}(d) / \partial x = 0$, то спектр частот колебаний намагниченности будет иметь тот же вид (3), где $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Спиновые волны в ферромагнетике, помещенном в неоднородное магнитное поле с постоянным градиентом η , были впервые рассмотрены Шлеманном [12]. Уравнение (1) для малого отклонения \mathbf{m} намагниченности \mathbf{M} от насыщения \mathbf{M}_0 имеет вид

$$\left(gM_0\alpha \frac{d^2}{dx^2} + \omega - \omega_0 - g\eta x \right) \psi(x) = 0, \quad (4)$$

где ω — частота спиновой волны, а $\psi(x) = m^+(x) = m_x(x) + im_y(x)$ — право-циркулярная компонента отклонения намагниченности \mathbf{m}

Решение уравнения (4) выражается через функцию Эйри $\Phi(\xi)$:

$$\psi(x) = \Phi(\xi),$$

где

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{\eta}{\alpha M_0}}(x - x_0), \quad x_0 = (\omega - \omega_0) / (g\eta), \quad (5)$$

Если ферромагнетик занимает полупространство $x \geq 0$, то к уравнению (4) следует добавить граничное условие. Мы возьмем на свободной границе условие Радо:

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (6)$$

В такой системе будут существовать стоячие спиновые волны с дискретным спектром частот:

$$\omega_n = \omega_0 + gM_0\sqrt[3]{\alpha(\eta / M_0)^2}(-a'_n), \quad (7)$$

где $a'_n < 0$ — нули производной функции Эйри. Зависимость частоты от номера n представлена на рис. 1 в безразмерной форме.

При больших значениях n выражение (7) имеет простую асимптотику:

$$\omega_n = \omega_0 + gM_0\sqrt[3]{\alpha(\eta / M_0)^2} \left[\frac{3\pi}{2} \left(n + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3}. \quad (8)$$

Зависимость $\psi(x)$ схематически представлена на рис. 2. Волновой вектор спиновой волны $k(x)$ принимает максимальное значение $k_{\max} = k(0) = \sqrt{(\omega_n - \omega_0) / (gM_0\alpha)}$ при $x = 0$, причем величина k_{\max} увеличивается с ростом n пропорционально $\sqrt[3]{n + 1/4}$. При значении $n \sim \alpha M_0 / (\eta^3)$ вблизи границы $x = 0$

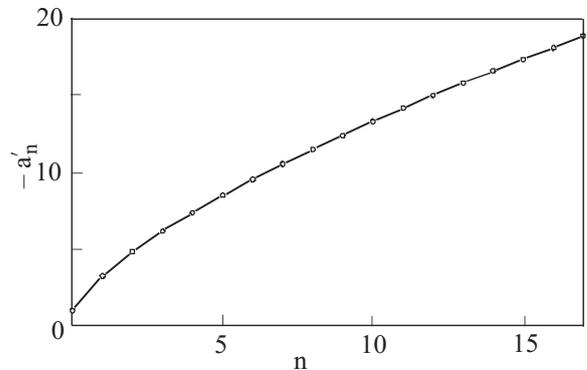


Рис. 1. Зависимость $(\omega_n - \omega_0) / gM_0\sqrt[3]{\alpha(\eta / M_0)^2}$ от номера n в соответствии с уравнением (7).

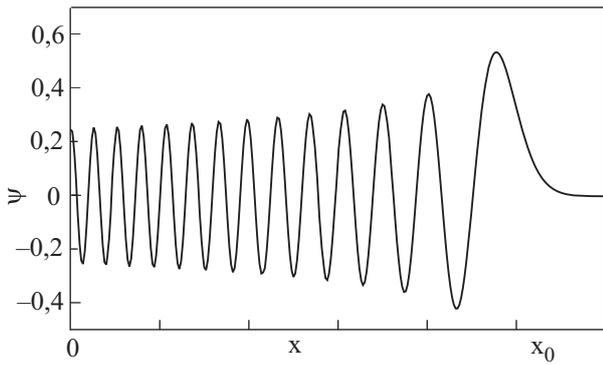


Рис. 2. Характерный вид решения (5) уравнения (4).

