Физика низких температур, 2010, т. 36, № 7, с. 782–789

Квантовые осцилляции импеданса слоистых проводников при упругом рассеянии электронов короткодействующими примесными центрами

О.В. Кириченко, И.В. Козлов

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: kozlov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 5 января 2010 г., после переработки 1 февраля 2010 г.

Теоретически исследовано распространение электромагнитных волн в слоистых проводниках в квантующем магнитном поле **B** в случае, когда упругое рассеяние на короткодействующих примесных центрах является основным механизмом релаксации в электронной системе. В условиях аномального скин-эффекта вычислены квантовые осцилляции импеданса, в том числе высокотемпературные. Проанализировано влияние пространственной дисперсии на амплитуду и фазу осцилляций.

Теоретично досліджено поширення електромагнітних хвиль в шаруватих провідниках в квантуючому магнітному полі **B** у разі, коли пружне розсіяння на короткодіючих домішкових центрах є основним механізмом релаксації в електронній системі. В умовах аномального скін-ефекту обчислено квантові осциляції імпедансу, у тому числі високотемпературні. Проаналізовано вплив просторової дисперсії на амплітуду та фазу осциляцій.

PACS: **72.30.+q** Высокочастотные эффекты, плазменные эффекты.

Ключевые слова: слоистый проводник, квантовые осцилляции импеданса, квантующее магнитное поле.

Изучению осцилляций Шубникова–де Гааза и де Гааза–ван Альфена в слоистых проводниках посвящено большое число работ, характерный вид этих осцилляций ярко продемонстрирован при измерениях магнитосопротивления и магнитной восприимчивости солей тетратиафульвалена — слоистых проводящих структур органического происхождения (см. [1,2] и цитированную там литературу). Изучению отклика слоистого проводника, помещенного в квантующее магнитное поле, на возбуждение в виде электромагнитной волны уделено гораздо меньше внимания, хотя высокочастотные характеристики проводника содержат богатую информацию об электронных процессах в нем.

Квазидвумерный характер электронного энергетического спектра слоистых проводников приводит к своеобразному виду осцилляционной зависимости их кинетических характеристик, обусловленной квантованием орбитального движения носителей заряда в сильном магнитном поле **B**, когда циклотронная частота электронов намного превосходит частоту их столкновений. Поверхность Ферми $\varepsilon(p)=\varepsilon_F$ слоистого проводника может быть достаточно сложной и состоять из топологически разных элементов в виде слабогофрированных цилиндров и гофрированных плоскостей в импульсном пространстве. Вклад в осцилляционный эффект вносят носители заряда, совершающие финитное движение в плоскости, ортогональной вектору **B**. Периоды осцилляций определяются экстремальными значениями S_e площади этих замкнутых сечений поверхности Ферми. Вклад от каждого экстремального сечения поверхности Ферми приводит к появлению в выражении для характеристики проводника слагаемого, осциллирующего с частотой $ncS_e/2e\hbar$, где e — заряд электрона, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света, n — целое число. В результате произведения таких вкладов появляются гармоники с комбинированными частотами, в частности слагаемые с частотами $nc(S_{\max}+S_{\min})/2e\hbar$ и $nc(S_{\max}-S_{\min})/2e\hbar$. Последние слабо затухают с температурой, что связано с независимостью фазы осцилляций от ε_F [3,4].

В настоящей работе рассмотрено распространение электромагнитных волн в квазидвумерном проводнике при низких температурах и вычислен поверхностный импеданс с помощью метода Кубо. Мы будем полагать, что релаксация в электронной системе осуществляется в основном за счет рассеяния носителей заряда на примесных центрах.

Чтобы избежать излишне громоздких выражений, предположим, что в плоскости слоев закон дисперсии носителей заряда изотропен и может быть представлен в виде

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n \cos\left(\frac{anp_z}{\hbar}\right), \qquad (1)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, a — расстояние между слоями, а величины ε_n быстро убывают с ростом номера n.

Будем полагать, что внешнее постоянное магнитное поле **B** и волновой вектор **k** направлены вдоль нормали к слоям (ось z), а поверхность образца ($z = 0$) зеркально отражает носители заряда. Для векторного потенциала **A** воспользуемся следующей калибровкой:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{A}}, \;\; \mathbf{A}_0 = (0, Bx, 0), \;\; \tilde{\mathbf{A}} = -\frac{ic}{\omega}\mathbf{E}, \; \varphi = 0, \qquad (2)$$

где $\mathbf{E}$ — электрическое поле волны.

Волновой процесс можно полагать монохроматическим с частотой ω, так что дифференцирование по времени эквивалентно умножению на $-i\omega$.

