

Трехмерные вихревые статические солитоны в несоизмеримых магнитных кристаллах

А.Б. Борисов, Ф.Н. Рыбаков

Институт физики металлов УрО РАН, г. Екатеринбург, 620990, Россия

E-mail: F.N.Rybakov@gmail.com

Статья поступила в редакцию 29 декабря 2009 г., после переработки 4 марта 2010 г.

Предсказан новый тип трехмерных магнитных солитонов в легкоосном ферромагнетике при одновременном учете взаимодействия Дзялошинского–Мория и внешнего магнитного поля. Полученные численным методом статические трехмерные солитоны с конечной энергией характеризуются топологическим индексом Хопфа $H = 0$ и имеют вихревую структуру. Определена структура таких солитонов и зависимость энергии от внешнего магнитного поля. Исследовано асимптотическое поведение найденных солитонов и получено необходимое условие существования.

Предбачено новий тип тривимірних магнітних солітонів у легкоосному ферромагнетикі при одночасному врахуванні взаємодії Дзялошинського–Морія та зовнішнього магнітного поля. Отримані чисельним методом статичні тривимірні солітони з кінцевою енергією характеризуються топологічним індексом Хопфа $H = 0$ і мають вихрову структуру. Визначено структуру таких солітонів і залежність енергії від зовнішнього магнітного поля. Досліджено асимптотичну поведінку знайдених солітонів і отримано необхідну умову існування.

PACS: 05.45.Yv Солитоны;
75.10.Nk Классические спиновые модели;
75.60.Ch Доменные стенки и доменные структуры;
11.27.+d Протяженные классические решения.

Ключевые слова: солитон, инвариант Хопфа, вихрь, уравнение Ландау–Лифшица, взаимодействие Дзялошинского–Мория.

1. Введение

К настоящему времени известно большое количество магнитоупорядоченных кристаллов без центра инверсии, в которых обменно-релятивистское взаимодействие приводит к формированию длиннопериодических магнитных структур, периоды которых несоизмеримы с кристаллохимическими периодами [1,2]. В энергии системы обменное релятивистское взаимодействие описывается слагаемыми, линейными по первым производным намагниченности (инвариантами Лифшица). На возможность их ключевой роли в формировании геликоидальных магнитных структур впервые было указано в работе [3]. Аналитические решения, полученные в работах [4,5], показывают, что при определенных значениях константы Дзялошинского в системе могут существовать модулированные структуры с несоизмеримым периодом. В работах [6,7] показано, что при двумерном обобщении модели Дзялошинского

(2D sine-Gordon) могут существовать двумерные вихри на фоне несоизмеримой структуры в магнетиках с анизотропией типа «легкая плоскость». Как показано в работах [8,9], в магнитоупорядоченных кристаллах с анизотропией типа «легкая ось» в определенном диапазоне внешних магнитных полей могут реализовываться двумерные магнитные вихри. В зависимости от параметров ферромагнитной среды и внешнего магнитного поля могут возникать как неустойчивые, так и устойчивые вихревые состояния с конечной энергией [10,11]. К настоящему времени структура трехмерных солитонов и область их существования в этих магнетиках не изучена.

Известно, что уравнение Ландау–Лифшица без диссипации

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}], \quad \mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta E}{\delta \mathbf{M}}, \quad \gamma > 0, \quad (1)$$

допускает решения в виде трехмерных прецессионных солитонов стационарного профиля в следующих случаях. Если энергия E ферромагнетика включает в себя только обменную энергию

$$E_{\text{exch}} = \left(\frac{\alpha}{2}\right) \int (\partial_i \mathbf{M})^2 d\mathbf{r}, \quad (2)$$

т.е. ферромагнетик изотропный, то, согласно [12], возможно существование нестационарных солитонов, равномерно движущихся вдоль оси анизотропии с ненулевой скоростью. При этом, однако, энергия пропорциональна линейному размеру солитона и вопрос устойчивости к схлопыванию стоит особенно остро. Кроме того, не вполне правомерно пренебрежение энергией магнитных дипольных взаимодействий, ведь размагничивающие поля могут способствовать схлопыванию солитона.

