

## Об электрической поляризации неоднородных сверхтекучих систем

С.И. Шевченко, А.С. Рукин

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины  
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина  
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 15 марта 2010 г.

Исследован вопрос электрической поляризации сверхтекучих систем, порождаемой их неоднородностью. Проблема изучается в модели разреженного электрон-дырочного газа, рассмотренной авторами ранее. Выполнен микроскопический расчет поляризации квантованных вихрей в отсутствие и при наличии магнитного поля. Установлено, что при наличии магнитного поля вихри приобретают дополнительную поляризацию, которая приводит к появлению квантованного заряда в коре вихря. Показано, что ван-дер-ваальсово взаимодействие сверхтекучей системы с поверхностью твердого тела вызывает появление поляризации вблизи поверхности. Установлена связь полученных результатов с предсказанием возможной поляризации среды при ее неравномерном движении.

Досліджено питання електричної поляризації надплинних систем, що породжується їх неоднорідністю. Проблема вивчається у моделі розрідженого електрон-діркового газу, яку розглянуто авторами раніше. Виконано мікроскопічний розрахунок поляризації квантованих вихорів у разі відсутності та наявності магнітного поля. Встановлено, що за наявності магнітного поля вихори набувають додаткову поляризацію, яка призводить до появи квантованого заряду в корі вихора. Показано, що ван-дер-ваальсова взаємодія надплинної системи з поверхнею твердого тіла викликає появу поляризації поблизу поверхні. Встановлено зв'язок отриманих результатів з передбаченням можливої поляризації середовища під час його нерівномірного руху.

PACS: 67.90.+z Другие темы в квантовых жидкостях и твердых телах;  
67.25.D– Сверхтекучая фаза.

Ключевые слова: поляризация, сверхтекучие системы, неоднородность, квантованные вихри, поверхностная поляризация.

### Введение

В 2004–2005 гг. группой из ФТИНТа поставлены эксперименты [1,2], в которых было установлено появление электрической поляризации в сверхтекучем гелии при протекании в нем потоков. Эти эксперименты вызвали большой интерес и стимулировали ряд теоретических исследований [3–14], в которых сделаны попытки объяснить наблюдаемые явления. В некоторых из них [4] поставлена более общая задача — исследовать возможные механизмы поляризации как сверхтекучих, так и нормальных систем.

Для качественного понимания механизма возникновения электрической поляризации в сверхтекучих системах при их движении в наших предыдущих работах [15,16] рассмотрена модель разреженного электрон-дырочного газа, в котором размер пар много мень-

ше среднего расстояния между парами. Эта модель может качественно описывать процессы, происходящие в жидком гелии, и в то же время допускает строгое микроскопическое рассмотрение. Свойства такого газа изучали в работе Келдыша [17], в которой показано, что поведение системы в сверхтекучем состоянии можно описывать комплексным параметром порядка  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , имеющим смысл волновой функции пар. Пренебрегая внутренней структурой пар (т.е. полагая  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ ), Келдыш получил для  $\Phi$  уравнение, совпадающее с уравнением Гросса–Питаевского. Поскольку интересующие нас электрические эффекты могут возникать только при несовпадении электронной и дырочной координат, то следует найти функцию  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  при  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ . В предыдущей работе [16] мы получили уравнение для  $\Phi$  в случае, когда  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ .

Настоящая работа организована следующим образом. В первом разделе в рамках модели разреженного газа получено уравнение для параметра порядка при наличии внешних электрического и магнитного полей. Получены выражения для поляризации пар при неравномерном движении и неоднородной плотности. В дальнейшем эти результаты применяются для различных ситуаций, возможных в сверхтекучих системах.

Раздел 2 посвящен изучению поляризации сверхтекучей системы при наличии в ней квантованных вихревых нитей. По известному выражению для плотности вычислено распределение поляризационных зарядов в вихре как функция расстояния до оси вихря. В этом разделе также найдена зависимость поляризации движущейся сверхтекучей жидкости от ее поля скоростей.

В разделе 3 рассматривается поляризация вихревой нити во внешнем магнитном поле. Наличие магнитного поля приводит к дополнительной поляризации и качественно иному распределению дополнительного поляризационного заряда в пространстве.

В разделе 4 найдено выражение для поляризации одномерного солитона в «supersolid» системах.

Взаимодействие атомов сверхтекучей жидкости с поверхностью твердого тела приводит к появлению поверхностной поляризации. В разделе 5 рассматривается поляризация электрон-дырочного газа вблизи проводящей или диэлектрической поверхности и вычисляется зависимость поляризации от расстояния до поверхности.

В Заключении кратко обсуждается применимость полученных результатов к реальному He II.