Токовый отклик на возбуждение в виде $E_i \exp(ikz)$ представим в виде $j_i(z) = j_i(k)\exp(ikz)$, где

$$j_i(k) = e\mathrm{Sp}[\mathrm{e}^{-ik\hat{z}}\hat{v}_i\hat{f}], \qquad i = (x, y), \qquad (3)$$

$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{m}(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}_0 - \frac{e}{c}\tilde{\mathbf{A}}) = \hat{\mathbf{v}}_0 - \frac{e}{c}\tilde{\mathbf{A}}$ — оператор скорости, а $\hat{f}$ — статистический оператор.

Введем циркулярно поляризованные компоненты электрического поля $E^{\pm} = E_x \pm iE_y$, тока $j^{\pm} = j_x \pm ij_y$ и оператора скорости $\hat{v}^{\pm} = \hat{v}_x \pm i\hat{v}_y$.

В линейном приближении по возмущению в виде электромагнитной волны можно записать

$$j^{\pm}(k) = e\mathrm{Sp}[\mathrm{e}^{-ik\hat{z}}\hat{v}^{\pm}\hat{f}_1] - \frac{e^2E^{\pm}}{i\omega m}\mathrm{Sp}[f_0] =$$

$$= e\mathrm{Sp}[\mathrm{e}^{-ik\hat{z}}\hat{v}^{\pm}\hat{f}_1] - \frac{e^2 n_e}{i\omega m}E^{\pm}, \qquad (4)$$

где статистический оператор представлен в виде суммы равновесного оператора $\hat{f}_0$ и добавки $\hat{f}_1$, связанной с возмущением системы носителей заряда электромагнитной волной, n_e — плотность носителей заряда.

Статистический оператор удовлетворяет кинетическому уравнению, которое в линейном приближении по малому возмущению представим в виде

$$[-i\omega + \delta + \frac{i}{\hbar}(H_\nu - H_\mu)]f^1_{\nu\mu} = -\frac{i}{\hbar}[H_E^{\pm}; f^0(H)]_{\nu\mu}. \qquad (5)$$

Здесь мы воспользовались представлением собственных функций оператора $\hat{H}$ гамильтониана электрона в поле примесных центров

$$\hat{H} = \hat{\varepsilon} + \sum_i \hat{V}_i(\hat{r} - R_i), \qquad (6)$$

где $\hat{V}_i$ — потенциал примесного центра, расположенного в точке R_i, который будем полагать слабым и короткодействующим, $\hat{\varepsilon}$ — гамильтониан свободных носителей заряда в магнитном поле.

Полный гамильтониан $\hat{H}_T^{\pm} = \hat{H} + \hat{H}_E^{\pm}$ содержит дополнительное слагаемое, учитывающее возмущение

$$\hat{H}_E^{\pm} = -\frac{1}{2}\frac{eE^{\pm}\hat{v}^{\mp}}{i\omega}\mathrm{e}^{ik\hat{z}}. \qquad (7)$$

Определив $\hat{f}_1$ из уравнения (5) и подставив его в формулу (4), получим выражение для тока при заданной конфигурации примесей. Усреднив его по всем возможным конфигурациям, получим

$$j^{\pm} = \sigma^{\pm}E^{\pm}, \qquad \sigma^{\pm} = \sigma_{xx} \pm i\sigma_{yx}, \qquad (8)$$

где

$$\sigma^{\pm} = -\frac{e^2}{i\omega}\int dE_1 dE_2 \frac{f^0(E_1) - f^0(E_2)}{\hbar\omega + E_1 - E_2 + i\delta}\, g^{\pm}(E_1, E_2) - \frac{e^2 n_e}{i\omega m}, \qquad (9)$$

$$g^{\pm}(E_1, E_2) = \mathrm{Sp}\,\langle \delta(E_1 - \hat{H})\hat{v}^{\pm}\mathrm{e}^{-ik\hat{z}}\delta(E_2 - \hat{H})\hat{v}^{\mp}\mathrm{e}^{ik\hat{z}}\rangle,$$

угловыми скобками обозначено усреднение по примесям. Соотношение (9) представляет собой один из вариантов формы записи формулы Кубо для электропроводности в применении к случаю выбранной нами калибровки векторного потенциала [5].

Оператор $\delta(E - \hat{H})$ в формуле (9) можно представить в виде

$$\delta(E - \hat{H}) = \frac{i}{2\pi}[\hat{G}^+(E) - \hat{G}^-(E)], \qquad (10)$$

где $\hat{G}^{\pm}(E) = (E - \hat{H} \pm i\delta)^{-1}$ — одноэлектронная функция Грина.