Если же энергия E ферромагнетика включает в себя не только обменную энергию E_{exch} , но и энергию одноосной магнитной анизотропии

$$E_{\text{anis}} = \left(\frac{\beta}{2}\right) \int (M_x^2 + M_y^2) d\mathbf{r}, \quad \beta > 0, \quad (3)$$

то возникают солитоны иной структуры, как равномерно движущиеся [13,14], так и стационарные [15–18]. Линейные размеры таких солитонов уже не определяются величиной произвольного параметра, а зависят от характерной магнитной длины $l_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$. Вклад энергии магнитных дипольных взаимодействий здесь действительно несуществен, когда магнитной среде отвечает высокое значение фактора качества $Q = \beta/(4\pi)$.

Тем не менее во всех рассмотренных выше случаях речь идет о динамических солитонах, т.е. в случае, когда и частота прецессии $\omega = 0$, и скорость $V = 0$, существование солитона становится невозможным. Это обстоятельство серьезно препятствует экспериментальным исследованиям. Реальная ферромагнитная среда всегда диссипативная и время жизни динамического солитона может оказаться очень малым. Чтобы замедлить или вовсе остановить диссипацию солитонов, необходимо производить специальное внешнее воздействие на среду. Кроме того, необходимым условием наблюдения солитонов остается разработка механизма быстрой генерации, чтобы среднее время жизни солитона было больше времени его формирования [16].

Существование статических трехмерных солитонов во всех описанных выше моделях ферромагнетика невозможно, как непосредственно следует из теоремы Хобарта–Деррика [19,20], также известной как теорема вириала [21].

Во многих кубических ферромагнетиках без центра инверсии существенный вклад в энергию вносит взаимодействие Дзялошинского–Мория [22–24]:

$$E_{DM} = D \int \mathbf{M} \cdot [\nabla \times \mathbf{M}] d\mathbf{r}, \quad (4)$$

где D — константа Дзялошинского. Тогда суммарная энергия ферромагнетика

$$E = E_{\text{exch}} + E_{\text{anis}} + E_{DM} + E_H, \quad (5)$$

где E_H — энергия во внешнем магнитном поле напряженности $\mathbf{H}_0^{(e)} = (0, 0, H_0)$ относительно основного состояния намагниченности $\mathbf{M}_{\text{inf}} = (0, 0, M_0)$:

$$E_H = H_0 \int (M_0 - M_z) d\mathbf{r}. \quad (6)$$

Оказывается [25], что в трехмерном случае функционал (5) не попадает под запрет теоремы Хобарта–Деррика, и вопрос о существовании локализованных состояний остается открытым. При этом необходимым условием является $E_{DM} < 0$ [26].

Цель работы — исследовать статические трехмерные солитоны в модели (5). Статья спланирована следующим образом. Структура солитонов, их устойчивость и зависимость их энергии от магнитного поля обсуждается во втором разделе. В разд. 3 исследуется асимптотика найденных решений. В четвертом разделе проведен топологический анализ найденных солитонов.

2. Трехмерные статические вихревые солитоны

Разумно предположить, что трехмерные солитоны, подобно плоским вихрям, могут являться как стабильными, так и нестабильными состояниями. Последние уже невозможно найти прямыми методами безусловной минимизации функционала энергии. Чтобы обойти это ограничение, будем искать решение вспомогательной вариационной задачи — минимизации функционала

$$F = E_{\text{exch}} + E_{\text{anis}} + E_{DM} \quad (7)$$

при фиксированном значении интеграла

$$\mathcal{N} = \int (M_0 - M_z) d\mathbf{r}. \quad (8)$$

Параметризуем вектор намагниченности \mathbf{M} через угловые переменные Θ и Φ :

$$\mathbf{M} = M_0 \mathbf{m} = M_0 (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta). \quad (9)$$

В присутствии (4) плотность энергии ферромагнетика инвариантна относительно одновременных пространственных поворотов на произвольный угол ε и пространственных координат, и вектора намагниченности:

$$\varphi \rightarrow \varphi + \varepsilon, \quad \Phi \rightarrow \Phi + \varepsilon, \quad (10)$$

где φ — полярный угол цилиндрической системы координат (r, φ, z) . Таким образом, будем исследовать солитоны с аксиально симметричным распределением полярного угла намагниченности и вихревой структурой азимутального угла

$$\Theta = \theta(r, z), \quad \Phi = \varphi + \phi(r, z) \quad (11)$$

с граничными условиями на бесконечности

$$\theta \rightarrow 0 \quad (|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) \quad (12)$$

и симметриями

$$\theta(r, -z) = \theta(r, z), \quad \phi(r, -z) = \pi - \phi(r, z). \quad (13)$$

Граничные условия на оси симметрии заранее не накладываются, а выявляются в результате численной процедуры.