## 1. Основное уравнение

Используя результаты работ [15–17], записываем уравнение для параметра порядка  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  при наличии внешних однородных электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\hbar^2}{2m_h} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_2^2} - \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ & + \int R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \Phi^*(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Phi(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 - \\ & - \left( e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + \frac{ie\hbar}{Mc} [\mathbf{H}\mathbf{r}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mu \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где ядро  $R$  имеет вид

$$\begin{aligned} R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = & \\ = e^2 & \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введены обозначения  $\mathbf{R} = \frac{m_h \mathbf{r}_1 + m_e \mathbf{r}_2}{m_e + m_h}$ ,

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $M = m_e + m_h$ ,  $m^{-1} = m_e^{-1} + m_h^{-1}$ . Уравнение (1) удается решить, если параметр порядка  $\Phi$  медленно изменяется на длине порядка размера пар. Решение уравнения (1) ищем по методу, несколько отличному от метода работы [16]. Записываем функцию  $\Phi$  в виде

$$\Phi = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \Psi(\mathbf{R}), \quad (3)$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \varphi^{(0)}(\mathbf{r}) + \varphi^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) + \varphi^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{R}).$$

Функция  $\Psi(\mathbf{R})$  описывает движение пар как целого, а  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{R})$  — внутреннее движение в парах.

Раскладывая химический потенциал  $\mu$  аналогично (3),

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2, \quad (4)$$

и вводя обозначения

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} - \frac{e^2}{r}, \quad \hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2}, \quad (5)$$

приходим к системе уравнений для функций  $\varphi$  и  $\Psi$ .

В нулевом приближении

$$\hat{H}_0 \varphi^{(0)} \Psi = \mu_0 \varphi^{(0)} \Psi. \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$\mu_0 = \varepsilon_0, \quad \varphi^{(0)} = \varphi_0. \quad (7)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  и  $\varphi_0$  — энергия и волновая функция основного состояния кулоновской задачи для пары.

В уравнении первого приближения учитываем энергию взаимодействия пар с электрическим и магнитным полями.

$$\mu_0 \varphi^{(1)} \Psi = \hat{H}_0 \varphi^{(1)} \Psi - \mu_1 \varphi_0 \Psi - \left( e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + \frac{ie\hbar}{Mc} [\mathbf{H}\mathbf{r}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \varphi_0 \Psi. \quad (8)$$

Уравнение (8) — линейное неоднородное уравнение относительно  $\varphi^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ . Согласно общему правилу, такое уравнение имеет решение лишь в том случае, когда неоднородная часть ортогональна решению соответствующего однородного уравнения, т.е.  $\varphi_0$ . Это условие разрешимости для уравнения (8) дает  $\mu_1 = 0$ . Решая уравнение (8), находим добавку  $\varphi^{(1)}$  и убеждаемся, что в этом приближении у пары появляется дипольный момент

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{EH} &= \langle \varphi_0 | e\mathbf{r} | \varphi^{(1)} \rangle + \langle \varphi^{(1)} | e\mathbf{r} | \varphi_0 \rangle = \\ &= 2\mathbf{E}_{\text{eff}} \sum_n \frac{\langle \varphi_0 | e\mathbf{r} | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | e\mathbf{r} | \varphi_0 \rangle}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} \equiv \alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где через  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$  обозначено выражение

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \text{Re} \left[ \mathbf{E} + \frac{i\hbar}{Mc} \frac{1}{\Psi} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{R}} \times \mathbf{H} \right) \right]. \quad (10)$$

Это выражение в дальнейшем мы будем называть эффективным электрическим полем. Буква  $n$  в (9) обозначает совокупность всех квантовых чисел,  $\alpha$  — электрическую поляризуемость пары. В случае  $m_h \gg m_e$  поляризуемость пары равна  $\alpha = (9/2)a_B^3$ , где  $a_B = \hbar^2/(me^2)$  — эффективный борковский радиус. Данное значение  $\alpha$  хорошо известно и вычислялось различными способами — введением вспомогательных операторов и с помощью перехода в уравнении Шредингера к параболическим координатам [18]. В настоящей работе это значение получено путем непосредственного вычисления суммы, входящей в (9). Подчеркнем, что в этом случае необходимо учитывать состояния не только дискретного, но и непрерывного

спектра. Учет только дискретного спектра приводит к заниженному значению поляризуемости  $\alpha \approx 3,66a_B^3$ , т.е. состояния непрерывного спектра вносят вклад в поляризуемость пары около 20%. Суммирование по всему спектру дает точное значение  $\alpha = (9/2)a_B^3$ .

Записывая во втором слагаемом в (10) функцию  $\Psi$  в виде  $\Psi = f e^{i\varphi}$  и учитывая, что скорость сверхтекучего потока равна  $\mathbf{v} = (\hbar/M)\nabla\varphi$  (см. ниже (18)), получаем для дипольного момента выражение

$$\mathbf{p}_{EH} = \alpha \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right). \quad (11)$$

Слагаемое с магнитным полем в (11) является следствием действия силы Лоренца на электрон и дырку в противоположных направлениях.

Уравнение второго приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_0 \varphi^{(2)} \Psi = \hat{H}_0 \varphi^{(2)} \Psi - \mu_1 \varphi^{(1)} \Psi - \mu_2 \varphi_0 \Psi + \hat{K} \varphi_0 \Psi - e \mathbf{E}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{r}_{12} \varphi^{(1)} \Psi - i \hbar \varphi_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \\ + \int R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \varphi_0(\mathbf{r}_{13}) \varphi_0(\mathbf{r}_{34}) \varphi_0(\mathbf{r}_{42}) \Psi(\mathbf{R}_{13}) \Psi^*(\mathbf{R}_{43}) \Psi(\mathbf{R}_{42}) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4. \end{aligned} \quad (12)$$