Ограничимся приближением, когда рассеяние на отдельном примесном центре учитывается в борновском приближении, а усреднение по конфигурациям примесей производится самосогласованным образом без учета «перекрестных» диаграмм, что оправдано для короткодействующей примеси, радиус действия которой много меньше длинны волны де-Бройля фермиевского электрона. Тогда функции Грина «расцепляются» [5,6], что позволяет записать

$$g^{\pm}(E_1,E_2)=\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{Sp}\,\{\mathrm{Im}\langle\hat{G}^{-}(E_1)\rangle\hat{v}^{\pm}\mathrm{e}^{-ik\hat{z}}\times$$

$$\times\,\mathrm{Im}<\hat{G}^{-}(E_2)>\hat{v}^{\mp}\mathrm{e}^{ik\hat{z}}\},\qquad(11)$$

где
$$<\hat{G}^{\pm}(E)>=\frac{1}{E-\hat{\varepsilon}-\hat{\Sigma}^{\pm}(E)}\qquad(12)$$

выражается с помощью усредненного по примесным центрам массового оператора, который можно представить в виде $\hat{\Sigma}^{\pm}(E)=\Sigma^{\pm}(E)\hat{I}$, где $\hat{I}$ — единичный оператор.

В дальнейшем ограничимся первым членом ряда в формуле (1) и представим энергетический спектр электрона в квантующем магнитном поле в виде

$$\varepsilon=\hbar\Omega(N+\frac{1}{2})-2t\cos\left(\frac{ap_z}{\hbar}\right),\qquad(13)$$

где $\Omega=eB/mc$, N — целое число, $2t$ — интеграл перекрытия волновых функций электронов, принадлежащих соседним слоям, а проекция скорости электрона на нормаль к слоям

$$v_z=v_{z0}\sin\left(\frac{ap_z}{\hbar}\right),\quad v_{z0}=\frac{2ta}{\hbar}.\qquad(14)$$

Мы полагаем выполненными следующие неравенства:

$$\hbar/\tau\ll\hbar\Omega\ll 2t\ll\varepsilon_F.\qquad(15)$$

Массовый оператор в случае слабого и короткодействующего потенциала рассеяния имеет вид [7]

$$\Sigma^{\pm}(E)=\mp\frac{i\hbar}{2\tau_0}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\pm\frac{2\pi inE}{\hbar\Omega}\right)J_0\left(\frac{4\pi nt}{\hbar\Omega}\right)C_D^{(n)}\right],\qquad(16)$$

где τ_0 — время релаксации носителей заряда в отсутствие магнитного поля (см., например, [3]), $C_D^{(n)}=\exp(-\pi n/(\Omega\tau_0))$ — фактор Дингла, J_0 — функция Бесселя.

Учитывая асимптотическое поведение функции Бесселя при больших значениях аргумента, $J_0\approx\sqrt{2/\pi x}\cos(x-\pi/4)$, легко видеть, что осциллирующая часть массового оператора меньше первого слагаемого в формуле (16) в силу малости параметра $\hbar\Omega/2t$.

При вычислении следа произведения операторов в формуле (11) будем производить суммирование по состояниям электронов, заданных квантовым числом N и значением проекции квазиимпульса p_z, и воспользуемся формулой Пуассона:

$$\mathrm{Sp}\{\hat{\phi}\}=\frac{2eB}{c(2\pi\hbar)^2}\sum_{N=0}^{\infty}\int\phi_{NN}(p_z)dp_z=$$

$$=\frac{2eB}{c(2\pi\hbar)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-1/2}^{\infty}dN\int dp_z\mathrm{e}^{2\pi iNn}\phi_{NN}(p_z).\qquad(17)$$

Это позволяет выделить в выражении для электропроводности плавно меняющуюся с магнитным полем и осциллирующую части:

$$\sigma^{\pm}=\sigma_0^{\pm}+\sigma_{\mathrm{osc}}^{\pm},\qquad(18)$$

где

$$\sigma_0^{\pm}=\frac{\omega_p^2}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{k^2v_{z0}^2+(-i\omega\pm i\Omega+1/\tau_0)^2}},\qquad(19)$$

ω_p — частота плазменных колебаний электронов.

В результате несложных, но достаточно громоздких вычислений осциллирующая с магнитным полем часть электропроводности $\sigma_{\mathrm{osc}}^{\pm}$ в свою очередь может быть представлена в виде суммы

$$\sigma_{\mathrm{osc}}^{\pm}=\sigma_1^{\pm}+\sigma_2^{\pm}+\sigma_3^{\pm},+\sigma_4^{\pm}.\qquad(20)$$

Здесь вклады $\sigma_1^{\pm}$ и $\sigma_2^{\pm}$ описывают осцилляции, затухающие с ростом температуры при $T\gtrsim\hbar\Omega$, а остальные два слагаемых $\sigma_3^{\pm}$ и $\sigma_4^{\pm}$ осциллируют с комбинированными частотами и в общем случае убывают с температурой значительно медленнее, чем $\sigma_1^{\pm}$ и $\sigma_2^{\pm}$, а для энергетического спектра вида (13) вообще не имеют температурного множителя. Слагаемые $\sigma_1^{\pm},\sigma_2^{\pm}$ в основном приближении по малому параметру $\hbar\Omega/2t$ имеют вид

$$\sigma_1^{\pm}=\frac{\hbar\Omega}{2t}\frac{1}{8\pi^3}\frac{\omega_p^2}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}C_T^{(n)}C_D^{(n)}\left\{\cos\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega}\right)[(1-\exp(2\pi in\omega/\Omega))I_1(\beta_\tau,\alpha_n,ak)+\right.$$

