Физика низких температур, 2010, т. 36, № 8/9, с. 875–882

Квазичастичная теория сверхтекучих бозе-систем с одночастичным и парным конденсатами

А.С. Пелетминский, С.В. Пелетминский

Институт теоретической физики им. А.И. Ахиезера, Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина

E-mail: spelet@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 14 декабря 2009 г.

Рассмотрена полуфеноменологическая теория сверхтекучих бозе-систем, основанная на идее квазичастичного описания. Эта теория позволяет с единой точки зрения изучить одночастичный и парный конденсаты как для сил отталкивания, так и для сил притяжения. Проведен анализ полученных уравнений для соответствующих этим конденсатам параметров порядка в приближении слабого взаимодействия.

Розглянуто напівфеноменологічну теорію надплинних бозе-систем, яка заснована на ідеї квазичастинкового опису. Ця теорія дозволяє з єдиної точки зору вивчити одночастинковий і парний конденсати як для сил відштовхування, так і для сил притягання. Проведено аналіз отриманих рівнянь для відповідних до цих конденсатів параметрів порядку в наближенні слабкої взаємодії.

PACS: **67.10.–j** Квантовые жидкости: общие свойства;
67.10.Fj Квантовая статистическая теория;
67.25.D– Сверхтекучая фаза ^{4}He;
67.85.Jk Другие явления бозе-эйнштейновской конденсации.

Ключевые слова: сверхтекучесть, бозе-жидкость, одночастичный бозе-конденсат, парный конденсат, слабо неидеальный бозе-газ.

1. Введение

Явление сверхтекучести в бозе-системах со взаимодействием обычно связывают с возникновением когерентного конденсата частиц, сопровождающимся спонтанным нарушением фазовой инвариантности. Первой микроскопической моделью сверхтекучей бозе-жидкости явилась теория Боголюбова [1] слабо неидеального бозе-газа, в которой, по-видимому впервые, пришлось отказаться от методов стандартной теории возмущений при изучении эффектов взаимодействия. Дальнейшее развитие микроскопическая теория сверхтекучести получила в методе функций Грина и полевой теории возмущений [2,3], а также концепции квазисредних [4,5], которая позволяет эффективно описывать как равновесные, так и неравновесные состояния сверхтекучей бозе-жидкости [6,7].

После выполненных пионерских работ по сверхпроводимости стало ясно, что сверхтекучесть в бозе-системах может быть также связана с конденсатом не самих частиц, а их связанных пар [8–12]. В частности, такой конденсат, который называется парным (или двухчастичным), может служить основой сверхтекучей компоненты He-II [13–15]. В отличие от одночастичного конденсата, описываемого средним значением полевого оператора $\langle\psi(x)\rangle = n_0^{1/2}$, где n_0 — плотность конденсата, парный конденсат характеризуется аномальными средними $\langle\psi(x)\psi(x')\rangle$ и $\langle\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(x')\rangle$.

В данной работе исследована сверхтекучая бозе-система при наличии одночастичного и парного конденсатов. В основе такого рассмотрения лежит полуфеноменологическая теория сверхтекучих бозе-систем [16,17], которая предполагает задание энергии системы как функционала конденсатных амплитуд, а также нормальных и аномальных корреляционных функций. При этом, так же как и в теории ферми-жидкости, можно полагать, что взаимодействие между частицами системы не обязательно является слабым. Из вариационного принципа (из условия максимума энтропии) могут быть найдены уравнения самосогласования, определяющие равновесные значения конденсатных амплитуд и корреляционных функций. Далее эти уравнения применяются для изучения пространственно-однородной сверхтекучей бозе-системы со слабым взаимодействием. В частности, они позволяют определить температурные интервалы, в которых могут реализовываться решения, соответствующие одночастичному, парному конденсатам или нормальному состоянию.

2. Основные уравнения бозе-системы с одночастичным и парным конденсатами

Как хорошо известно, для описания многочастичной системы с сильным взаимодействием эффективным методом является введение понятия квазичастиц, которые слабо взаимодействуют между собой, но существенным оказывается взаимодействие квазичастицы с самосогласованным полем, создаваемым всеми другими квазичастицами. Ярким примером такого подхода может служить теория ферми-жидкости Ландау–Силина [18,19]. Эта теория может быть обобщена для описания сверхтекучей ферми-жидкости [17,20,21] путем введения аномальных средних.

Теория сверхтекучей бозе-жидкости также может быть построена на основе квазичастичного описания [16,17]. Рассмотрим основные положения такого построения. Неравновесное состояние сверхтекучей бозе-системы будем характеризовать конденсатными амплитудами квазичастиц

$$b_{\mathbf{p}} = \mathrm{Sp}\,\rho a_{\mathbf{p}}, \quad b^*_{\mathbf{p}} = \mathrm{Sp}\,\rho a^{\dagger}_{\mathbf{p}}, \tag{1}$$