Последнее слагаемое в (12) связано со взаимодействием пар друг с другом. В отсутствие внешних полей уравнение (12) переходит в уравнение, полученное ранее в нашей работе [16]. При решении этого уравнения в его последнем слагаемом учтена только нечетная по  $\mathbf{r}$  часть, дающая вклад в дипольный момент. Решив уравнение (12) в пределе медленного изменения параметра порядка с координатами, мы показали, что неоднородная плотность  $n(\mathbf{R}) = |\Psi(\mathbf{R})|^2$  приводит к появлению в системе дипольного момента, плотность которого пропорциональна градиенту плотности пар.

$$\mathbf{p}_{\text{grad}} = A \gamma e n a_B^5 \frac{\partial n}{\partial \mathbf{R}}, \quad A \approx 120, \quad \gamma = \frac{m_h - m_e}{m_h + m_e}. \quad (13)$$

Относительно знака этого выражения необходимо сделать следующее замечание. Использованная нами волновая функция Келдыша, на которой основаны все вычисления, описывает только область отталкивания между парами. Однако метод Келдыша не учитывает диполь-дипольные корреляции между электронами разных пар, которые приводят к притяжению между парами на больших расстояниях. Поскольку в реальном He II вероятность пребывания атомов в области, отвечающей притяжению между ними, достаточно велика, то мы не исключаем, что это может привести к иному, чем в (13), знаку для поляризации.

Условие разрешимости уравнения (12) приводит к следующему уравнению для  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} -\mu_2 \Psi - i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{R}^2} + g |\Psi|^2 \Psi - \\ - \frac{\alpha}{2} \left[ \mathbf{E} + \frac{i\hbar}{Mc} \frac{1}{\Psi} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{R}} \times \mathbf{H} \right) \right]^2 \Psi = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Это уравнение имеет вид уравнения Гросса–Питаевского при наличии внешних полей. Константа взаимодействия  $g$  в (14) равна [16]:

$$\begin{aligned} g \equiv \int R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \varphi_0(\mathbf{r}_{13}) \varphi_0(\mathbf{r}_{34}) \varphi_0(\mathbf{r}_{42}) \varphi_0(\mathbf{r}_{21}) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 d\mathbf{r}_{12} = \\ = \frac{13}{3} \pi e^2 a_B^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Эта величина положительна, что означает отталкивание между парами.

Записывая снова параметр порядка в виде  $\Psi = f e^{i\varphi}$  и отделяя вещественную и мнимую части в уравнении (14), получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} -\mu_2 f + \hbar f \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 f + g f^3 - \frac{\alpha}{2} E^2 f + \\ + \alpha \frac{\hbar}{Mc} f \nabla \varphi \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) + \frac{\hbar^2}{2M} f (\nabla \varphi)^2 = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hbar}{M} \nabla f \cdot \nabla \varphi + \frac{\hbar}{2M} f \nabla^2 \varphi + 2f \frac{\alpha}{Mc} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla f = 0.$$

Второе уравнение в (16) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \left( \frac{\hbar}{M} \nabla \varphi + \frac{\alpha}{Mc} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) \right) = 0, \quad (17)$$

где  $n = f^2$  — плотность пар. Уравнение (17) имеет вид уравнения непрерывности, в котором скорость сверхтекучего потока равна

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{M} \nabla \varphi + \frac{\alpha}{Mc} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}). \quad (18)$$

Видно, что скрещенные электрическое и магнитное поля индуцируют потоки в сверхтекучем газе электронно-дырочных пар, подобно тому, как магнитное поле индуцирует мейсснеровские токи в сверхпроводящем электронном газе. Впервые этот результат был получен в работе одного из авторов [19] (см. также [20]). Спустя много лет он был заново открыт в ряде работ, опубликованных в журнале *Physical Review Letters* (см., например, [21]).

В заключение этого раздела установим связь полученных результатов с предсказанием Мельниковского [4], что неравномерное движение среды приводит к ее поляризации, точнее, что дипольный момент единицы объема связан с ускорением среды соотношением

$$\mathbf{P} \sim -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{1}{2Ze} M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (19)$$

Здесь  $Z$  — заряд ядер атомов, образующих среду, в нашей модели  $Z = 1$ . Покажем, что этот результат согласуется с выражением (13), и найдем отсутствующий в (19) численный коэффициент. В отсутствие внешних полей (т.е. при  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$ ) первое уравнение (16) может быть записано в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{g}{M} \nabla f^2 + \frac{\hbar^2}{2M^2} \nabla \left( \frac{1}{f} \nabla^2 f \right). \quad (20)$$

При движении среды с малыми (по сравнению со скоростью звука) скоростями обычно интересуются линейными эффектами, опуская второе слагаемое в левой части уравнения. Можно также опустить второе слагаемое и в правой части уравнения, поскольку легко убедиться, что при изменении плотности системы на расстояниях, больших по сравнению с межатомными, первое слагаемое в правой стороне (20) много больше второго. В результате из (20) следует, что

$$g \nabla n = -M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (13), получаем

$$\mathbf{P} = -\frac{Aen a_B^5}{g} \gamma M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx -9 \frac{na_B^3}{e} \gamma M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (22)$$

Сравним полученное выражение с формулой Мельниковского (19). Учитывая, что для рассматриваемого

нами разреженного газа выполняется соотношение  $\varepsilon - 1 = 4\pi n \alpha$ , а поляризуемость электрон-дырочной пары  $\alpha$  равна  $\alpha = (9/2) a_B^3$ , можно привести выражение (22) к виду

$$\mathbf{P} \approx -4 \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{1}{2e} \gamma M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad \gamma = \frac{m_h - m_e}{m_h + m_e}. \quad (23)$$

Отметим, что при равных массах электрона и дырки поляризация в системе не возникает. При  $m_h \gg m_e$  выражение (23) отличается от (19) только численным коэффициентом, приблизительно равным 4. Знаки выражений (23) и (19) совпадают, если коэффициент  $A$  имеет положительный знак, найденный в (13). Полученный нами коэффициент 4 не является универсальным и связан с использованной моделью, хотя представляется, что и в общем случае этот коэффициент останется порядка единицы.