$$\left.+\exp(2\pi in\omega/\Omega)I_1(\beta_0,\alpha_n,ak)+I_1(-\beta_0,\alpha_n,ak)]+i\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_F}I_1(\beta_\tau,\alpha_n,ak)\sin\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega}\right)\right\},\qquad(21)$$

$$\sigma_2^{\pm}=-\frac{i}{4\pi^2}\frac{\Omega\omega_p^2}{\omega\tau_0}\frac{-i\omega\pm i\Omega+1/\tau_0}{(\sqrt{k^2v_{z0}^2+(-i\omega\pm i\Omega+1/\tau_0)^2})^3}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(1-\exp(2\pi in\omega/\Omega))C_D^{(n)}C_T^{(n)}J_0(\alpha_n)\cos\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega}\right).\qquad(22)$$

Здесь множитель $C_T^{(n)} = nu/\sinh nu$, где $u = 2\pi^2 T/\hbar\Omega,$ учитывает затухание осцилляций с ростом температуры T,

$$\alpha_n = \frac{4\pi nt}{\hbar\Omega},\ \beta_0 = \frac{-\hbar\omega \pm \hbar\Omega - i\delta}{2t},\ \beta_\tau = \frac{-\hbar\omega \pm \hbar\Omega - i\hbar/\tau_0}{2t}, \tag{23}$$

и интеграл I_1 определяется выражением

$$I_1(\beta,\alpha,\varphi_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(i\alpha\cos\varphi)d\varphi}{\beta + \cos(\varphi+\varphi_0) - \cos(\varphi)} =$$

$$= \frac{\pi}{(\cos\varphi_0 - 1)(z_1 - z_2)}\exp(-i\alpha)\left\{\frac{\beta + (\cos\varphi_0 - 1)z_1}{z_1+1}\Phi_1(\frac{1}{2},1,1;\frac{2}{1+z_1},2i\alpha) - \frac{\beta + (\cos\varphi_0 - 1)z_2}{z_2+1}\Phi_1\left(\frac{1}{2},1,1;\frac{2}{1+z_2},2i\alpha\right)\right\}, \tag{24}$$

где z_1, z_2 — корни уравнения

$$z^2 - \beta z + \frac{\beta^2 - \sin^2\varphi_0}{2(1-\cos\varphi_0)} = 0. \tag{25}$$

Приведенное выражение (24) интеграла I_1 через вырожденную гипергеометрическую функцию двух переменных

$$\Phi_1(a,b,c;x,y) = \lim_{N\to\infty} F_1(a,b,Ny,c;x,1/N) \tag{26}$$

можно получить, если воспользоваться ее интегральным представлением (см. [8], формула (3.211)):

$$F_1(\lambda,\rho,\sigma,\mu;u,v) = \frac{1}{B(\mu-\lambda,\lambda)}\int_0^1 dx\, x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-\lambda-1}(1-ux)^{-\rho}(1-vx)^{-\sigma} \tag{27}$$

и записать интеграл (24), как предел интеграла (27).

В дальнейшем будет удобнее воспользоваться асимптотическим выражением для $I_1(\beta,\alpha,\varphi_0)$ при $\alpha >> 1$. Учитывая, что основной вклад в интеграл I_1 вносят окрестности точек $\varphi = 0, \pi$, получим

$$I_1(\beta,\alpha,\varphi_0) \approx \frac{\pi i}{\varphi_0}\left\{-2\exp\left(\frac{i}{2}\alpha\beta^2\right)\cos\left(\alpha\left[1 - \frac{\beta^2 + \varphi_0^4/4}{2\varphi_0^2}\right]\right)\operatorname{sign}\operatorname{Im}\frac{\beta}{\varphi_0} + \right.$$

$$\left. + \exp\left[i\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta - \varphi_0^2/2}{\varphi_0}\right)^2\right)\right]\operatorname{erf}\left(\sqrt{-\frac{i\alpha}{2}}\frac{\beta - \varphi_0^2/2}{\varphi_0}\right) - \exp\left[-i\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta + \varphi_0^2/2}{\varphi_0}\right)^2\right)\right]\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{i\alpha}{2}}\frac{\beta + \varphi_0^2/2}{\varphi_0}\right)\right\}, \tag{28}$$

где $\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$ — интеграл вероятности.

Вклад σ_1 определяется слагаемыми с $n \neq 0$ в формуле (17), а вклад σ_2 связан с квантовыми осцилляциями массового оператора (16). Вывод выражений для σ_1 и σ_2 , а также приведенных ниже σ_3 и σ_4 существенно упрощается, если заметить, что при замене $E' = E_1 - E_2$ в формуле (9) , интеграл по E', будучи взят в последнюю очередь, сведется к единственному вычету $E_1 - E_2 + \hbar\omega = 0$ для вкладов $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ и для большей части σ_1, за исключением слагаемых, содержащих $I_1(\pm\beta_0, \alpha_n, ak)$.