Функции Φ и Θ являются решением поставленной вариационной задачи и одновременно экстремалами функционала энергии (5) для определенного значения H_0 . Фактически задача состоит в нахождении функций $\phi(r, z)$ и $\theta(r, z)$, задающих единичное векторное поле на полуплоскости:

$$\mathbf{n}(r, z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (14)$$

Для расчета соответствующей экстремали функционала энергии величины H_0 воспользуемся необходимым условием экстремума:

$$\frac{d}{d\lambda} E(\mathbf{m}(\mathbf{r} + \lambda \mathbf{r}))|_{\lambda=0} = 0, \quad (15)$$

откуда непосредственно найдем

$$H_0 = \frac{-2E_{DM} - E_{\text{exch}} - 3E_{\text{anis}}}{3\mathcal{N}}. \quad (16)$$

Вариационная задача решалась тем же численным методом условной минимизации, что и в работе [18]. Пробная конфигурация поля задавалась теми же функциями, что и в работе [14] для определения структуры движущихся магнетонных капель. Для проверки найденных конфигураций по формуле (16) рассчитывалась соответствующая напряженность внешнего магнитного поля H_0 , в узлах сетки рассчитывались значения параметризующих углов $\phi(r, z)$ и $\theta(r, z)$, их пространственные производные первого и второго порядков. После этого непосредственно вычислялась невязка уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала энергии (5):

$$\begin{aligned} & -\frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{l_0^2} + (\partial_r \phi)^2 + (\partial_z \phi)^2 \right) + \\ & + \frac{4\chi}{\pi l_0} \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \partial_z \phi + (\sin \theta)^2 \left(\cos \phi \partial_r \phi + \frac{\sin \phi}{r} \right) \right) + \\ & + \Delta_2 \theta - \frac{h}{l_0^2} \sin \theta = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{4\chi}{\pi l_0} (\cos \theta \partial_z \theta + \cos \phi \sin \theta \partial_r \theta) + \\ & + 2\cos \theta (\partial_r \theta \partial_r \phi + \partial_z \theta \partial_z \phi) + \sin \theta \Delta_2 \phi = 0, \quad (18) \end{aligned}$$

где дифференциальный оператор

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (19)$$

а безразмерные параметры

$$\chi = \frac{\pi D}{2\sqrt{\alpha\beta}}, \quad h = \frac{H_0}{\beta M_0}, \quad (20)$$

как в работе [11].

При вычислениях описанным методом всякий раз необходимо задавать значение интеграла (8) и параметра χ . И только если расчет приводит к положительному результату (к солитонному решению), можно вычислить соответствующее значение параметра h . Кроме того, если минимизация функционала не приводит к солитонному решению, это еще не означает отсутствие последнего. Такая ситуация может возникать, например, из-за неподходящего размера области моделирования (солитон слишком большой). В свете изложенного на рис. 1 построены только точки, отвечающие положительным результатам численного счета.

На рис. 2 в полуплоскости (r, z) построены линии постоянного значения угла θ типичного солитона для двух значений внешнего магнитного поля. В трехмерном пространстве постоянному значению угла Θ соответствует один или несколько тороидов со сложной образующей.

Профиль солитона $\theta(r, z)$ при $z = 0$, приведенный на рис. 3, показывает, что характерный размер исследованных локализованных структур порядка $10l_0$.

На рис. 4 приведена зависимость энергии солитона от внешнего магнитного поля. При увеличении напряженности растет и энергия. Как следует из графиков, для возбуждения солитона прежней энергии в материале с большим значением параметра D необходимо увеличить напряженность внешнего магнитного поля H_0 .