## 2. Поляризация вихря

В общем случае плотность  $n(\mathbf{R})$  является сложной функцией координат, вид которой зависит от граничных условий, потоков в жидкости и других факторов. Однако в сверхтекучей жидкости существуют некоторые «характерные конфигурации», для которых возможно найти дипольный момент. Одной из таких конфигураций является прямолинейный квантованный вихрь.

Решение уравнения Гросса–Питаевского (14) (в отсутствие внешних полей) для прямолинейной вихревой нити хорошо известно (см., например, [22]). Мы, однако, приведем некоторые подробности решения, которые будут использованы нами в дальнейшем.

В общем случае функцию  $\Psi$  можно записать в виде

$$\Psi = \sqrt{n_0} f(\mathbf{R}) e^{i\varphi(\mathbf{R})}, \quad (24)$$

где  $n_0$  — средняя плотность в системе вдали от вихревой нити. После подстановки (24) в (14) получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left[ \nabla^2 f + 2i \nabla f \nabla \varphi + f (i \nabla^2 \varphi - (\nabla \varphi)^2) \right] - \mu f + g n_0 f^3 = 0. \quad (25)$$

Это уравнение распадается на два — для вещественной и мнимой части. Уравнение для вещественной части имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left( \nabla^2 f - f (\nabla \varphi)^2 \right) - \mu f + g n_0 f^3 = 0. \quad (26)$$

Уравнение для мнимой части представляет собой стационарное уравнение непрерывности  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , где  $\mathbf{j}$  — плотность потока частиц.

Для прямолинейной вихревой нити

$$\Psi = \sqrt{n_0} e^{i\theta} f \left( \frac{\rho}{\xi} \right). \quad (27)$$

Здесь  $\rho$  — расстояние до оси вихря,  $\theta$  — полярный угол,  $\xi = (\hbar^2/2Mgn_0)^{1/2}$  — длина когерентности. Уравнение (26) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta \frac{df}{d\zeta} \right) - \frac{f}{\zeta^2} + f - f^3 = 0, \quad (28)$$

где  $\zeta = \rho/\xi$ . Решение этого уравнения возможно найти [22] в двух предельных случаях:

$$f \sim \zeta \quad \text{при } \zeta \ll 1; \quad (29)$$

$$f = 1 - \frac{1}{2\zeta^2} \quad \text{при } \zeta \gg 1. \quad (30)$$

Подставляя (29) и (30) в (13), легко найти поляризацию в указанных двух предельных случаях:

$$\mathbf{P} \sim \rho^2 \mathbf{p}, \quad \zeta \ll 1, \quad (31)$$

$$\mathbf{P} = Aena_B^5 \frac{\gamma}{g} \frac{\hbar^2}{M\rho^3} \frac{\mathbf{p}}{\rho}, \quad \zeta \gg 1. \quad (32)$$

Результат (32) был впервые получен Нациком [4] из феноменологических соображений. Он исходил из предположения, что на ядро атома, который участвует в вихревом движении, действует центробежная сила, обусловленная полем скоростей вихря.

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \frac{Mv^2}{\rho} \frac{\mathbf{p}}{\rho} = \frac{\hbar^2}{M} \frac{1}{\rho^3} \frac{\mathbf{p}}{\rho}. \quad (33)$$

Вводя коэффициент «упругой податливости»  $\eta$ , Нацик записал для смещения  $\delta_F$  ядра по отношению к центру атома под действием силы  $\mathbf{F}$  выражение  $\delta_F = \eta \mathbf{F}(\mathbf{R})$ . Далее он нашел связь коэффициента  $\eta$  с коэффициентом электрической поляризации атома  $\alpha$ , учитывая, что, с одной стороны, в электрическом поле  $\mathbf{E}$  у атома возникает дипольный момент  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ , а, с другой стороны, модуль этого момента  $p = Ze\delta_E$ , где  $\delta_E = \eta(2ZeE)$ ,  $Z$  — число электронов в электронной оболочке. Отсюда он получил плотность дипольного момента

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}) = n(\mathbf{R})\mathbf{p}(\mathbf{R}) = -n(\mathbf{R})Ze\delta_E = \left( \frac{-\hbar^2\alpha}{2ZeM} \right) n(\mathbf{p}) \frac{\mathbf{p}}{\rho^4}. \quad (34)$$

Нетрудно убедиться, что найденное исходя из микроскопического расчета выражение для поляризации (32) совпадает с (34) с точностью до численного коэффициента. Для этого достаточно учесть, что  $g = (13/3)\pi e^2 a_B^2$ , а электрическая поляризуемость атомов гелия  $\alpha \approx (4/3)a_B^3$ . Подставляя эти значения, получаем, что выражение (32) имеет дополнительный численный множитель, приблизительно равный 4. Тем самым устанавливается связь между микроскопическим и феноменологическим описанием.