При температурах, сравнимых с температурой Дингла, с вкладами σ_1 и σ_2 начинают конкурировать слагаемые

$$\sigma_3 = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{\omega_p^2\hbar^2}{(2t)^2\tau_0}\sum_{n=1}^{\infty} C_D^{(2n)}\exp(2\pi in\omega/\Omega)J_0(\alpha_n)\frac{\partial}{\partial\beta_\tau}I_1(\beta_\tau,\alpha_n,ak), \tag{29}$$

$$\sigma_4 = \frac{\omega_p^2}{4\pi\tau_0^2}\frac{2(-i\omega \pm i\Omega + 1/\tau_0)^2 - k^2 v_{z0}^2}{(\sqrt{k^2 v_{z0}^2 + (-i\omega \pm i\Omega + 1/\tau_0)^2})^5}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(2\pi in\omega/\Omega)J_0^2(\alpha_n)C_D^{(2n)}, \tag{30}$$

возникающие в следующем порядке по параметру $\hbar\Omega / 2t$, однако не содержащие температурного множителя $C_T^{(n)}$. Его отсутствие связано с тем, что интерференция осциллирующих функций, содержащихся в выражении для массового оператора и в разложении следа произведения операторов по формуле Пуассона в (17), приводит к появлению гармоник с частотами, не зависящими от энергии Ферми. Заметим, что в одноэлектронном приближении выполняется следующее соотношение:

$$\sigma_{ij}(T, \varepsilon_F) = \int \left(-\frac{\partial f_0(E)}{\partial E} \right) F_{ij}(E) dE. \qquad (31)$$

Здесь $F_{ij}(E)$ — тензор электропроводности σ_{ij}, взятый при энергии Ферми, равной E, и нулевой температуре. В соответствии с формулой (31) независимость фазы осцилляций от энергии Ферми приводит к отсутствию их температурного затухания. Возникновение осцилляций на комбинаторных частотах в присутствии упругого рассеяния было замечено в работе [9]. Существование высокотемпературных осцилляций в случае квазидвумерного энергетического спектра было показано в работе [4] для случая продольной статической проводимости и в работе [3] для случая нормального скин-эффекта вдали от резонанса $|\omega - \Omega| >> 1/\tau$.

Квантовые осцилляционные эффекты в высокочастотных полях можно наблюдать, измеряя поверхностный импеданс проводника, связывающий поле на поверхности образца с величиной полного тока. В случае зеркального отражения носителей заряда поверхностью образца, параллельной слоям, импеданс имеет вид

$$Z^{\pm} = \frac{4\pi i\omega}{c^2} \frac{E^{\pm}(0)}{E'^{\pm}(0)} = -\frac{4i\omega}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k^2 - 4\pi i\omega\sigma^{\pm}(\omega, k)/c^2}. \qquad (32)$$

Учитывая, что осциллирующая с магнитным полем часть электропроводности мала по сравнению с σ_0, импеданс можно представить в виде суммы плавно меняющейся части $Z_0^{\pm}$ и малых квантовых поправок

$$Z^{\pm} = Z_0^{\pm} + Z_b^{\pm} + Z_s^{\pm}. \qquad (33)$$

Так же, как осциллирующие слагаемые в выражении для электропроводности, квантовые поправки к импедансу можно разделить на два типа. Слагаемые первого типа Z_b (основные гармоники) имеют вид биений и затухают с температурой, а слагаемые второго типа Z_s («медленные осцилляции») обладают меньшей амплитудой, но могут наблюдаться при более высоких температурах, чем осцилляции первого типа.

В случае нормального скин-эффекта, когда пространственной дисперсией можно пренебречь $(kv_{z0}/|\omega^*| \to 0)$, справедливы следующие выражения:

$$Z_0^{\pm} = -4\pi i \frac{\sqrt{\omega\omega^*}}{c\omega_p}, \qquad (34)$$

$$Z_b^{\pm} = -Z_0^{\pm} \frac{\Omega}{\pi^2 2\omega\omega^* \tau_0} \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2t}} \left[1 + \frac{\omega^*}{\omega \mp \Omega} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} [1 - \exp(2\pi i n\omega/\Omega)] C_D^{(n)} C_T^{(n)} \cos\left(\frac{4\pi nt}{\hbar\Omega} - \frac{\pi}{4} \right) \cos\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega} \right), \qquad (35)$$

$$Z_s^{\pm} = Z_0^{\pm} \frac{i}{2\pi^2 \omega^* \tau_0} \frac{\hbar\Omega}{2t} \left(1 - \frac{i}{\omega^* \tau_0} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} C_D^{(2n)} \exp(2\pi i n\omega/\Omega) \sin\frac{8\pi nt}{\hbar\Omega}, \qquad (36)$$

где $\omega^* = \omega \mp \Omega + i/\tau_0$. Эти формулы соответствуют результатам для низкочастотного импеданса слоистого проводника, полученным нами в работе [3].