нарушается условие справедливости макроскопического приближения длинных волн $ak \ll 1$, где a — постоянная решетки. При значениях $n > \alpha M_0 / (\eta a^3)$ «отражение» спиновых волн происходит уже не при $x = 0$, а при $ak(x) \sim 1$. В этой области энергий идет полная перестройка спектра спиновых волн, которая связана с брэгговскими отражениями в решетке.

Спиновые возбуждения в полубесконечной цепочке

Рассмотрим одномерную полубесконечную ферромагнитную цепочку атомов со спином $s = 1/2$, помещенную в неоднородное магнитное поле. Гамильтониан гейзенберговской модели такой системы имеет вид

$$H = h_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} I \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + (H_0 + \eta x_n) \mu_0 \sigma_n^z \right], \quad (9)$$

где I — энергия обменного взаимодействия, η — градиент магнитного поля, $x_n = an$ — координата узла с номером n , a — постоянная решетки, μ_0 — магнетон Бора, $\sigma_n^x, \sigma_n^y, \sigma_n^z$ — матрицы Паули.

Константу h_0 выберем таким образом, чтобы энергия основного состояния ферромагнетика равнялась нулю. Рассмотрим спектр одномагнетонных возбуждений в системе с гамильтонианом (1). Волновая функция такого возбуждения имеет вид

$$\Psi_v = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^{(v)} |m\rangle, \quad (10)$$

где $|m\rangle = \sigma_m^- |0\rangle$ — базисная функция состояния цепочки с одним перевернутым спином в узле m , $\sigma_n^- = (\sigma_n^x - i\sigma_n^y)/2$ — циркулярная проекция матриц Паули, $|0\rangle$ — волновая функция основного состояния системы, в котором все спины направлены в одну сторону.

Стационарные состояния такой системы находятся из уравнения

$$\hat{H}\Psi_v = E_v \Psi_v, \quad (11)$$

где v — квантовый номер состояния.

Подставляя (10) в (9), получим стационарное уравнение Шредингера для спиновой волны в поле с постоянным градиентом в следующем виде:

$$4 \frac{m - e_v}{A} C_m^{(v)} = C_{m-1}^{(v)} + C_{m+1}^{(v)} \quad \text{при } 1 < m, \quad (12)$$

$$4 \frac{1 - e_v}{A} C_1^{(v)} = C_1^{(v)} + C_2^{(v)}, \quad (13)$$

где

$$A = 2I / (a\eta\mu_0) \quad \text{и} \quad e_v = (E_v - 2I - 2H_0\mu_0) / (2a\eta\mu_0). \quad (14)$$

Уравнение (13) можно рассматривать в качестве граничного условия (типа Радо) к уравнению (12). Параметр A характеризует размер области пространственной локализации волновой функции стационарного состояния, а величина e_v определяет энергию состояния с номером v .

На рис. 3 представлен спектр энергий стационарных состояний с $v = 1, 2, \dots, 30$, полученный путем численного решения уравнений (12) и (13) на узлах с номерами $m < 80$ для значения параметра $A = 60$.

На рис. 4–6 представлены волновые функции для цепочки спинов с $A = 60$. Волновые функции с номерами $v < 6$ относятся к области длинных спиновых волн с $ak \ll 1$ — они описываются также формулами (5) и имеют вид, аналогичный показанному на рис. 2. Функции с номерами $v = 6, 9$ и 12 относятся к длинноволновой области с $ak < 1$ (см. рис. 4), а функции с номерами $v = 19 \dots 31$ — к переходной области от спиновых волн к блоховским осцилляциям (см. рис. 5). На рис. 6 изображена волновая функция с номером $v = 39$, которая уже имеет законченный вид функции состояния Ванье–Зеемана, ограниченной с обеих сторон.

Блоховские спиновые осцилляции в бесконечной цепочке

Рассмотрим более подробно область больших зна-

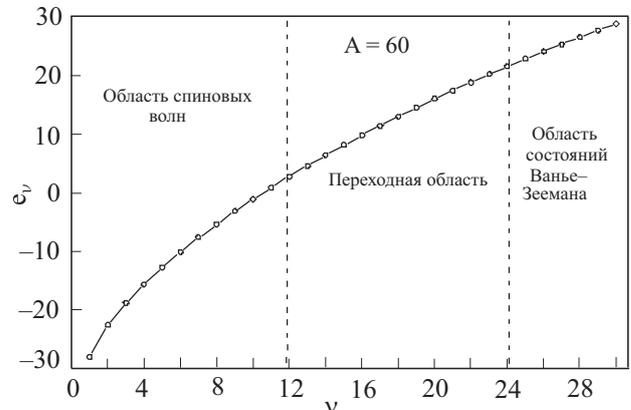


Рис. 3. Спектр спиновых колебаний для $A = 60$.