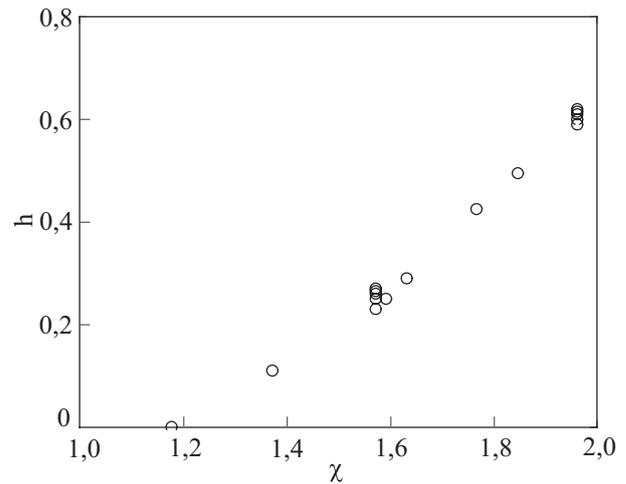


Рис. 1. $\chi - h$ -диаграмма результатов численного счета. Каждой отмеченной точке соответствует удачный расчетный цикл, т.е. установлено существование солитона, определена его структура.

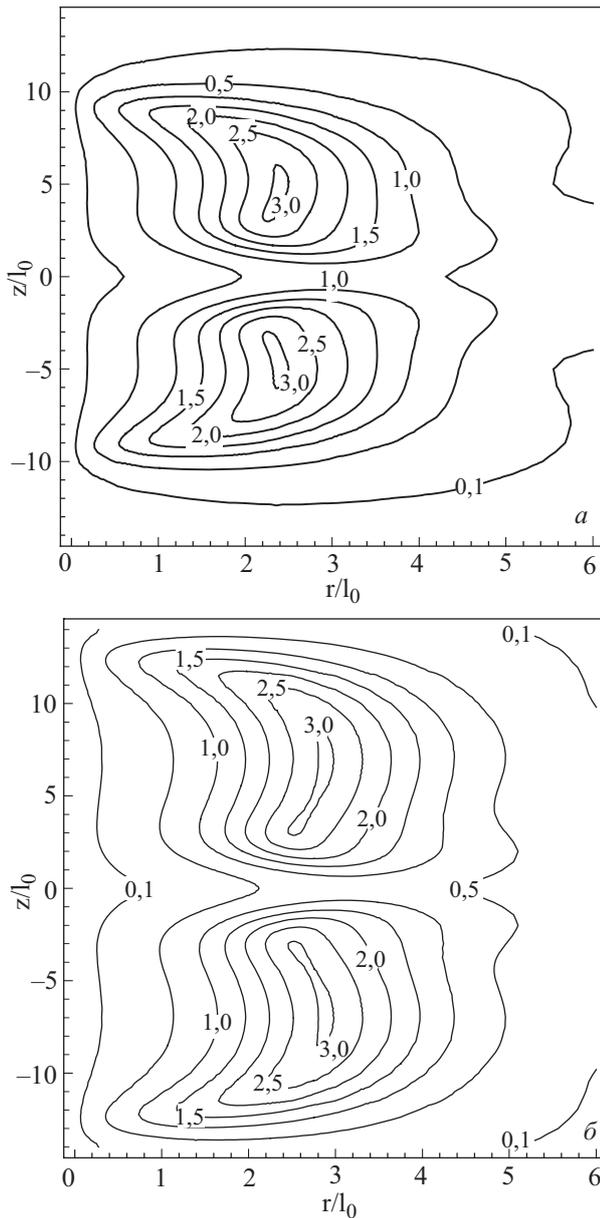


Рис. 2. Линии постоянного значения угла θ конфигурации солитона для двух значений параметра h при постоянном значении параметра $\chi = 1,96$: $h = 0,60$ (а), $h = 0,62$ (б).

Как оказалось, все найденные солитоны устойчивы по отношению к масштабным возмущениям:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} E(\mathbf{m}(\mathbf{r} + \lambda \mathbf{r}))|_{\lambda=0} > 0, \quad (21)$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} E(\mathbf{m}(x + \lambda x, y, z))|_{\lambda=0} > 0, \quad (22)$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} E(\mathbf{m}(r, \varphi, z + \lambda z))|_{\lambda=0} > 0, \quad (23)$$

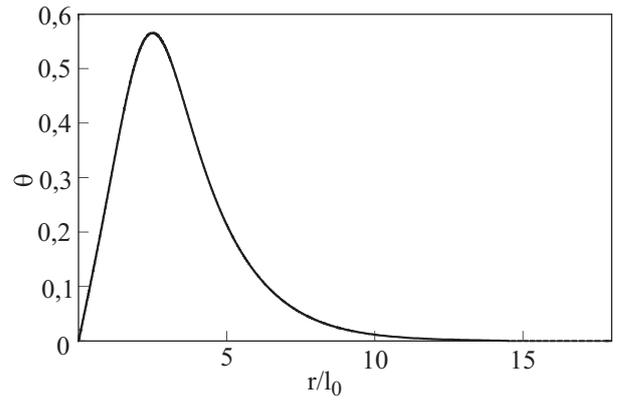


Рис. 3. Зависимость θ от координаты r при $z = 0$ для солитона с параметрами ферромагнитной среды $\chi = 1,57$, $h = 0,25$.