а также следующими корреляционными функциями:

$$\begin{gathered} f^c_{\mathbf{pp}'} = f_{\mathbf{pp}'} - b^*_{\mathbf{p}'} b_{\mathbf{p}}, \quad g^c_{\mathbf{pp}'} = g_{\mathbf{pp}'} - b_{\mathbf{p}'} b_{\mathbf{p}}, \\ g^{c\dagger}_{\mathbf{pp}'} = g^{\dagger}_{\mathbf{pp}'} - b^*_{\mathbf{p}'} b^*_{\mathbf{p}}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $f_{\mathbf{pp}'}$, $g_{\mathbf{pp}'}$, $g^{\dagger}_{\mathbf{pp}'}$ — соответственно нормальная и аномальные одночастичные матрицы плотности:

$$f_{\mathbf{pp}'} = \mathrm{Sp}\,\rho a^{\dagger}_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}, \quad g_{\mathbf{pp}'} = \mathrm{Sp}\,\rho a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}, \quad g^{\dagger}_{\mathbf{pp}'} = \mathrm{Sp}\,\rho a^{\dagger}_{\mathbf{p}'} a^{\dagger}_{\mathbf{p}}. \tag{3}$$

В этих формулах $a^{\dagger}_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения квазичастицы с импульсом $\mathbf{p}$ и ρ — статистический оператор рассматриваемой системы. Конденсатные амплитуды (1) описывают обычный (одночастичный) конденсат, в то время как отличные от нуля аномальные средние (3) указывают на спаривание квазичастиц и возможное появление парного (или двухчастичного) конденсата. Такой двухчастичный конденсат аналогичен конденсату куперовских пар в теории сверхпроводимости Бардина–Купера–Шрифера–Боголюбова. Отметим, что в основу сверхтекучей компоненты бозе-жидкости значительный вклад могут давать и высшие (многочастичные) конденсаты [13,14].

Корреляционные функции и конденсатные амплитуды удобно объединить в блочную матрицу (супер-матрицу) и вектор-столбец соответственно:

$$\hat{f}^c = \begin{pmatrix} f^c & -g^c \\ g^{c\dagger} & -1-\tilde{f}^c \end{pmatrix}, \quad \hat{\psi} = \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}, \tag{4}$$

причем, как следует из определений (2), величина f^c является эрмитовой, $f^c = f^{c\dagger}$, а g^c — симметричной, $g^c = \tilde{g}^c$.

Остановимся кратко на вопросе о выборе статистического оператора в формулах (1)–(3). Поскольку взаимодействие между квазичастицами слабое, их состояние в главном приближении по взаимодействию должно описываться статистическим оператором неравновесного идеального бозе-газа ρ, который определяется квадратичной формой операторов рождения и уничтожения, а также линейными членами по $a^{\dagger}_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}$:

$$\begin{gathered} \rho = \exp(\Omega - F), \\ F = a^{\dagger} A a + \frac{1}{2}(aBa + a^{\dagger} B^* a^{\dagger}) + a^{\dagger} C + C^* a. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь Ω — термодинамический потенциал, который находится из условия нормировки $\mathrm{Sp}\,\rho = 1$, а матрицы $A_{\mathbf{pp}'}$, $B_{\mathbf{pp}'}$, $B^*_{\mathbf{pp}'}$ и векторы $C_{\mathbf{p}}$, $C^*_{\mathbf{p}'}$ определяются соответственно из соотношений (3), (1). Отметим, что выбор ρ в качестве главного приближения основан на том, что этот статистический оператор удовлетворяет принципу пространственного ослабления корреляций и для него справедливы правила Вика, т. е. предполагается, что при изучении квазичастиц можно пренебречь корреляционными эффектами. В силу соотношений (1)–(3) статистический оператор (5) является функционалом корреляционных функций и конденсатных амплитуд, $\rho = \rho(\hat{f}^c, \hat{\psi})$.

Энергия сверхтекучей бозе-системы, играющая роль гамильтониана в микроскопической теории, является функционалом $\hat{f}^c$, $\hat{\psi}$:

$$E = E(\hat{f}^c, \hat{\psi}). \tag{6}$$

Заметим, что этот функционал энергии может быть получен в результате усреднения «микроскопического» гамильтониана квазичастиц по состоянию, характеризующемуся статистическим оператором $\rho(\hat{f}^c, \hat{\psi})$:

$$E(\hat{f}^c, \hat{\psi}) = \mathrm{Sp}\,\rho(\hat{f}^c, \hat{\psi}) H(a^{\dagger}_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}).$$

Здесь $H(a^{\dagger}_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}})$ представляет собой *N*-упорядоченный гамильтониан квазичастиц в представлении вторичного квантования, который учитывает их парные, тройные и высшие взаимодействия. При переходе от истинно микроскопической теории к рассматриваемой нами полуфеноменологической теории операторы рождения и уничтожения частиц, а также константы (функции) взаимодействия должны быть заменены на операторы рождения и уничтожения квазичастиц и феноменологические константы (функции) взаимодействия. Функционал энергии (6) может быть построен из величины $E(0,\hat{\psi}) \equiv E(\hat{\psi})$, которую будем называть функционалом энергии конденсата [16,17]:

$$E(\hat{f}^c,\hat{\psi}) = RE(\hat{\psi}), \tag{7}$$

где

$$R = \exp\left(\frac{\partial}{\partial b_{\mathbf{q}}} f^c_{\mathbf{qq}'} \frac{\partial}{\partial b^*_{\mathbf{q}'}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b^*_{\mathbf{q}}} g^{c*}_{\mathbf{qq}'} \frac{\partial}{\partial b^*_{\mathbf{q}'}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b_{\mathbf{q}}} g^{c}_{\mathbf{qq}'} \frac{\partial}{\partial b_{\mathbf{q}'}}\right) \tag{8}$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование).