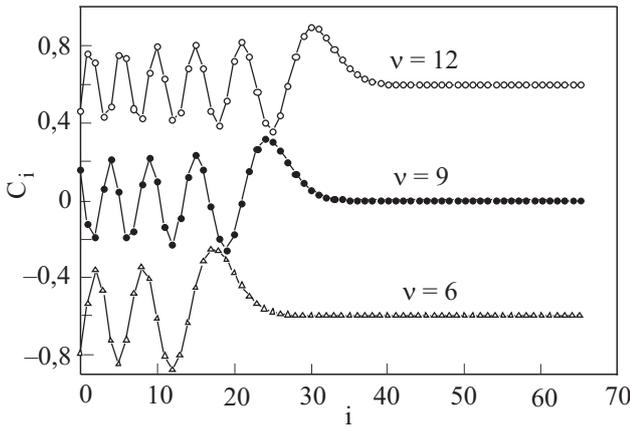


Рис. 4. Волновые функции спиновых волн с номерами $\nu = 6, 9$ и 12 для $A = 60$.

чений ν . Наиболее удобной моделью для рассмотрения этого случая является бесконечная ферромагнитная цепочка атомов со спином $1/2$ в магнитном поле с постоянным градиентом, описываемая гамильтонианом

$$H = h_0 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} J \sigma_n \sigma_{n+1} + H(x_n) \mu_0 \sigma_n^z \right], \quad (15)$$

где $H(x_n) = H_0 + \eta x_n$.

Стационарное уравнение Шредингера имеет вид, аналогичный (12), это уравнение имеет решения, ограниченные на $\pm \infty$ лишь при целых (положительных и отрицательных) значениях $e_\nu = \nu$:

$$4 \frac{m-\nu}{A} C_m^{(\nu)} = C_{m-1}^{(\nu)} + C_{m+1}^{(\nu)} \quad \text{при } -\infty < m < +\infty. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) выражается через функцию Бесселя $J_m(z)$:

$$C_m^{(\nu)} = J_{m-\nu}(A/2). \quad (17)$$

При наличии двух точек поворота спиновой волны

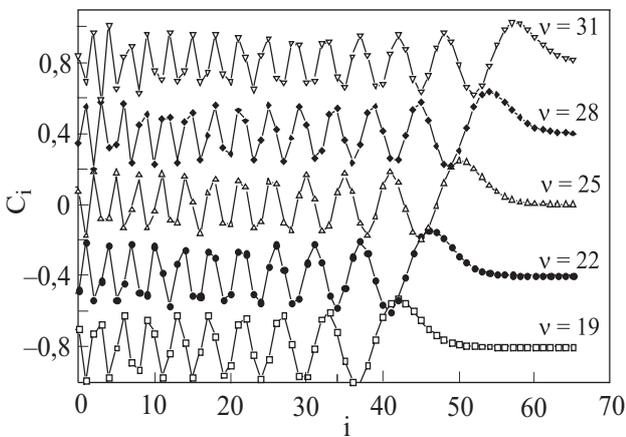


Рис. 5. Волновые функции состояний с номерами $\nu = 19, 22, 25, 28$ и 31 в переходной области для $A = 60$.

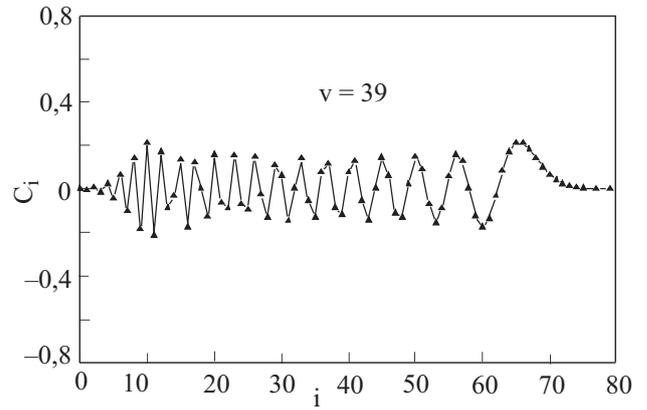


Рис. 6. Волновая функция состояния с $\nu = 39$ в области состояний Ванье–Зеемана для $A=60$.