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} E(\mathbf{m}(r + \lambda r, \varphi, z))|_{\lambda=0} > 0. \quad (24)$$

Тем не менее найденные экстремали не доставляют функционалу энергии (5) минимума в строгом математическом смысле. Мы исследовали устойчивость солитона по отношению к малым возмущениям. Установлено существование специального типа функций $\delta\phi(r, z)$ и $\delta\theta(r, z)$ — сложных возмущений, таких что

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} E(\phi + \lambda\delta\phi, \theta + \lambda\delta\theta)|_{\lambda=0} < 0. \quad (25)$$

Однако, даже если исследованные структуры окажутся неустойчивыми, они могут обладать достаточно большим временем жизни.

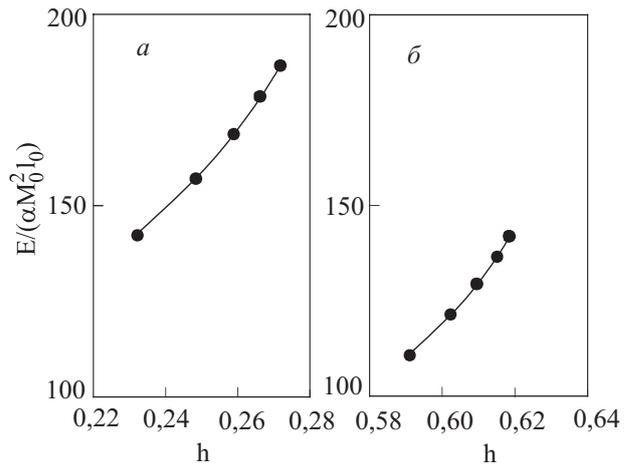


Рис. 4. Зависимость энергии солитона от параметра h для двух значений параметра χ ферромагнитной среды: 1,571 (а), 1,963 (б). Точками обозначены результаты численного счета.

3. Асимптотическое поведение

Из данных численного счета следует, что при удалении от центра солитона азимутальный угол вектора \mathbf{n} (14) становится линейной функцией координаты z , т.е. $\phi(r, z) \rightarrow 2\pi m + \pi/2 + kz$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, $m \in \mathbb{Z}$. Кроме того, найденная в результате минимизации структура солитона показывает, что $\theta(0, z) = 0$. Поскольку при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ угол θ монотонно стремится к нулю, исходная система уравнений (17), (18) может быть линеаризована для малых θ при больших значениях $|\mathbf{r}|$:

$$-\left(k^2 - \frac{4\chi k}{\pi l_0} + \frac{1+h}{l_0^2} + \frac{1}{r^2}\right)\theta + \Delta_2\theta = 0, \quad (26)$$

$$\left(-\frac{4\chi}{\pi l_0} + 2k\right)\partial_z\theta = 0. \quad (27)$$

Из уравнения (27) сразу следует, что постоянная k определяется константой Дзялошинского:

$$k = 2\chi / (\pi l_0) = D / \alpha. \quad (28)$$

С помощью вспомогательной функции

$$\psi(r, z, \phi) = \theta(r, z)\cos\phi \quad (29)$$

удобно записать уравнение (26) в виде

$$\Delta\psi = \gamma^2\psi, \quad (30)$$

где Δ — оператор Лапласа в трехмерном пространстве, а

$$\gamma = \sqrt{1+h-(4\chi^2/\pi^2)}/l_0. \quad (31)$$

Будем искать решение для (29), (30) с условиями

$$\begin{cases} \theta \geq 0, & r \geq 0, \\ \theta(0, z) = 0, \\ \theta \rightarrow 0 & (|\mathbf{r}| \rightarrow \infty), \\ \theta(r, -z) = \theta(r, z). \end{cases} \quad (32)$$