Ниже сосредоточим наше внимание на случае сильной пространственной дисперсии, когда

$$\delta_0 << \frac{v_{z0}}{|\omega^*|} \equiv l^*, \quad \delta_0 = (c^2 v_{z0} / \omega_p^2 \omega)^{1/3}. \qquad (37)$$

В результате несложных вычислений можно убедиться, что в рассматриваемом случае вклады в импеданс, связанные со слагаемыми $\sigma_2^{\pm}, \sigma_4^{\pm}$, несущественны и могут быть опущены, а вклады, связанные со слагаемыми $\sigma_1^{\pm}$ и $\sigma_3^{\pm}$, имеют вид

$$Z_0^{\pm} = (1 - i\sqrt{3}) \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\omega\delta_0}{c^2}, \qquad (38)$$

$$Z_b^{\pm} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\Omega a}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} C_T^{(n)} C_D^{(n)} \cos\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega} \right) \times$$

$$\times [(1 - \exp(2\pi i n\omega/\Omega)) I_2(\alpha_n, \beta_\tau) + \exp(2\pi i n\omega/\Omega) I_2(\alpha_n, \beta_0) + I_2(\alpha_n, -\beta_0) + i \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_F} I_2(\alpha_n, \beta_\tau)], \qquad (39)$$

$$Z_s^{\pm} = -\frac{8}{\pi}\frac{\hbar\omega}{2t}\frac{a}{\tau_0 c^2}\sum_{n=1}^{\infty} C_D^{(2n)} \exp\,(2\pi i n\omega/\Omega)\, J_0(\alpha_n)\,\frac{\partial}{\partial\beta_\tau} I_2(\alpha_n,\beta_\tau), \tag{40}$$

где

$$I_2(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2 - i/\xi)^2} I_1(y,x,a\xi/\delta_0). \tag{41}$$

Формулы (38)–(41) представляют собой общее выражение для поверхностного импеданса слоистого проводника в случае аномального скин-эффекта. Приведем асимтотический вид импеданса слоистого проводника для следующих предельных случаев.

В случае, если выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2t}}\frac{v_{z0}}{|\,\omega \mp \Omega\,|} << \delta_0 << l^*, \tag{42}$$

выражение для высокотемпературного вклада в поверхностный импеданс имеет вид

$$Z_s^{\pm} = \frac{8i}{3\pi^2}\frac{a\omega\Omega}{\tau_0(\omega^*)^2 c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} C_D^{(2n)} \exp(2\pi i n\omega/\Omega)\sin\frac{8\pi n t}{\hbar\Omega}. \tag{43}$$

Низкотемпературная быстроосциллирующая часть импеданса представляет собой сумму вкладов $Z_b^{\pm} = Z_{b1}^{\pm} + Z_{b2}^{\pm} + Z_{b3}^{\pm}$, где

$$Z_{b1}^{\pm} = -\frac{8a\Omega^2}{3\pi^2\omega^*\tau_0(\omega\mp\Omega)c^2}\sqrt{\frac{2t}{\hbar\Omega}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}} C_T^{(n)} C_D^{(n)} \cos\left(\frac{4\pi n t}{\hbar\Omega}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega}\right)[1-\exp(2\pi i n\omega/\Omega)] \tag{44}$$

— основной вклад при не слишком малой концентрации примеси, два других вклада становятся существенными в бесстолкновительном пределе:

$$Z_{b2}^{\pm} = \frac{16}{27}\frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{\pi}}\frac{\Omega}{c^2}\frac{a^3}{\delta_0^2}\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2t}}\left(\frac{2t}{\hbar\omega\mp\hbar\Omega}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}} C_T^{(n)} C_D^{(n)}\cos\left(\frac{4\pi n t}{\hbar\Omega}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega}\right), \tag{45}$$

$$Z_{b3}^{\pm} = \frac{8}{3\pi^2}\frac{\Omega a}{c^2}\frac{\omega}{\omega^*}\frac{\sqrt{2t\hbar\Omega}}{\varepsilon_F}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}} C_T^{(n)} C_D^{(n)}\cos\left(\frac{4\pi n t}{\hbar\Omega}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega}\right). \tag{46}$$

Уместно провести параллель с расчетом, основанным на применении цепочки уравнений Боголюбова, который для случая нормального скин-эффекта и квадратичного закона дисперсии проведен в работе [10]. Тогда можно сказать, что вклад $Z_{b3}^{\pm}$ связан с той частью тензора проводимости, в которой не учитывается квантовый характер ядра интеграла столкновений. Вклад Z_{b3} мал и приведен исключительно из методических соображений. Вклад $Z_{b2}^{\pm}$, как и $Z_{b3}^{\pm}$, не исчезает в бесстолкновительном пределе, но существен только в случае сильной пространственной дисперсии. Роль $Z_{b2}^{\pm}$ возрастает с ростом магнитной составляющей электромагнитного поля в среде.