энергия E_ν стационарного состояния может принимать лишь дискретный спектр значений:

$$E_\nu = 2H_0\mu_0 + 2I + 2a\eta\mu_0\nu, \quad (18)$$

причем, все уровни располагаются с постоянным шагом:

$$\Delta E = \hbar\Omega = 2a\eta\mu_0 \quad (19)$$

и образуют характерную «лестницу Ванье–Зеемана».

Волновые функции $C_m^{(\nu)}$, принадлежащие различным собственным значениям ν , отличаются лишь сдвигом на величину $a\nu$ по оси x : $C_m^{(\nu)} = C_{m-\nu}^{(0)}$, при этом функции $C_m^{(0)}$ обладают свойством симметрии $C_{-m}^{(0)} = (-1)^m C_m^{(0)}$.

На рис. 7 показана волновая функция $C_m^{(\nu)}$ для $A = 30$ и $\nu = 3$.

Динамика системы с гамильтонианом (15) описывается уравнением Шредингера:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi. \quad (20)$$

Решение уравнения (20) может быть представлено в

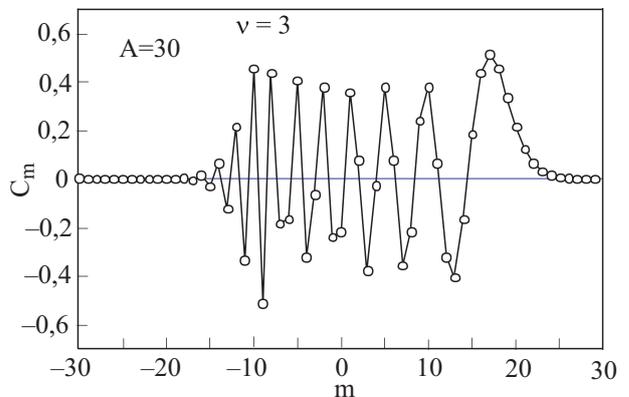


Рис. 7. Волновая функция состояния Ванье–Зеемана $C_m^{(\nu)}$ для $A = 30$ и $\nu = 3$.

виде

$$\Psi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu} B_{\nu} J_{m-\nu}(A/2) e^{-iE_{\nu}t} |m\rangle, \quad (21)$$

где B_{ν} — произвольные постоянные.

Составим для системы с $A = 30$ простейший волновой пакет, представляющий суперпозицию двух стационарных состояний Ванье–Зеемана с соседними квантовыми номерами $\nu = 0$ и $\nu = 1$ и одинаковыми амплитудами:

$$C_m(t) = [J_m(15)e^{-iE_0t} + J_{m-1}(15)e^{-iE_1t}] / \sqrt{2}. \quad (22)$$

Для такого волнового пакета вероятность нахождения перевернутого спина в узле m выражается формулой

$$|C_m(t)|^2 = [J_m^2(15) + J_{m-1}^2(15)] / 2 + J_m(15)J_{m-1}(15) \cos(\Delta Et). \quad (23)$$

Видно (23), что в такой системе возникают блоховские осцилляции с частотой $\Omega_B = 2a\eta\mu_0 / \hbar$.

На рис. 8 изображены распределения вероятностей $|C_m(t)|^2$ нахождения перевернутого спина в узлах m для моментов времени $t = 0$, $t = T/4$ и $t = T/2$. В данном примере спиновая волна в неоднородном магнитном поле с постоянным градиентом совершает блоховские осцилляции между двумя точками поворота с периодом $T = \hbar / (2a\eta\mu_0)$ и амплитудой осцилляций A , которые не зависят от энергии.

Блоховские спиновые осцилляции в неоднородном магнитном поле

Рассмотрим распространение спиновых волн в неоднородном магнитном поле в ферромагнетике, описываемом гамильтонианом (15), в котором магнитное поле однородно $H(x) = H_0$ в области $x_n \leq 0$ и возрастает $H(x) = H_0 + \eta x$ с постоянным градиентом η при $x_n > 0$.