Отметим, что в частном случае, когда $\gamma = 0$, равенство (30) переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta\psi = 0, \quad (33)$$

и имеет место интересная электростатическая аналогия: функция ψ является потенциалом электрического поля системы, состоящей из зарядов, распределенных по окружности произвольного, но конечного радиуса $r = a$, $z = 0$, с линейной плотностью пропорционально $\cos\phi$ и бесконечно длинной заземленной нити, проходящей вдоль оси симметрии, а потенциал нити, как и потенциал на бесконечности, равен нулю. Действительно, уравнение (33) допускает разделение переменных в тороидальных координатах (u, v, ϕ) ,

$$\text{th } u = (2ar)/(a^2 + r^2 + z^2), \quad 0 \leq u < \infty, \quad (34)$$

$$\text{ctg } v = (a^2 - r^2 - z^2)/(2az), \quad 0 \leq v < 2\pi \quad (35)$$

и, согласно [27], обладает точным решением

$$\psi = C\sqrt{a/r} Q_{1/2}(\chi)\cos\phi, \quad (36)$$

где C — произвольная положительная константа, $\chi = \text{cth } u$, $Q_{1/2}(\chi)$ — функция Лежандра 2-го рода порядка $1/2$. Известно [28], что эта функция может быть выражена интегралом

$$Q_{1/2}(\chi) = \int_0^\pi \frac{\cos\xi}{\sqrt{2\chi - 2\cos\xi}} d\xi = \chi k_\chi K(k_\chi) - \frac{2}{k_\chi} E(k_\chi), \quad k_\chi = \sqrt{\frac{2}{1+\chi}}, \quad (37)$$

где K и E — полные эллиптические интегралы 1- и 2-го рода соответственно. Решение (36), как и всякая линейная комбинация подобных решений, удовлетворяет (32) и дает следующее асимптотическое представление для функции θ :

$$\theta(r, z) \sim (r^2 + z^2)^{-3/2} r \quad (|\mathbf{r}| \rightarrow \infty), \quad \gamma = 0. \quad (38)$$

Результат (38) формально может быть получен и иным путем. Если ϑ — полярный угол сферической системы координат (ρ, ϑ, ϕ) , $\rho = |\mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + z^2}$, то разделение переменных уравнения (33), с учетом (29), дает базис функций

$$\psi_n = C\rho^{-n-1} P_n^1(\cos\vartheta)\cos\phi. \quad (39)$$

В силу накладываемых условий (32) n — положительное нечетное число и в асимптотике «выживает» только $n = 1$. Отсюда сразу следует асимптотика (38).

Если $\gamma \neq 0$, то уравнение Гельмгольца (30) решается методом разделения переменных в сферических координатах. Тогда, с учетом (29), находим базис функций

$$\psi_n = \frac{C}{\sqrt{\rho}} K_{n+1/2}(\gamma\rho) P_n^1(\cos\vartheta)\cos\phi, \quad (40)$$

где $K_\nu(\chi)$ — модифицированная бесселева функция второго рода. В результате находим окончательную формулу асимптотического поведения:

$$\theta(r, z) \sim \frac{(1 + \gamma\sqrt{r^2 + z^2})r}{e^{\gamma\sqrt{r^2 + z^2}}(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (|\mathbf{r}| \rightarrow \infty). \quad (41)$$

Отсюда следует необходимое условие существования трехмерного вихревого солитона: $\gamma > 0$. Тогда, согласно (31),

$$1 + h - (4\chi^2/\pi^2) > 0. \quad (42)$$

Этот результат качественно согласуется с диаграммой рис. 1. Отметим, что это условие является критерием неустойчивости геликоидальной структуры в одноосных магнетиках [5].

При условии

$$1 + h - (4\chi^2 / \pi^2) < 0 \quad (43)$$

основному состоянию гамильтониана (5) отвечает геликоидальная структура

$$\cos \Theta = \frac{h}{(4\chi^2 / \pi^2) - 1}, \quad \Phi = kz, \quad (44)$$

где шаг спирали $\lambda = 2\pi / k$, а k совпадает с (28). Такая структура может быть классифицирована как ферромагнитная спираль FS [1,2]. При этом плотность энергии

$$w = -\frac{M_0^2 \beta [1 + h - (4\chi^2 / \pi^2)]^2}{2\pi^2 (4\chi^2 / \pi^2) - 1}. \quad (45)$$

Отсюда следует, что при условии (42) в системе реализуется однородное устойчивое состояние $\theta = 0$. Таким образом, исследованные нами солитоны являются локализованными возбуждениями однородного состояния.