Случай предельно сильной пространственной дисперсии, когда

$$\sqrt{\frac{2t}{\hbar\Omega}}\, a << \delta_0 << \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2t}} l^*, \tag{47}$$

физически может быть реализован за счет увеличения эффективной длины пробега l^* в окрестности резонанса $\omega^* << \Omega$. Тогда

$$Z_s^{\pm} = -\frac{32(\sqrt{3}-i)}{9\sqrt{3}\omega_p^2\tau_0\delta_0}\sum_{n=1}^{\infty} C_D^{(2n)} \exp(2\pi i n\omega/\Omega)\cos\frac{8\pi n t}{\hbar\Omega}, \tag{48}$$

$$Z_{b1}^{\pm} = \frac{32}{27}(\sqrt{3}+3i)\frac{\delta_0^2}{c^2 a\tau_0}\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2t}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} C_T^n C_D^n \cos\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega}\right)\left[1-\exp\left(\frac{2\pi i n\omega}{\Omega}\right)\right]\sin\left(\frac{4\pi n t}{\hbar\Omega}-\frac{\pi}{4}\right), \tag{49}$$

$$Z_{b2}^{\pm} = \frac{16}{3\pi}\frac{\Omega a}{c^2}\sqrt{\frac{2t}{\hbar\Omega}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}C_T^n C_D^n \cos\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega}\right)\cos\left(\frac{4\pi nt}{\hbar\Omega}-\frac{\pi}{4}\right), \quad (50)$$

$$Z_{b3}^{\pm} = \frac{8}{27}(\sqrt{3}-3i)\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_F}\frac{\Omega\delta_0}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}C_T^n C_D^n \sin\left(\frac{2\pi n\varepsilon_F}{\hbar\Omega}\right)\cos\left(\frac{4\pi nt}{\hbar\Omega}\right). \quad (51)$$

При этом фаза медленных осцилляций Z_s сдвинута на $\pi/2$ относительно случая, определяемого неравенством (42).

Приведем выражение для высокотемпературного вклада при условии

$$\sqrt{\frac{2t}{\hbar\Omega}}\, a << \delta_0 << l^*, \quad (52)$$

которое охватывает оба случая. Для этого заметим, что основной вклад в интеграл I_2, к которому сводится вычисление высокотемпературного вклада (40), вносят области интегрирования $\varphi-\varphi_{\text{extr}} << 1$ интеграла I_1, где $\varphi_{\text{extr}} = 0, \pm\pi$. Также можно заметить, что при условии (52) основной вклад в высокотемпературные осцилляции импеданса вносит нечетная по β часть интеграла I_1. Тогда выражение для высокотемпературных осцилляций импеданса может быть записано в виде (40), в котором интеграл I_2 имеет вид

$$I_2(\alpha,\beta) \approx \frac{\delta_0}{a}\left\{\exp(i\alpha)F_1^-\left(\alpha,\frac{\delta_0\beta}{a}\right)+\exp(-i\alpha)F_1^+\left(\alpha,\frac{\delta_0\beta}{a}\right)\right\}, \quad (53)$$

где

$$F_1^{\pm}(\alpha,\beta) = \int_0^{\infty}\frac{dk}{\left(k^2-\frac{i}{k}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\pm\frac{i\alpha}{2}x^2\right)dx}{\beta+kx} = \sum_{i=1}^{3}\gamma_i\frac{\partial}{\partial k_i}F_2^{\pm}(k_i,\alpha,\beta). \quad (54)$$

Здесь $\gamma_i = 1/(9k_i^2)$ суть коэффициенты разложения знаменателя $[k^2-(i/k)]^{-1}$ на простые дроби, k_i — корни уравнения $k^3 - i = 0$,

$$F_2^{\pm}(k_i,\alpha,\beta) = \int_0^{\infty}\frac{dk}{k-k_i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\pm\frac{i\alpha}{2}x^2\right)dx}{\beta+kx} = \pm\frac{\pi i}{k_i}\operatorname{Sign}\operatorname{Im}(k_\beta)F_3^{\pm}\left(0,-\frac{k_\beta^2}{k_i^2}\right)+$$

$$+\left(\ln(-k_i)-\frac{\ln k_\beta+\ln(-k_\beta)}{2}\right)\frac{k_\beta}{k_i^2}F_3^{\pm}\left(-\frac{1}{2},-\frac{k_\beta^2}{k_i^2}\right)+\frac{k_\beta}{2k_i^2}\frac{\partial}{\partial p}F_3^{\pm}\left(p,-\frac{k_\beta^2}{k_i^2}\right)\Bigg|_{p=-\frac{1}{2}}, \quad (55)$$

где $k_\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\beta$ и

$$F_3^{\pm}(p,a) = \int_0^{\infty}\frac{x^p}{x+a}\exp(\pm ix)dx = (\mp ia)^p\exp[\pm i(\pi p/2-a)]\Gamma(p+1)\Gamma(-p,\mp ia)+2\pi(\pm i)^{2p+1}a^p\exp(\mp ia)\theta(\mp\operatorname{Im}a)\theta(-\operatorname{Re}a), \quad (56)$$

$\Gamma(p,x) = \int_x^{\infty} t^{p-1}\exp(-t)dt$ — неполная гамма-функция, для всех многозначных функций ($\ln(x)$, x^p, $\Gamma(p,x)$ при нецелом p) выбрана главная ветвь с разрезом на отрицательной части вещественной оси комплексной плоскости аргумента. Явные выражения для производных, входящих в выражения (40),(54),(55), могут быть легко получены и не приведены здесь в силу громоздкости.