Представляет интерес вычислить плотность поляризационного заряда  $q_{\text{pol}} = -\text{div } \mathbf{P}$  как функцию расстояния до оси вихря. Из выражения (32) для поляризации  $\mathbf{P}(\mathbf{R})$ , справедливого на больших расстояниях от оси, находим, что

$$q_{\text{pol}} = 2Aena_B^5 \frac{\gamma}{g} \frac{\hbar^2}{M\rho^4}, \quad \zeta \gg 1. \quad (35)$$

В случае  $\zeta \ll 1$  для вычисления поляризационного заряда необходимо использовать выражение (31), откуда следует, что при малых  $\zeta$  поляризационный заряд  $q_{\text{pol}} \sim -\rho^2 < 0$ . Распределение заряда в прямолинейном вихре имеет вид, показанный на рис. 1. Хотя, строго говоря, наша теория количественно неприменима в области  $\zeta \ll 1$ , она дает качественно правильный результат.

Так как в целом система остается электронейтральной, то полный объемный заряд вихря должен равняться нулю или компенсироваться поверхностным зарядом противоположного знака на поверхности системы. Полный поверхностный заряд равен интегралу по поверхности  $\int \mathbf{P} d\mathbf{S}$ . Из (34) следует, что при радиусе сосуда  $R \gg \xi$  нормальная к границе компонента  $P_n \sim 1/R^3$ , в результате поверхностный заряд на единицу длины сосуда равен  $P_n 2\pi R \sim \xi^2/R^2 \rightarrow 0$ . Таким образом, зануление полного поляризационного заряда происходит уже на расстояниях порядка длины когерентности (для гелия  $\xi \sim 3 \cdot 10^{-8}$  см).

Полезно получить выражение для поляризации вихревой нити на далеких расстояниях от оси вихря через скорость жидкости в вихре. Из (30) следует, что на далеких расстояниях от оси вихря (т.е. при  $\zeta \gg 1$ ) можно пренебречь в (26) слагаемым  $-(\hbar^2/2M)\nabla^2 f$  по сравнению с остальными. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\hbar^2}{2M} (\nabla\phi)^2 f - \mu f + gnf^3 = 0, \quad (36)$$

или

$$\frac{Mv^2}{2} + gnf^2 = \mu, \quad (37)$$

где  $\mathbf{v} = (\hbar/M)\nabla\phi$  — сверхтекущая скорость.

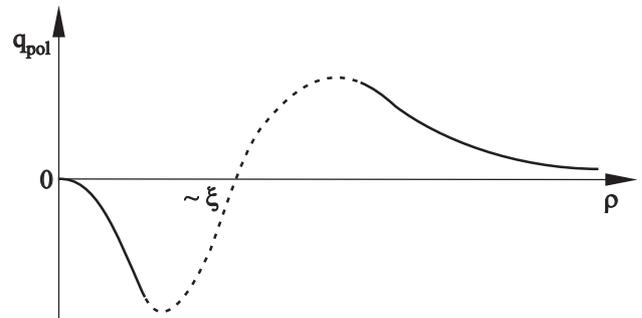


Рис. 1. Распределение заряда в прямолинейном вихре.

Дифференцируя выражение (37) по  $\mathbf{R}$ , получаем

$$\frac{d}{d\mathbf{R}} \left( \frac{Mv^2}{2} \right) = -gn \frac{d}{d\mathbf{R}} (f^2). \quad (38)$$

Отсюда следует искомое выражение для поляризации (32) на больших расстояниях от оси вихря ( $\zeta \gg 1$ )

$$\mathbf{P} = \frac{A\gamma e a_B^5 n}{g} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \left( \frac{Mv^2}{2} \right), \quad \zeta \gg 1, \quad (39)$$

где  $v$  — поле скоростей в системе. Полезность этого выражения в том, что оно справедливо не только для вихревой нити, а и для любого поля скоростей, в котором энергия  $(\hbar^2/2M)\nabla^2 f$  существенно меньше кинетической энергии  $Mv^2/2$ .

Кроме прямолинейных вихревых нитей, в сверхтекучей системе возможны возбуждения в виде вихревых колец. Поле скоростей вихревого кольца хорошо известно (см., например, [23]). Используя поле скоростей кольца, можно найти поляризацию как функцию координат.

Представляет интерес вопрос о полном дипольном моменте вихревого кольца. В литературе имеются противоречивые утверждения. Существуют мнения, что дипольный момент вихревого кольца отличен от нуля [9]. В работе [5] приведены аргументы в пользу того, что он равен нулю. Мы покажем, что наш микроскопический расчет подтверждает утверждение работы [5], что полный дипольный момент макроскопического вихревого кольца равен нулю.