Объемная плотность энергии солитона w убывает экспоненциально при удалении от центра солитона:

$$w(\rho, \vartheta) \sim -\frac{\cos(k\rho \cos \vartheta)(\sin \vartheta)^2}{e^{\gamma \rho} \rho} \quad (\rho \rightarrow \infty). \quad (46)$$

4. Топология вихревых солитонов

Единичное векторное поле \mathbf{m} непрерывно и задано в каждой точке пространства \mathbb{R}^3 , а в асимптотике $\mathbf{m} \rightarrow (0, 0, 1)$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Такие поля отображают пространство $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ в двумерную сферу \mathbb{S}^2 , классифицируются гомотопическими классами $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ и характеризуются целочисленным индексом Хопфа H :

$$H = -\frac{1}{(8\pi)^2} \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{r}, \quad (47)$$

где $F_i = \varepsilon_{ijk} \mathbf{m} \cdot [\nabla_j \mathbf{m} \times \nabla_k \mathbf{m}]$ и $[\nabla \times \mathbf{A}] = 2\mathbf{F}$. Выражение для индекса Хопфа H для полей (11) упрощается [29,30]:

$$H = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{n} \cdot [\partial_r \mathbf{n} \times \partial_z \mathbf{n}] dr dz. \quad (48)$$

Если индекс H в (48) отличен от нуля, то солитон можно классифицировать как тороидальный хопфион [14,29–33]. Численный расчет показывает, что для всех найденных в работе солитонов индекс $H = 0$. Примером нетопологического солитона с $H = 0$ является безвихревая магنونная капля [15]. Для исследованного

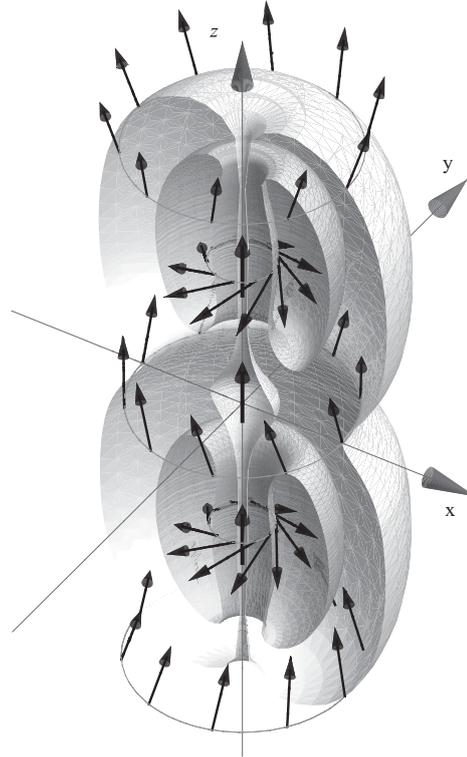


Рис. 5. Распределение намагниченности для солитона с $h = 0,11$, $\chi = 1,37$. Тороиды, построенные в интервале $0 < \varphi < \pi$, соответствуют двум значениям угла Θ : для внешнего тороида $\Theta = 0,3$, для внутренних — $\Theta = 2,0$.

же класса объектов, как на рис. 5, можно наблюдать структуру вихревых колец. Найденные солитоны можно классифицировать как топологические в том плане, что они являются ансамблем «хопфион–антихопфионных» пар.

5. Заключение

Показано, что в несоизмеримых магнитоупорядоченных кристаллах в определенной области параметров могут существовать вихревые трехмерные солитоны. Структура топологических солитонов с отличным от нуля индексом Хопфа H будет описана в последующих работах. Найденные статические солитоны не обладают недостатками прецессионных магنونных капель [16]. Поэтому, несмотря на возможную нестабильность, они могут обладать достаточно большим временем жизни, чтобы наблюдаться в реальных экспериментах. В частности, если для стабильной геликоидальной структуры (44) скачкообразно изменить внешнее магнитное поле до состояния (42), то магнетик окажется в нестабильной фазе, и переход к однородному состоянию, возможно, будет сопровождаться появлением солитонов. Не исключена также возможность, что в некоторой области параметров

$\chi - h$, не исследованной в настоящей работе, подобные солитоны будут стабильны с математической точки зрения.