Энтропия изучаемой системы связана со статистическим оператором ρ известным соотношением фон-Неймана:

$$S = -\mathrm{Sp}\,\rho\ln\rho.$$

Для того, чтобы выразить энтропию через введенные выше корреляционные функции, необходимо провести диагонализацию статистического оператора (5). Такая диагонализация может быть проведена с помощью унитарного преобразования c-числового сдвига и u–v преобразования Боголюбова. В результате энтропия может быть представлена в виде [16,17]

$$S(\hat{f}^c) = -\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,\hat{f}^c \ln \hat{f}^c, \tag{9}$$

где шпур Tr берется как по суперматрице $\hat{f}^c$, так и по одночастичным состояниям. Операция взятия реальной части возникает вследствие того, что правый нижний угол суперматрицы содержит знак минус. Таким образом, согласно (9), энтропия неравновесного идеального газа квазичастиц является функционалом неравновесных корреляционных функций $f^c_{\mathbf{pp}'}$, $g^c_{\mathbf{pp}'}$ и не зависит от конденсатных амплитуд $b_{\mathbf{p}}$, $b^*_{\mathbf{p}}$. Формула (9) согласуется с выражением для неравновесной комбинаторной энтропии идеального бозе-газа [22].

Сформулируем теперь уравнения, определяющие значения корреляционных функций $f^c_{\mathbf{pp}'}$, $g^c_{\mathbf{pp}'}$ и конденсатных амплитуд $b_{\mathbf{p}}$ в состоянии статистического равновесия. Эти уравнения должны находиться из условия максимума энтропии при фиксированных значениях аддитивных интегралов движения, в качестве которых обычно берутся энергии системы $E(\hat{f}^c,\hat{\psi})$, число частиц $N(\hat{f}^c,\hat{\psi})$ и импульса системы $P_i(\hat{f}^c,\hat{\psi})$. Однако, для простоты, не будем вводить термодинамический параметр скорости, связанный с импульсом $P_i(\hat{f}^c,\hat{\psi})$. Тогда такая вариационная задача может быть сведена к задаче на отыскание безусловного минимума следующего неравновесного термодинамического потенциала:

$$\Omega(\hat{f}^c,\hat{\psi}) = -S(\hat{f}^c) + \beta\Big(E(\hat{f}^c,\hat{\psi}) - \mu N(\hat{f}^c,\hat{\psi})\Big),$$

где β, $-\beta\mu$ — множители Лагранжа, причем β — обратная температура и μ — химический потенциал. Из вариационного принципа можно найти систему уравнений для определения корреляционных функций и конденсатных амплитуд [16,17]:

$$\hat{f}^c = \left[\exp\beta(\hat{\varepsilon}-\hat{\mu})-1\right]^{-1}, \quad \hat{\eta} - \mu\hat{\psi} = 0, \tag{10}$$

где

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ -\Delta^* & -\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \mu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\eta} = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\varepsilon_{\mathbf{pp}'} = \frac{\partial E(\hat{f}^c,\hat{\psi})}{\partial f^c_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}}, \quad \Delta_{\mathbf{pp}'} = \frac{2\partial E(\hat{f}^c,\hat{\psi})}{\partial g^{c*}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}}, \quad \eta_{\mathbf{p}} = \frac{\partial E(\hat{f}^c,\hat{\psi})}{\partial b^*_{\mathbf{p}}}. \tag{12}$$

Первое из уравнений (10) имеет наглядный вид, а именно оно отражает тот факт, что суперматрица $\hat{f}^c$, построенная из корреляционных функций, имеет структуру бозевской функции распределения, если интерпретировать величину $\hat{\varepsilon}$ как оператор энергии квазичастицы. Величина $\Omega(\hat{f}^c,\hat{\psi})$, вычисленная на решениях уравнений (10), представляет собой равновесный термодинамический потенциал, причем Ω/β — термодинамический потенциал Гиббса. В заключение этого раздела заметим, что соотношения (6)–(8) позволяют выразить величины $\varepsilon_{\mathbf{pp}'}$, $\Delta_{\mathbf{pp}'}$ через производные от функционала энергии по конденсатным амплитудам:

$$\varepsilon_{\mathbf{pp}'} = \frac{\partial^2 E(\hat{f}^c,\hat{\psi})}{\partial b_{\mathbf{p}}\partial b^*_{\mathbf{p}'}}, \quad \Delta_{\mathbf{pp}'} = \frac{\partial^2 E(\hat{f}^c,\hat{\psi})}{\partial b^*_{\mathbf{p}}\partial b^*_{\mathbf{p}'}}. \tag{13}$$

3. Пространственно-однородное состояние

Уравнения (10)–(12) описывают равновесное состояние сверхтекучей бозе-системы с одночастичным и парным конденсатами, если задана ее энергия как функционал корреляционных функций и конденсатных амплитуд. Для пространственно-однородных состояний эти уравнения существенно упрощаются. Действительно, в этом случае

$$f^c_{\mathbf{pp}'} = f^c(\mathbf{p})\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}, \quad g^c_{\mathbf{pp}'} = g^c(\mathbf{p})\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'}, \quad b_{\mathbf{p}} = b_0\delta_{\mathbf{p},0}, \tag{14}$$

или, согласно (12),(13)

$$\varepsilon_{\mathbf{pp}'} = \varepsilon(\mathbf{p})\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}, \quad \Delta_{\mathbf{pp}'} = \Delta(\mathbf{p})\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'}, \tag{15}$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 E(\hat{f}^c,\hat{\psi})}{\partial b_{\mathbf{p}}\partial b^*_{\mathbf{p}}}, \quad \Delta(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 E(\hat{f}^c,\hat{\psi})}{\partial b^*_{\mathbf{p}}\partial b^*_{-\mathbf{p}}}. \tag{16}$$