Стационарное уравнение Шредингера для спиновой волны в таком поле принимает вид

$$4 \frac{\nu}{A} C_m + C_{m-1} + C_{m+1} = 0 \text{ при } m \leq 0, \quad (24)$$

$$4 \frac{\nu - m}{A} C_m + C_{m-1} + C_{m+1} = 0 \text{ при } m > 0, \quad (25)$$

где $A = 2I / (a\eta\mu_0)$ и $\nu = (E - 2H_0\mu_0 - 2I) / (2a\eta\mu_0)$.

Уравнение (24) имеет решение

$$C_m^{(\leq)} = \sin(akm + \varphi), \quad (26)$$

где φ — постоянная интегрирования, а k удовлетворяет дисперсионному уравнению для спиновых волн

$$E = 2H_0\mu_0 + 2I[1 - \cos(ak)]. \quad (27)$$

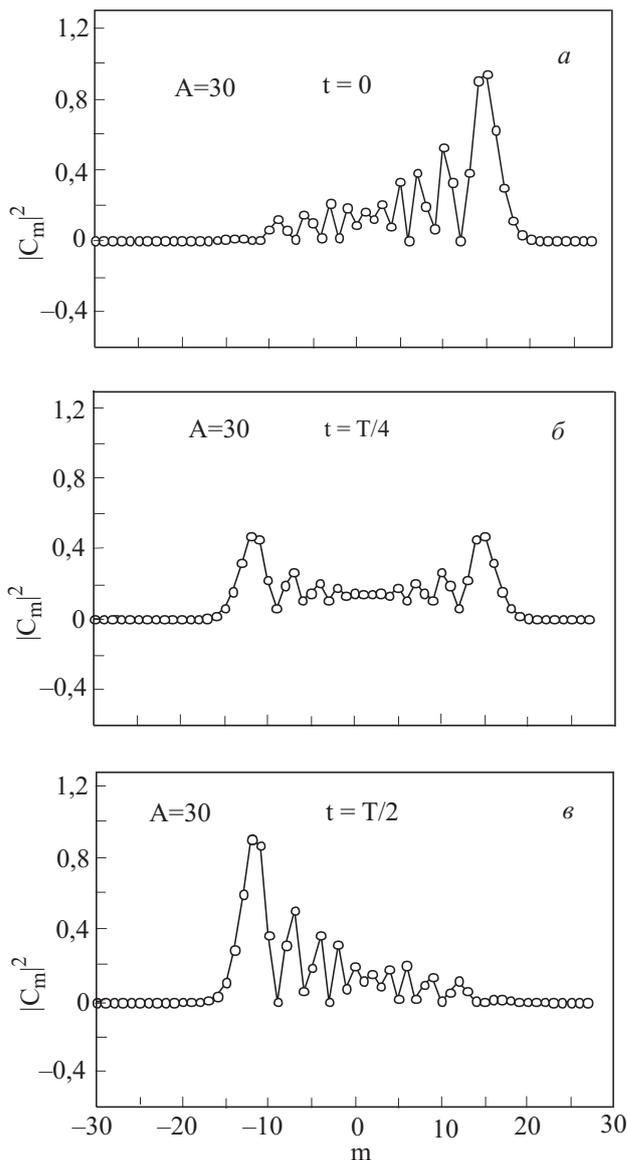


Рис. 8. Распределение вероятностей нахождения перевернутого спина в узлах m для момента времени $t: 0$ (а), $T/4$ (б), $T/2$ (в).

Решение уравнения (25), ограниченное на $+\infty$, имеет вид

$$C_m^{(>)} = D J_{m-\nu}(A/2), \quad (28)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя порядка n , а D — постоянная интегрирования.

Сшивая решения (26) и (28) при $m = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\sin(ak)}{J_{1-\nu}(A/2) / J_{-\nu}(A/2) - \cos(ak)}, \\ \nu &= -A \cos(ak) / 2, \\ D &= \frac{\sin \varphi}{J_{-\nu}(A/2)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражения (26)–(29) справедливы при $0 \leq E \leq 2H_0\mu_0 + 4I$, что соответствует $2v/A \leq 1$. На рис. 9 представлены волновые функции C_n нескольких характерных состояний спинволновой зоны для системы с $A = 40$.