Как следует из выражения для поля скоростей вихревого кольца [23], квадрат скорости вихревого кольца  $v^2 = v_\rho^2 + v_z^2$  является четной функцией от  $z$ , следовательно, его производная  $\partial(v^2)/\partial z$  — нечетная функция  $z$ . Из соображений симметрии следует, что дипольный момент кольца может быть направлен только по оси  $z$ . Однако  $P_z(z)$ , так же, как и  $\partial(v^2)/\partial z$ , — нечетная функция  $z$ , поэтому полный дипольный момент  $P_{\text{total}} = \int P_z dz d^2\rho \equiv 0$ . Предположение [9], что дипольный момент кольца может стать отличным от нуля при уменьшении радиуса кольца, кажется нам маловероятным.

### 3. Поляризация вихря в магнитном поле

Обратимся к вопросу об особенностях поляризации вихрей при наличии магнитного поля. Сразу отметим, что и при наличии магнитного поля все рассмотренные в предыдущем разделе явления сохраняются и остается справедливым выражение для поляризации вихря (32). Но, кроме того, возникают новые своеобразные эффекты.

Рассмотрим прямолинейную вихревую нить в магнитном поле, направленном вдоль ее оси. Поле скоростей нити имеет вид  $v = (\hbar/M)(1/\rho)$ , где  $\rho$  — расстоя-

ние до оси вихря. Крайне существенно, что дипольный момент в данном случае убывает как  $\rho^{-1}$ . Такой вид зависимости дипольного момента от расстояния до оси приводит к важному результату: в области, где плотность системы можно считать константой,  $\text{div } \mathbf{P} = 0$ . Это означает, что объемные поляризационные заряды отсутствуют во всем объеме системы, кроме малой области (радиусом порядка  $\xi$ ) вблизи оси вихря. Из условия электронейтральности следует, что заряд в коре вихря компенсируется поверхностным поляризационным зарядом, равным ему по величине и противоположным по знаку. Таким образом, в макроскопической системе положительная и отрицательная части поляризационного заряда разделяются на макроскопические расстояния.

Полный поверхностный поляризационный заряд на единицу длины вдоль оси  $z$ , равный  $\int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l}_n$  ( $d\mathbf{l}_n$  — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности наружу), не зависит от  $\rho$  и равняется

$$q_{\text{pol}}^{(L)} = \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l}_n = 2\pi\alpha \frac{\hbar}{Mc} Hn. \quad (40)$$

Более того, он не зависит от формы поверхности при условии, что она является цилиндрической. Действительно, интеграл  $\int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l}_n$  с учетом (11) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l}_n &= \frac{\alpha n}{c} \int [\mathbf{vH}] \cdot d\mathbf{l}_n = \frac{\alpha}{c} nH \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}_\tau = \\ &= \frac{\alpha}{c} nH \frac{\hbar}{M} \oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}_\tau. \end{aligned} \quad (41)$$

где  $d\mathbf{l}_\tau$  — единичный вектор, направленный по касательной к поверхности. Как известно, циркуляция скорости в вихревой нити не зависит от формы пути и квантуется:  $\oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}_\tau = 2\pi s$ , где  $s$  — положительное или отрицательное целое число, и, значит, квантуется величина заряда в коре. При  $s=1$  получаем выражение (40). Знак заряда зависит от направления магнитного поля и циркуляции вихря.

Для жидкого гелия ( $n = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ,  $M = 7 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ ,  $\alpha = 2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^3$ ) при  $H = 10^5 \text{ Гс}$  имеем линейную плотность заряда  $q_{\text{pol}}^{(L)} = 2.5 \cdot 10^{-2} e$  на 1 см длины нити. Если сосуд с гелием вращается с частотой  $\Omega$ , существенно превосходящей первую критическую частоту  $\Omega_c$ , плотность вихрей равна  $n_v = M\Omega/\pi\hbar$ , и полный заряд вихрей на единицу объема равен

$$Q = \frac{2\alpha n}{c} H\Omega. \quad (42)$$

Для He II в магнитном поле  $10^4 \text{ Гс}$  при скорости вращения гелия  $10^2 \text{ с}^{-1}$  плотность заряда порядка  $10^3 e \text{ см}^{-3}$ .

Мерой возникающих в системе зарядов является создаваемый ими электрический потенциал. Найдем разность потенциалов, создаваемую вихрем между

двумя точками, расположенными на разных расстояниях  $\rho_1$  и  $\rho_2$  от его оси. Сторонние заряды в системе отсутствуют, поэтому  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = 0$ . Дипольный момент в такой системе направлен по радиусу, следовательно, разность потенциалов равна интегралу вдоль радиуса

$$\delta\varphi = -4\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} P d\rho.$$

Такая разность потенциалов может быть обнаружена, например, при вращении сверхтекучего гелия между двумя коаксиальными проводящими цилиндрами радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . В этом случае центр вихря находится вне гелия на оси коаксиальных цилиндров. Поле скоростей в такой системе будет в точности совпадать с полем скоростей, создаваемым вихрем, с тем отличием, что заряд вихря теперь «переходит» на внутреннюю поверхность гелия, сохраняя свою величину.