Преобразуем первое из уравнений (10). С этой целью величину $\beta\hat{\xi} = \beta(\hat{\varepsilon}-\hat{\mu})$, входящую в экспоненту этого уравнения, разложим по полному набору двухрядных матриц,

$$\beta\hat{\xi} = \beta\begin{pmatrix} \xi(\mathbf{p})\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} & \Delta(\mathbf{p})\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'} \\ -\Delta^*(\mathbf{p})\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'} & -\xi(\mathbf{p})\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \end{pmatrix} = c_0\sigma_0 + c_i\sigma_i, \tag{17}$$

где $\xi(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) - \mu$, σ_i — бесшпуровые матрицы Паули, σ_0 — единичная матрица. Отметим, что матрицы Паули и единичная матрица (см. также определение величины $\hat{\mu}$) представляют собой блочные матрицы, в которых матричные элементы являются единичными операторами $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ в квантово-механическом пространстве. В результате взятия шпура от обеих частей равенства (17) находим, что коэффициент разложения c_0 обращается в нуль, $c_0 = 0$. Тогда нетрудно видеть, что

$$(c_i\sigma_i)^2 = \beta^2 E^2(\mathbf{p})\sigma_0, \quad E^2(\mathbf{p}) = \xi^2(\mathbf{p}) - \Delta(\mathbf{p})\Delta^*(\mathbf{p}). \tag{18}$$

При этом первое из уравнений (10), которое можно записать в виде

$$\hat{f}^c = n(\beta\hat{\xi}) = n(c_i\sigma_i),$$

где $n(x)$ — равновесная бозевская функция распределения, допускает следующее представление:

$$\hat{f}^c = \frac{1}{2}\{n(c_i\sigma_i) + n(-c_i\sigma_i)\}\sigma_0 + \\ + \left\{\frac{1}{2c_i\sigma_i}[n(c_i\sigma_i) - n(-c_i\sigma_i)]\right\}c_i\sigma_i.$$

Здесь выражения в фигурных скобках являются четными функциями переменной $c_i\sigma_i$ и, следовательно, в соответствии с (18) можно произвести замену $c_i\sigma_i \to \beta E(\mathbf{p})$ (либо $c_i\sigma_i \to -\beta E(\mathbf{p})$). Учитывая сказанное и используя разложение (17), в котором $c_0 = 0$, получаем

$$\hat{f}^c = \frac{1}{2}\{n(\beta E(\mathbf{p})) + n(-\beta E(\mathbf{p}))\}\sigma_0 + \\ + \frac{1}{2E(\mathbf{p})}\{n(\beta E(\mathbf{p})) - n(-\beta E(\mathbf{p}))\}\hat{\xi}.$$

Сравнивая, наконец, матричные элементы обеих сторон равенства с учетом соотношений (14), приходим к следующим выражениям для корреляционных функций:

$$f^c(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2} + \frac{\xi(\mathbf{p})}{2E(\mathbf{p})}[1 + 2n(\beta E(\mathbf{p}))],$$
$$g^c(\mathbf{p}) = -\frac{\Delta(\mathbf{p})}{2E(\mathbf{p})}[1 + 2n(\beta E(\mathbf{p}))],$$

которые можно записать в более удобном для дальнейшего рассмотрения виде:

$$f^c(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2} + \frac{\xi(\mathbf{p})}{2E(\mathbf{p})}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p})}{2}, \\ g^c(\mathbf{p}) = -\frac{\Delta(\mathbf{p})}{2E(\mathbf{p})}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p})}{2}, \tag{19}$$

где

$$\xi(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) - \mu, \quad E(\mathbf{p}) = \sqrt{\xi^2(\mathbf{p}) - |\Delta(\mathbf{p})|^2} \tag{20}$$

и $\varepsilon(\mathbf{p})$, $\Delta(\mathbf{p})$ определяются функционалом энергии в соответствии с соотношениями (16). Таким образом, в пространственно-однородном случае первое из уравнений (10) эквивалентно уравнениям (19), (20), в то время как второе уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial E(\hat{f}^c, \hat{\psi})}{\partial b_0^*} - \mu b_0 = 0. \tag{21}$$

При заданном функционале энергии $E(\hat{f}^c, \hat{\psi})$, т. е. при известных значениях $\xi(\mathbf{p})$ и $\Delta(\mathbf{p})$, уравнения (19)–(21) полностью описывают пространственно-однородное состояние сверхтекучей бозе-системы при наличии одночастичного и парного конденсатов. Величины b_0 и $\Delta(\mathbf{p})$ представляют собой параметры порядка, связанные с одночастичным и парным конденсатами соответственно, а $E(\mathbf{p})$ — энергия квазичастицы. В следующем разделе для конкретного функционала энергии найдем уравнения, которым удовлетворяют величины $\xi(\mathbf{p})$, $\Delta(\mathbf{p})$, b_0, и проанализируем возможные их решения.