Полученные результаты представляют полную картину квантовых осцилляций поверхностного импеданса слоистого проводника, связанных с квантованием орбитального движения носителей заряда в магнитном поле в рассматриваемой геометрии. Во всей области частот квазидвумерный характер электронного энергетического спектра такого проводника проявляется в наличии двух типов осциллирующих слагаемых в выражении для импеданса: биений и «медленных» высокотемпературных осцилляций. Отсутствие температурного затухания этих осцилляций является следствием выбора такой модели закона дисперсии носителей заряда, когда интеграл перекрытия волновых функций электронов, принадлежащих соседним слоям, не зависит от их энергии. Учет этой зависимости может привести к уменьшению амплитуды медленных осцилляций с температурой, однако это затухание будет гораздо более слабым, чем температурное затухание основных гармоник.

В случае достаточно сильной пространственной дисперсии, $\sqrt{\hbar\Omega/(2t)}\, l^* > \delta_0$, возникает сдвиг фазы на $\pi/2$ высокотемпературных осцилляций. Пространственная дисперсия существенна, когда носители заряда успевают покинуть скин-слой на эффективной длинне свободного пробега, т.е. если $v_z/|\omega^*| > \delta_0$. Однако квантовые осцилляции формируются относительно небольшими группами носителей заряда вблизи экстремальных сечений поверхности Ферми, для которых вектор скорости направлен под острым углом к поверхности образца, и его проекция на нормаль к поверхности образца мала, $v_z \sim \sqrt{\hbar\Omega/(2t)}\, v_{z0} \ll v_{z0}$. Таким образом, для групп носителей заряда, определяющих квантовые осцилляции импеданса, пространственная дисперсия становится существенной при $\delta_0 < \sqrt{\hbar\Omega/(2t)}\, l^*$. Последнее условие разделяет два режима поглощения электромагнитной волны, что проявляется на изменении амплитуды и фазы осцилляций.

Фазовый сдвиг возникает также и на огибающей биений высокочастотных низкотемпературных осцилляций. Последний менее выражен, чем фазовый сдвиг высокотемпературных осцилляций, что связано с конкуренцией «примесных» вкладов и вкладов, обязанных своим существованием сильной пространственной дисперсии, которая приводит к сложной зависимости фазы и амплитуды осцилляций от концентрации примесей и глубины скин-слоя.

1. M.V. Kartsovnik, *Chem. Rev.* **104**, 5737 (2004).
2. М.В. Карцовник, В.Г. Песчанский, *ФНТ* **31**, 249 (2005) [*Low Temp. Phys*. **31**, 185 (2005)].
3. О.В. Кириченко, И.В. Козлов, *ФНТ* **28**, 509 (2002) [*Low Temp. Phys*. **28**, 359 (2002)].
4. M.V. Kartsovnik, P.D. Grigoriev, W. Biberacher, N.D. Kushch, and P. Wyder, *Phys. Rev. Lett*. **89**, 126802 (2002).
5. S. Doniach and E.H. Sondheimer, *Green's Functions for Solid State Physicists*, Imperial College Press, London (1998).
6. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
7. О.В. Кириченко, И.В. Козлов, Д. Крстовска, В.Г. Песчанский, *ФНТ* **34**, 681 (2008) [*Low Temp. Phys*. **34**, 538 (2008)].
8. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1963).
9. В.Л. Гуревич, *Письма в ЖЭТФ* **5**, 260 (1967).
10. В.В. Андреев, А.М. Косевич, *ЖЭТФ* **43**, 1061 (1962).

Quantum oscillations of the impedance of layered conductors at elastic scattering of electrons by short-range impurity centers

O.V. Kirichenko and I.V. Kozlov

Propagation of electromagnetic waves in layered conductors placed in a quantizing magnetic field **B** is studied theoretically in the case when the elastic scattering by short-range impurity centers is a main relaxation mechanism in the electron system. Under anomalous skin-effect conditions the quantum oscillations of the impedance, including high-temperature oscillations, are calculated. The spatial dispersion influence on amplitude and phase of the oscillations is analyzed.

PACS: **72.30.+q** High-frequency effects; plasma effects.

Keywords: layered conductor, quantum oscillations of the impedance, quantizing magnetic field.