Потенциал, создаваемый вихрем в магнитном поле, совпадает с потенциалом однородно заряженной нити  $\delta\varphi = 2q_{\text{pol}}^{(L)} \ln(\rho_2/\rho_1)$  с линейной плотностью заряда  $q_{\text{pol}}^{(L)}$  из (40). Разность потенциалов слабо зависит от  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , что позволяет обнаружить ее, даже если электроды находятся на макроскопических расстояниях от оси вихря. Используя приведенные выше данные для жидкого гелия, находим, что в поле  $H = 10^4$  Гс при  $\rho_1 = 0,1$  см и  $\rho_2 = 1$  см один вихрь создает разность потенциалов  $\delta\varphi \approx 10^{-9}$  В. При наличии в системе некоторого количества вихрей с одинаковой циркулирующей разность потенциалов умножится на количество вихрей.

В отсутствие магнитного поля зависимость потенциала от расстояния до оси иная. Используя выражение для поляризации (32), находим

$$\delta\varphi = 2\pi A e n_0 a_B^5 \frac{\gamma \hbar^2}{g M} \left( \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right).$$

В отличие от потенциала вихря в магнитном поле, в этом случае потенциал не содержит большой величины  $c$  в знаменателе, но быстро убывает с расстоянием до оси. Уже при  $\rho_1 = 10^{-4}$  см (и при много большем  $\rho_2$ ) разность потенциалов имеет порядок величины  $10^{-12}$  В.

Выше шла речь о влиянии на квантованный вихрь магнитного поля. Любопытная трансформация происходит при замене магнитного поля на электрическое, также направленное вдоль оси вихря. Действительно, как известно, при движении диэлектрической среды со скоростью  $\mathbf{v}$  между магнитной индукцией  $\mathbf{B}$ , напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H}$  и напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$  имеет место соотношение [24]

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} [\mathbf{E}\mathbf{v}]. \quad (43)$$

Поскольку в отсутствие внешнего магнитного поля индукция  $\mathbf{B}$  должна равняться нулю, то из (43) следует, что движение жидкости в вихре приводит к появлению в системе магнитного поля  $\mathbf{H}$ , причем поток этого поля через поверхность цилиндра с осью, параллельной оси вихря, в случае магнитной проницаемости  $\mu = 1$  и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon = 1 + 4\pi n\alpha$  равняется (на единицу длины вихревой нити)

$$\Phi \equiv \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_n = \frac{4\pi n\alpha}{c} E \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}_\tau = 4\pi n\alpha E \frac{\hbar}{Mc} 2\pi s. \quad (44)$$

Здесь  $s$  — целое число. Мы видим, что с вихрем связан магнитный поток, величина которого не зависит от площади и формы поверхности (при условии, что она остается цилиндрической). Величина возникающего магнитного потока при  $E = 10^5$  В/см равна  $5 \cdot 10^{-13}$  Гс·см<sup>2</sup> на 1 см длины вихря.

Отметим в заключение, что с вихрем должен быть связан магнитный поток и в отсутствие внешнего электрического поля [7]. Как показано в [7], вихрь порождает магнитное поле, параллельное его оси. Величина магнитного потока, связанного с этим полем, порядка  $10^{-18}$  Гс·см<sup>2</sup>.

#### 4. Поляризация одномерного солитона

В последние годы активно обсуждается интересное явление, названное «supersolid» — сверхтекучесть в твердом гелии. Это явление было предсказано сорок лет назад Андреевым и Лифшицем [25], которые обратили внимание на возможность существования квантовых кристаллов, у которых в основном состоянии число узлов больше, чем число атомов. В кристаллах, образованных бозонами, нулевые вакансии ведут себя, как бозевские квазичастицы, и при низких температурах они должны перейти в сверхтекучее состояние. Именно поэтому состояние, предсказанное Андреевым и Лифшицем, назвали «supersolid». Многочисленные экспериментальные попытки обнаружить это явление не привели к желаемым результатам. Однако в 2004 г. Ким и Чен [26] выполнили эксперименты, в которых они обнаружили неклассическую инерцию кристаллов <sup>4</sup>He. Эта инерция проявляет себя в снижении периода колебаний торсионного осциллятора, заполненного твердым гелием. Такое снижение означает, что кристаллы <sup>4</sup>He не вращаются, как твердое тело, и определенная (сверхтекучая) фракция атомов не участвует во вращении. Дальнейшие эксперименты показали, что доля атомов, не участвующих во вращении, существенно зависит от беспорядка в кристаллах [27]. Один из авторов [28] предположил, что нулевые вакансии могут возникнуть в корях дислокаций. В результате оказывается возможной сверхтекучесть вдоль линий дислокаций. Хотя вопрос о сверхтекучести в одномерных системах является дискуссионным, в реальных

кристаллах между дислокациями есть пересечения, и они образуют трехмерную сетку. В такой трехмерной сетке возможна истинная сверхтекучесть, и температура перехода в сверхтекучее состояние будет зависеть от характерной длины шага сетки. Оказывается, что в довольно широком интервале температур выше температуры сверхтекучего перехода должно существовать своеобразное квазисверхтекучее состояние [29]. В этом состоянии затухание потоков связано с появлением на линиях дислокаций так называемых центров проскальзывания фазы (ЦПФ). ЦПФ возникают из разрежений, движущихся по одномерной системе, когда они превращаются в неподвижную полость. В случае, когда поведение системы вакансионнов на линии дислокации можно описывать уравнением Гросса–Питаевского, ЦПФ представляет собой неподвижный солитон. При этом профиль плотности атомов вдоль линии дислокации имеет вид [30]

$$n^{(L)}(z) = n_0^{(L)} \left( 1 - B \operatorname{sech}^2 \left( \frac{z}{2\xi} \right) \right), \quad (45)$$

где  $0 \leq B \leq 1$ . Линейная плотность дипольного момента

$$P_z^{(L)} = A e n a_B^5 \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{A e a_B^5 n_0^2 B}{\xi} \left( 1 - B \operatorname{sech}^2 \frac{z}{2\xi} \right) \times \operatorname{sech}^2 \frac{z}{2\xi} \operatorname{th} \frac{z}{2\xi}. \quad (46)$$

Эта функция является нечетной функцией  $z$ , поэтому полный дипольный момент, т.е.  $\int P_z^{(L)} dz$ , обращается в нуль. Ситуация аналогична рассмотренному ранее случаю с вихревой нитью в трехмерной системе.