4. Анализ уравнений самосогласования

Для дальнейшего исследования полученных уравнений необходимо сделать конкретные предположения относительно структуры функционала энергии $E(\hat{f}^c, \hat{\psi})$. В соответствии с формулами (7), (8) этот функционал может быть построен из функционала энергии, зависящего только от конденсатных амплитуд. Тогда, согласно теории слабо неидеального бозе-газа, определим энергию конденсата $E(\hat{\psi}) \equiv E(b, b^*)$ следующим гамильтонианом:

$$E(\hat{\psi}) = \sum_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^* b_{\mathbf{p}} + \\ + \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_4} \nu(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) b_{\mathbf{p}_1}^* b_{\mathbf{p}_2}^* b_{\mathbf{p}_3} b_{\mathbf{p}_4} \delta_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4}, \tag{22}$$

где $\omega_{\mathbf{p}} = p^2/2m$ и V — объем системы. Используя выражения (7), (8), можем найти энергию $E(\hat{f}^c, \hat{\psi})$ в линейном приближении по корреляционным функциям:

$$E(\hat{f}^c, \hat{\psi}) = E(\hat{\psi}) + \omega_q f^c_{\mathbf{qq}'} \delta_{\mathbf{qq}'} +$$

$$+\frac{1}{V} f^c_{\mathbf{qq}'} \sum_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2} \left[\nu(\mathbf{q}'-\mathbf{q}) + \nu(\mathbf{q}'-\mathbf{p}_2)\right] b^*_{\mathbf{p}_1} b_{\mathbf{p}_2} \delta_{\mathbf{q}'+\mathbf{p}_1;\mathbf{q}+\mathbf{p}_2} +$$

$$+\frac{1}{2V} g^{c*}_{\mathbf{qq}'} \sum_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2} \nu(\mathbf{q}'-\mathbf{p}_1) b_{\mathbf{p}_1} b_{\mathbf{p}_2} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2} +$$

$$+\frac{1}{2V} g^{c}_{\mathbf{qq}'} \sum_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2} \nu(\mathbf{q}'-\mathbf{p}_1) b^*_{\mathbf{p}_1} b^*_{\mathbf{p}_2} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2},$$

где, как и в (8), предполагается суммирование по $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$. Зная функционал энергии, легко найти уравнения, которым удовлетворяют величины $\xi(\mathbf{p})$, $\Delta(\mathbf{p})$ и конденсатные амплитуды b_0. Напомним, что $\xi(\mathbf{p})$ и $\Delta(\mathbf{p})$ определяют корреляционные функции (19).

Вычисляя производную $\partial E(\hat{f}^c, \hat{\psi}) / \partial b_0^*$ и используя соотношения (14), выражающие условие пространственной однородности системы, находим, что уравнение (21) для определения конденсатных амплитуд принимает вид

$$b_0[n_0\nu(0) - \mu] + \frac{b_0}{V}\sum_{\mathbf{p}} f^c(\mathbf{p})[\nu(0) + \nu(\mathbf{p})] +$$

$$+\frac{b_0^*}{V}\sum_{\mathbf{p}} g^c(\mathbf{p})\nu(\mathbf{p}) = 0, \qquad (23)$$

где $n_0 = b_0^* b_0 / V$ — плотность частиц в конденсате. Аналогичным образом, учитывая выражения (16), получаем уравнения для $\varepsilon(\mathbf{p})$ и $\Delta(\mathbf{p})$:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \omega_{\mathbf{p}} + n_0[\nu(0) + \nu(\mathbf{p})] + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}'} f^c(\mathbf{p}')[\nu(0) + \nu(\mathbf{p}'-\mathbf{p})], \qquad (24)$$

$$\Delta(\mathbf{p}) = \frac{1}{V}\nu(\mathbf{p}) b_0^2 + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}'} g^c(\mathbf{p}')\nu(\mathbf{p}+\mathbf{p}'). \qquad (25)$$

Исключим корреляционные функции $f^c(\mathbf{p})$, $g^c(\mathbf{p})$ в уравнениях (23)–(25) с помощью соотношений (19). Кроме того, заметим, что, поскольку полученные таким образом уравнения инвариантны относительно следующих преобразований: $b_0 \to b_0' = b_0 e^{i\varphi}$, , $\xi(\mathbf{p}) \to \xi'(\mathbf{p}) = \xi(\mathbf{p})$, $\Delta(\mathbf{p}) \to \Delta'(\mathbf{p}) = \Delta(\mathbf{p}) e^{2i\varphi}$ (φ — произвольная вещественная величина), не ограничивая общности, в силу выбора фазы, b_0 может рассматриваться как вещественная величина. В результате имеем

$$b_0\left(2n_0\nu(0) - \xi(0) - \Delta(0)\right) = 0,$$

$$\xi(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} - \mu + n_0[\nu(0) + \nu(\mathbf{p})] - \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{p}'}[\nu(0) +$$

$$+\nu(\mathbf{p}'-\mathbf{p})]\left(1 - \frac{\xi(\mathbf{p}')}{E(\mathbf{p}')}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p}')}{2}\right),$$

$$\Delta(\mathbf{p}) = n_0\nu(\mathbf{p}) - \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{p}'}\nu(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\frac{\Delta(\mathbf{p}')}{E(\mathbf{p}')}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p}')}{2}, \qquad (26)$$

где энергия квазичастицы $E(\mathbf{p})$ дается второй из формул (20). Согласно первому из выписанных уравнений, $\triangle_0$ — вещественная величина. Уравнения (26) вместе с определением $E(\mathbf{p})$ представляют собой замкнутую систему уравнений для нахождения параметров порядка одночастичного b_0 и парного $\Delta(\mathbf{p})$ конденсатов, а также величины $\xi(\mathbf{p})$. Эти уравнения могут быть получены в рамках теории первого приближения, в которой гарантируются главные асимптотические результаты в предельном случае бесконечно малого взаимодействия [23].