Мы признательны Б.А. Иванову за приглашение поместить статью в номер журнала, посвященный 80-летию В.Г. Барьяхтара научная деятельность которого и его школы внесла существенный вклад в развитие физики магнитных явлений.

1. Ю.А. Изюмов, *УФН* **144**, 439 (1984).
2. Ю.А. Изюмов, *Дифракция нейтронов на длинно-периодических структурах*, Москва, Энергоатомиздат (1987).
3. И.Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **46**, 1420 (1964).
4. И.Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **47**, 992 (1964).
5. В.Г. Барьяхтар, Е.П. Стефановский, *ФТТ* **11**, 1946 (1969).
6. А.В. Borisov and V.V. Kiselev, *Physica* **D31**, 49 (1988).
7. А.В. Borisov and V.V. Kiselev, *Physica* **D111**, 96 (1998).
8. А.Н. Богданов, Д.А. Яблонский, *ЖЭТФ* **95**, 178 (1989).
9. А.Н. Богданов, М.В. Кудинов, Д.А. Яблонский, *ФТТ* **31**, 99 (1989).
10. A. Bogdanov and A. Hubert, *J. Magn. Magn. Mater.* **138**, 255 (1994).
11. A. Bogdanov and A. Hubert, *Phys. Status Solidi (b)* **186**, 527 (1994).
12. N.R. Cooper, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1554 (1999).
13. T. Ioannidou and P.M. Sutcliffe, *Physica* **D150**, 118 (2001).
14. А.Б. Борисов, Ф.Н. Рыбаков, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 593 (2009).
15. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, *Письма в ЖЭТФ* **24**, 495 (1976).
16. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, *ЖЭТФ* **72**, 2000 (1977).
17. И.Е. Дзялошинский, Б.А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **29**, 592 (1979).
18. А.Б. Борисов, Ф.Н. Рыбаков, *Письма в ЖЭТФ* **88**, 303 (2008).
19. R.H. Hobart, *Proc. Phys. Soc.* **82**, 201 (1963).
20. G.M. Derrick, *J. Math. Phys.* **5**, 1252 (1964).
21. Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Новокузнецк, ИО НФМИ (1998).
22. И.Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **32**, 1547 (1957).
23. I. Dzyaloshinsky, *J. Phys. Chem. Solids* **4**, 241 (1958).
24. T. Moriya, *Phys. Rev.* **120**, 91 (1960).
25. А. Богданов, *Письма в ЖЭТФ* **62**, 231 (1995).
26. А. Богданов, *Письма в ЖЭТФ* **68**, 296 (1998).
27. M. Andrews, *J. Electrostatics* **64**, 664 (2006).
28. Н.Н. Лебедев, *Специальные функции и их приложения*, ГИФМЛ, Москва–Ленинград (1963).
29. A. Kundu and Y.P. Rybakov, *J. Phys.* **A15**, 269 (1982).
30. J. Gladikowski and M. Hellmund, *Phys. Rev.* **D56**, 5194 (1997).
31. А.М. Камчатков, *ЖЭТФ* **82**, 117 (1982).
32. А.М. Kosevich, В.А. Ivanov, and А.С. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
33. L.D. Faddeev and A.J. Niemi, *Nature* **387**, 58 (1997).

Three-dimensional static vortex solitons in incommensurate magnetic crystals

А.В. Борисов and Ф.Н. Рыбаков

A new type of three-dimensional magnetic solitons in a uniaxial ferromagnet is predicted with a simultaneous account of Dzyaloshinsky–Moriya interaction and external magnetic field. The static three-dimensional solitons of a finite energy obtained by the numerical method are characterized by topological Hopf index $H = 0$ and a vortex structure. The soliton structure and the dependence on external magnetic field of energy are found. The asymptotic behavior of these solitons is investigated and a necessary condition for their existence is found.

PACS: 05.45.Yv Solitons;
 75.10.Hk Classical spin models;
 75.60.Ch Domain walls and domain structure;
11.27.+d Extended classical solutions.

Keywords: soliton, Hopf invariant, vortex, Landau–Lifshitz equation, Dzyaloshinsky–Moriya interaction.