При $E > 2H_0\mu_0 + 4I$ имеем следующее решение уравнения (24), ограниченное на $-\infty$:

$$C_m^{(\leq)} = B \exp[(i\pi + a\lambda)m], \quad (30)$$

где B — постоянная интегрирования, а λ удовлетворяет уравнению

$$E = 2H_0\mu_0 + 2I[1 + \text{ch}(\lambda a)]. \quad (31)$$

Решение уравнения (25), ограниченное на $+\infty$, выберем в виде

$$C_m^{(>)} = J_{m-\nu}(A/2), \quad (32)$$

Сшивая решения (30) и (32) при $m = 0$, получим:

$$B = J_{-\nu}(A/2), \quad (33)$$

$$B + \exp(-a\lambda)J_{1-\nu}(A/2) = 0. \quad (34)$$

Система уравнений (33) и (34) совместно с (26) и (28) определяет энергетический спектр одночастичных спиновых возбуждений, расположенных выше зоны спиновых волн при $2v/A > 1$:

$$\left[2v/A + \sqrt{(2v/A)^2 - 1} \right] J_{-\nu}(A/2) + J_{1-\nu}(A/2) = 0. \quad (35)$$

На рис. 10 изображен спектр локализованных состояний выше зоны спиновых волн для значений $A = 6, 10, 20$ и 40 . Спектры перенумерованы $i = 1, 2, 3 \dots$ в порядке возрастания энергии E_i . Пунктиром представлен эквидистантный спектр блоховских состояний в бесконечной цепочке с постоянным градиентом магнитного поля. На рис. 10 видно, что начиная с номера $t = 3$, спектр становится эквидистантным (при всех значениях A), что соответствует «лестнице Ванье–Зеемана».

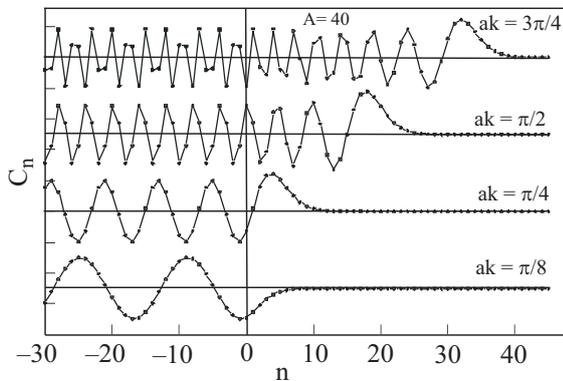


Рис. 9. Волновые функции C_n состояний спинволновой зоны с $A = 40$ для значений $ak = \pi/8, \pi/4, \pi/2$ и $3\pi/4$.

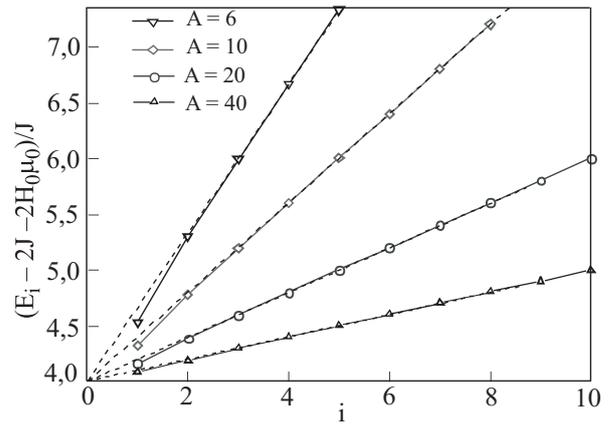


Рис. 10. Спектр локализованных состояний цепочки спинов для значений $A = 6, 10, 20$ и 40 .

На рис. 11 представлены волновые функции C_m локализованных состояний системы с $A = 40$. Из данных на рис. 11 следует, что наличие спинволновой зоны практически не сказывается на волновых функциях с $i > 4$, а волновые функции $C_m^{(i)}$ с различными номерами $i > 4$ отличаются лишь сдвигом по оси x .

Таким образом, при больших энергиях возбуждения локализованные состояние выше зоны спиновых волн ведут себя аналогично состояниям Ванье–Зеемана в системе с постоянным градиентом магнитного поля.