4.1. Теория Боголюбова

Как частный случай найденных уравнений рассмотрим модель слабо неидеального бозе-газа Боголюбова [1], которая предполагает существование одночастичного конденсата ($b_0 \neq 0$). С этой целью в формулах (26) пренебрежем членами, пропорциональными взаимодействию $\nu(\mathbf{p})$, оставив при этом члены типа $n_0\nu(\mathbf{p})$. В результате получаем следующие уравнения:

$$2n_0\nu(0) - \xi(0) - \Delta(0) = 0,$$

$$\xi(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} - \mu + n_0[\nu(0) + \nu(\mathbf{p})],$$

$$\Delta(\mathbf{p}) = n_0\nu(\mathbf{p}),$$

из которых сразу же следует известное соотношение

$$\mu = n_0\nu(0), \qquad (27)$$

выражающее связь между плотностью конденсата и химическим потенциалом (уравнение состояния), а также выражение для спектра квазичастиц

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + \frac{p^2}{m} n_0\nu(\mathbf{p})}. \qquad (28)$$

Условие вещественности данного спектра во всем интервале импульса приводит к условию $\nu(\mathbf{p}) > 0$, отражающему тот факт, что силы отталкивания между частицами должны преобладать над силами притяжения. Легко видеть, что корреляционные функции (19) в этом случае приобретают вид

$$f^c(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2} + \frac{(p^2/2m) + n_0\nu(\mathbf{p})}{2E(\mathbf{p})}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p})}{2},$$

$$g^c(\mathbf{p}) = -\frac{n_0\nu(\mathbf{p})}{2E(\mathbf{p})}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p})}{2}. \qquad (29)$$

Формулы (27)–(29) впервые были получены Боголюбовым [1] и корректно описывают фазу, связанную с явлением бозе-эйнштейновской конденсации в слабо неидеальном газе, если выполняется необходимое условие устойчивости $\nu(\mathbf{p}) > 0$. При равном нулю взаимодействии эти формулы описывают явление бозе-конденсации в идеальном газе с химическим потенциалом $\mu = 0$:

$$f^c(\mathbf{p}) = [\exp(\beta(p^2/2m)) - 1]^{-1}, \quad g^c(\mathbf{p}) = 0.$$

4.2. Парный и одночастичный конденсаты

Рассмотрим более детально систему уравнений (26). Предположим, что взаимодействие между квазичастицами является точечным, $\nu(\mathbf{p}) = \text{const} = \nu$. Тогда эти уравнения допускают два типа решений.

Первый тип решений, с $b_0 = 0$, соответствует парному конденсату, который описывается уравнениями вида

$$\xi(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} - \mu - \frac{\nu}{V}\sum_{\mathbf{p}'}\left[1 - \frac{\xi(\mathbf{p}')}{E(\mathbf{p}')}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p}')}{2}\right],$$

$$\Delta\left[1 + \frac{\nu}{2V}\sum_{\mathbf{p}'}\frac{1}{E(\mathbf{p}')}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p}')}{2}\right] = 0, \qquad (30)$$

где Δ — константа, не зависящая от импульса $\mathbf{p}$.

Второй тип решений, с отличными от нуля конденсатными амплитудами ($b_0 \neq 0$), описывает фазу с одночастичным конденсатом. Система уравнений (26) в этом случае может быть записана в виде

$$\Delta - \mu = \frac{\nu}{V}\sum_{\mathbf{p}'}\left[1 - \frac{\xi(\mathbf{p}')}{E(\mathbf{p}')}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p}')}{2}\right],$$

$$\xi(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} - \mu + 2n_0\nu - \frac{\nu}{V}\sum_{\mathbf{p}'}\left[1 - \frac{\xi(\mathbf{p}')}{E(\mathbf{p}')}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p}')}{2}\right],$$

$$\Delta\left[1 + \frac{\nu}{2V}\sum_{\mathbf{p}'}\frac{1}{E(\mathbf{p}')}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p}')}{2}\right] = n_0\nu. \qquad (31)$$

Здесь и в (30) энергия квазичастицы $E(\mathbf{p})$ определяется второй из формул (20).

Обратимся вначале к уравнениям (30). В случае, когда в системе действуют силы отталкивания ($\nu > 0$), второе из уравнений (30) имеет лишь тривиальное решение $\Delta = 0$. Это решение соответствует нормальному состоянию с учетом поправок по взаимодействию к одночастичной функции распределения. Если же в системе превалируют силы притяжения над силами отталкивания ($\nu < 0$), то система уравнений (30) имеет как тривиальное решение, соответствующее нормальному состоянию, так и нетривиальное решение с $\Delta \neq 0$. Для изучения нетривиального решения будем считать взаимодействие слабым и пренебрежем в величине $\xi(\mathbf{p})$ членом, пропорциональным взаимодействию. В результате имеем

$$1 + \frac{\nu}{2V}\sum_{\mathbf{p}'}\frac{1}{E(\mathbf{p}')}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p}')}{2} = 0, \quad \nu < 0, \qquad (32)$$

где, согласно (20),

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)^2 - |\Delta|^2}. \qquad (33)$$

Уравнение (32) вместе с выражением (33) представляет собой уравнение для определения параметра порядка Δ и по своей структуре находится в соответствии с уравнением для щели в теории сверхпроводимости Бардина–Купера–Шриффера–Боголюбова.