Выводы

В ферромагнитной цепочке спинов, помещенной в неоднородное магнитное поле с постоянным градиентом, происходит динамическая локализация спиновых волн; возникает набор локальных уровней с эквидистантным спектром, которые образуют «лестницу Ванье–Зеемана». В случае неоднородного магнитного поля нерегулярной формы над зоной спиновых волн

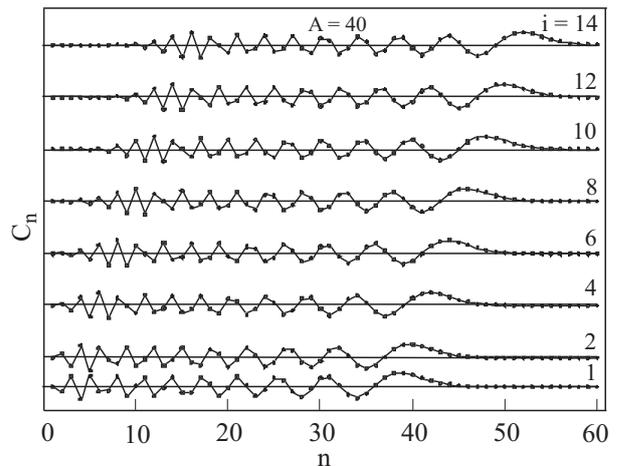


Рис. 11. Волновые функции локализованных состояний системы с $A = 40$ в области $n > 0$.

также может возникать система локальных уровней.

В ферромагнетиках, помещенных в неоднородное магнитное поле, возможно существование блоховских осцилляций спиновых волн, которые могут наблюдаться экспериментально в тонких ферромагнитных пленках или в квазиодномерных структурах на частотах выше верхней границы зоны обычных спиновых волн.

1. F. Bloch, *Z. Phys.* **52**, 555 (1928).
2. C. Zener, *Proc. R. Soc.* **A145**, 523 (1934).
3. Yu.A. Kosevich, *Phys. Rev.* **B63**, 205313 (2001).
4. H. Sanchis-Alepuz, Yu.A. Kosevich, and J. Sanchez-Dehesa, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 134301 (2007).
5. A.M. Kosevich, *Physica*, **D119**, 134 (1998).
6. В.В. Ганн, А.И. Жуков, В.П. Воронов, *Научные ведомости БГУ*, №1, 198 (1998).
7. А.М. Косевич, В.В. Ганн, А.И. Жуков, В.П. Воронов, *ЖЭТФ* **114**, 735 (1998).
8. А.М. Косевич, *ФНТ* **27**, 699 (2001) [*Low Temp. Phys.* **27**, 513 (2001)].
9. А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
10. C. Kittel, *Phys. Rev.* **110**, 1295 (1958).
11. G. Rado, *Phys. Rev.* **97**, 1558 (1955).
12. E. Schlomann, *J. Appl. Phys.*, **35**, 2382 (1964).
13. J. Kyriakidis and D. Loss, *Phys. Rev.* **B58**, 5568 (1998).

Bloch oscillations of spin waves in nonuniform magnetic field

V.V. Gann and Yu.A. Kosevich

Single-particle excitations in a quasi-one dimensional ferromagnet spin chain placed in a nonuniform magnetic field with a large gradient are considered. In a magnetic field with a constant gradient there occurs a dynamic localization of spin waves and an equidistant energy level spectrum like the Wannier–Zeeman «ladder» is formed. A similar phenomenon is known for an electron in a periodic potential and a weak electric field. In a semi-infinite chain the spin excitation spectrum is bounded from below; a gradual evolution from spin waves in a nonuniform magnetic field to Wannier–Zeeman states occurs with increasing energy. An infinite chain in nonuniform magnetic field is considered when a constant magnetic field is applied in the $x < 0$ region and a linearly increasing one is applied in the $x > 0$ region. In this case a set of localized Wannier–Zeeman-like states appears above the spin wave zone, whose spectrum becomes equidistant at the high energies. Possibilities of experimental observation of Bloch oscillations in spin systems are discussed.

PACS: 75.10.Pq Spin chain models;
75.30.Ds Spin waves;
75.40.Gb Dynamical properties.

Keywords: spin waves, spin chains, low dimension magnetic, Bloch oscillations.