Вернемся теперь к уравнениям (31), которые описывают фазу с одночастичным конденсатом. При $\nu > 0$ эти уравнения могут быть сведены в случае слабо неидеального газа к результатам (27)–(29) теории Боголюбова [1]. В случае, когда в системе действуют силы межчастичного притяжения, пренебрежем в первых двух уравнениях членами, пропорциональными взаимодействию. В результате получаем уравнение [7,24]

$$\mu\left[1 + \frac{\nu}{2V}\sum_{\mathbf{p}'}\frac{1}{E(\mathbf{p}')}\operatorname{cth}\frac{\beta E(\mathbf{p}')}{2}\right] = n_0\nu, \quad \nu < 0, \qquad (34)$$

где

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)^2 - |\Delta|^2}, \quad \Delta = \mu, \qquad (35)$$

которое служит для нахождения n_0 как функции термодинамических переменных.

Для дальнейшего анализа уравнений (32)–(35) перейдем от суммирования к интегрированию. В результате такого перехода будут возникать интегралы по импульсу p, расходящиеся на верхнем пределе. Такие расходимости будем обрезать величиной $p_0 \sim 1/r_0$, где r_0 — расстояние порядка межатомного. Учитывая сказанное и вводя вместо p новую переменную интегрирования t согласно формуле

$$p^2 = 2m\mu(1-t) = -2m\mu(t-1), \quad \mu < 0,$$

находим, что уравнение (32) для парного конденсата имеет вид

$$\int_1^{t_0} dt\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t^2-y^2}}\operatorname{cth} x\sqrt{t^2-y^2} = \frac{1}{g}, \qquad (36)$$

где

$$t_0 = 1 - \frac{p_0^2}{2m\mu} > 0, \quad g = -\frac{m\sqrt{-2m\mu}}{4\pi^2}\nu > 0$$

и $y^2 = \Delta^2/\mu^2$, $x = -(1/2)\beta\mu$. Уравнение (34), описывающее одночастичный конденсат, также записывается через выписанный выше интеграл, в котором параметр $y = 1$:

$$n_0 = \frac{\mu}{\nu}\left[1 - g\int_1^{t_0} dt \frac{1}{\sqrt{t+1}} \operatorname{cth} x\sqrt{t^2-1}\right], \quad \mu, \nu < 0. \tag{37}$$

Определим теперь функцию $q(x, y)$ формулой

$$q(x, y) = \int_1^{t_0} dt \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t^2-y^2}} \operatorname{cth} x\sqrt{t^2-y^2}, \quad x > 0, \quad 0 < y < 1.$$

Легко видеть, что эта функция обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial q(x,y)}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial q(x,y)}{\partial y} > 0$$

и

$$\lim_{x\to\infty} q(x,1) = \int_1^{t_0} dt \frac{1}{\sqrt{t+1}} = h_1,$$

$$\lim_{x\to\infty} q(x,0) = \int_1^{t_0} dt \frac{\sqrt{t-1}}{t} = h_0 < h_1.$$

На рис. 1 изображена функция $q(x, y)$ по переменной *x*. С учетом определения $q(x, y)$ уравнения (36), (37), описывающие соответственно парный и одночастичный конденсаты, принимают вид

$$q(x, y) = \frac{1}{g}, \quad n_0 = \frac{\mu}{\nu}[1 - gq(x,1)]. \tag{38}$$

Обратимся вначале к первому из уравнений (38) для парного конденсата. Определим, при каких температурах $T = 1/\beta = -\mu/2x$ $(\mu < 0)$ данное уравнение имеет решение. Для этого переменную μ будем считать фиксированной. Как легко видеть на рис. 1, при $1/g > h_1$ решение указанного уравнения существует в интервале температур $T_1 < T < T_0$, где T_0, T_1 определяются из уравнений

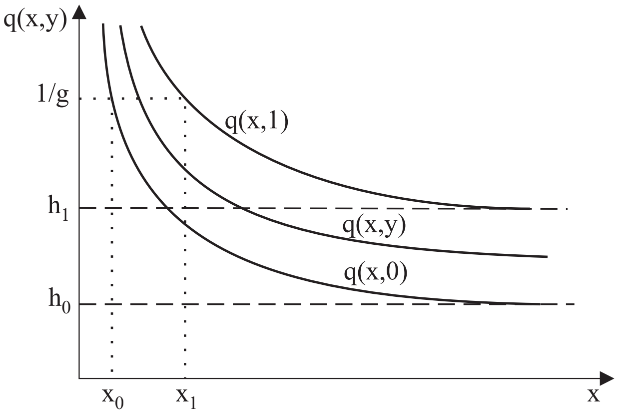

Рис. 1. Схематический вид функции $q(x, y)$, определяющей решение уравнения (38).

$$q(x_0, 0) = \frac{1}{g}, \quad q(x_1, 1) = \frac{1}{g}. \tag{39}$$

Если же $h_0 < 1/g < h_1$, то уравнение имеет решение при температурах $T < T_0$, где T_0 по-прежнему находится из первого уравнения в (39). Очевидно, что при $1/g < h_0$ уравнение, описывающее парный конденсат, не имеет решений.

Рассмотрим теперь второе из уравнений (38), которое описывает одночастичный конденсат. Поскольку $n_0 > 0$ и $\mu < 0$, $\nu < 0$, необходимым условием для существования решений является неравенство

$$q(x,1) < \frac{1}{g}.$$

Как видно на рисунке, это неравенство выполняется при температурах $T < T_1$, где T_1 находится из второго уравнения в (39).

Таким образом, в зависимости от величины g, пропорциональной межчастичному взаимодействию, возможны три различных сценария поведения сверхтекучей бозе-системы со слабым взаимодействием. Если $1/g > h_1$ (слабое взаимодействие), то с понижением температуры при $T = T_0$ имеем дело с фазовым переходом из нормального состояния в состояние с парным бозе-конденсатом, причем дальнейшее понижение температуры приводит при $T = T_1$ ко второму фазовому переходу, в состояние с одночастичным бозе-конденсатом [24]. Если же $h_0 < 1/g < h_1$ (умеренно слабое взаимодействие), то с понижением температуры при $T = T_0$ имеет место фазовый переход из нормального состояния в состояние с парным конденсатом. Наконец, при $1/g < h_0$ («сильное» взаимодействие) нормальное состояние существует во всей области температур.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена схема построения теории сверхтекучей бозе-системы на основе квазичастичного описания и вариационного принципа для введенной энтропии. Такая энтропия представляет собой энтропию идеального газа, которая модифицирована корреляционными эффектами низшего порядка, связанными с аномальными средними. Полученные уравнения для равновесных значений конденсатных амплитуд, а также нормальной и аномальных корреляционных функций проанализированы в случае слабого взаимодействия, как для сил отталкивания, так и для сил притяжения. В случае сил отталкивания эти уравнения воспроизводят результаты теории Боголюбова слабо неидеального бозе-газа. В случае же сил притяжения уравнения допускают решения, соответствующие парному и одночастичному конденсатам. Представляет интерес вычисление термодинамического потенциала для анализа условий устойчивости полученных решений.

Кроме того, в связи с многочисленными экспериментами по наблюдению бозе-эйнштейновского конденсата в магнитных ловушках актуальным является учет спина бозе-частиц и изучение влияния магнитного поля на поведение системы. Эти вопросы находятся в сфере настоящих интересов авторов.

1. N.N. Bogolyubov, *J. Phys. USSR* **11**, 23 (1947).
2. С.Т. Беляев, *ЖЭТФ* **34**, 417 (1958).
3. N.M. Hugenholtz and D. Pines, *Phys. Rev.* **116**, 489 (1959).
4. Н.Н. Боголюбов, *Квазисредние в задачах статистической механики*, Препринт Д-781, ОИЯИ, Дубна (1961).
5. N.N. Bogolyubov, *Lectures on Quantum Statistics*, V. II, Gordon and Breach, New York (1970).
6. Н.Н. Боголюбов (мл.), М.Ю. Ковалевский, А.М. Курбатов, С.В. Пелетминский, А.Н. Тарасов, *УФН* **159**, 585 (1989).
7. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов*, Физматлит, Москва (2006).
8. J.G. Valatin and D. Butler, *Nuovo Cimento* **10**, 37 (1958).
9. M. Gerardeau and R. Arnowitt, *Phys. Rev.* **113**, 755 (1959).
10. A. Coniglio and M. Marinaro, *Nuovo Cimento* **B48**, 249 (1967).
11. W.A.B. Evans and Y. Imry, *Nuovo Cimento* **B63**, 155 (1969).
12. П.С. Кондратенко, *ТМФ* **22**, 278 (1975).
13. С.И. Шевченко, *ФНТ* **11**, 339 (1985) [*Sov. J. Low Temp. Phys*. **11**, 183 (1985)].
14. Ю.А. Непомнящий, Э.А. Пашицкий, *ЖЭТФ* **98**, 178 (1990).
15. Э.А. Пашицкий, *ФНТ* **25**, 115 (1999) [*Low Temp. Phys*. 25, 81 (1999)].
16. В.В. Красильников, С.В. Пелетминский, *Физика элементарных частиц и атомного ядра* **24**, 463 (1993).
17. A.I. Akhiezer, V.V. Krasil’nikov, S.V. Peletminskii, and A.A. Yatsenko, *Phys. Rep*. **245**, 1 (1994).
18. Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **30**, 1058 (1956).
19. В.П. Силин, *ЖЭТФ* **33**, 495 (1957).
20. V.V. Krasil'nikov, S.V. Peletminskii, and A.A. Yatsenko, *Physica* **A162**, 513 (1990).
21. А.И. Ахиезер, В.В. Красильников, С.В. Пелетминский, А.А. Яценко, *УФН* **163**, 1 (1993).
22. A.I. Akhiezer and S.V. Peletminskii, *Methods of Statistical Physics*, Pergamon Press, Oxford (1981).
23. В.В. Толмачев, *Теория бозе-газа*, Изд-во Московского университета, Москва (1969).
24. H.T.C. Stoof, *Phys. Rev.* **A49**, 3824 (1994).

Quasiparticle theory of superfluid Bose systems with single-particle and pair condensates

A.S. Peletminskii and S.V. Peletminskii

A semi-phenomenological theory of superfluid Bose systems is considered on the basis of quasiparticle description. This theory enables to describe, from the unified point of view, single-particle and pair condensates both for repulsive and attractive forces. The equations for the order parameters describing these condensates are analyzed in the limit of weak interaction.

PACS: **67.10.–j** Quantum fluids: general properties;
67.10.Fj Quantum statistical theory;
67.25.D– Superfluid phase of ^{4}He;
67.85.Jk Other Bose–Einstein condensation phenomena.

Keywords: superfluidity, Bose liquid, single-particle Bose condensate, pair condensate, weakly interacting Bose gas.