Поляризационный заряд вдоль нити определяется в одномерном варианте соотношением  $q_L(z) = -\partial P_z^{(L)} / \partial z$ . Из (46) следует, что вблизи точки  $z = 0$  на длине порядка  $\xi$  в обе стороны поляризационный заряд является отрицательным, затем он меняет знак и экспоненциально убывает.

Зная распределение заряда, можно найти распределение электрического потенциала вблизи одномерного солитона:

$$\varphi(z, \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_L(z')}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}} dz', \quad (47)$$

где  $z$  и  $\mathbf{p}$  — цилиндрические координаты точки, в которой ищется потенциал (начало координат по  $\mathbf{p}$  берется на оси солитона),  $q_L(z)$  — линейная плотность поляризационного заряда. Используя явный вид функции  $q_L(z)$ , легко показать, что  $\varphi(z)$  — четная функция  $z$ , которая локализована на интервале шириной порядка  $\xi$  в окрестности  $z = 0$  и при  $z \gg \xi$  экспоненциально стремится к нулю. Разность потенциалов между макроскопически удаленными точками по разные стороны от солитона равна нулю.

### 5. Поверхностный дипольный момент

В реальных условиях гелий всегда находится в сосуде. Взаимодействие атомов гелия со стенками сосуда приводит к появлению поверхностного дипольного момента. Чтобы качественно исследовать происходящие вблизи поверхности явления, воспользуемся рассмотренной нами моделью бозе-газа электрон-дырочных пар.

Рассмотрим пару вблизи границы со средой с проницаемостью  $\varepsilon_2$ . Проницаемость электрон-дырочной среды ввиду ее разреженности будем считать равной  $\varepsilon_1 = 1 + 4\pi n \alpha$ , где  $\alpha = (9/2)a_B^3$  — поляризуемость пары. Потенциал взаимодействия пары с поверхностью находим по методу электрических изображений (см., например, [24])

$$V = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{e^2}{\varepsilon_1} \left( -\frac{1}{2(Z+z_1)} - \frac{1}{2(Z+z_2)} + \frac{2}{\sqrt{\rho^2 + (2Z+z_1+z_2)^2}} \right). \quad (48)$$

Мы видим, что потенциал зависит как от координаты центра масс  $Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$ , так и от относительных координат  $\mathbf{p}, z$  ( $z = z_1 - z_2$ ).

Нас интересует случай, когда расстояние до поверхности является большим по сравнению с размером пары:  $Z \gg z \sim a_B$ , однако не настолько большим, чтобы начали проявляться эффекты запаздывания. Это означает, что  $Z$  предполагается малым по сравнению с длинами волн в спектрах взаимодействующих атомов. Раскладывая  $V$  в ряд по малому параметру  $a_B/Z$ , получаем

$$V = \frac{1}{16} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{e^2}{\varepsilon_1} \frac{1}{Z^3} (\rho^2 + 2z^2) \left( -3\gamma \frac{z}{Z} - 2 \right). \quad (49)$$

Этот потенциал появляется в уравнении для  $\varphi^{(2)}$  и изменяет вид как функции  $\varphi(\mathbf{r})$ , так и параметра порядка  $\Psi(\mathbf{R})$ . Функцию  $\varphi^{(2)}(\mathbf{r})$  ищем вариационным методом, выбирая пробную функцию в виде

$$\varphi^{(2)} = C \varphi_0(\mathbf{r}) \left[ \lambda_2 \frac{z}{Z^2} + \lambda_3 \frac{\rho^2}{Z^3} + \lambda_3' \frac{z^2}{Z^3} + 3\lambda_4 \frac{\rho^2 z}{Z^4} + 3\lambda_4' \frac{z^3}{Z^4} \right]. \quad (50)$$

Здесь  $C$  — нормировочная константа,  $\lambda_i$  — вариационные параметры,  $\varphi_0$  — волновая функция основного состояния пары.

Наличие в (50) нечетных по  $z$  слагаемых приводит к появлению у поверхностных атомов дипольного момента. Минимизируя энергию  $E = \langle \varphi | H_0 + V | \varphi \rangle$ , находим вариационные параметры  $\lambda_i$ . Используя найденную таким образом волновую функцию  $\varphi^{(2)}$ ,

получаем, что атом приобретает дипольный момент, направленный по нормали к поверхности.

$$P_z = n \langle \varphi | ez | \varphi \rangle \approx 12,5n \frac{e}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \gamma \frac{a_B^5}{Z^4}. \quad (51)$$

Поскольку  $\gamma = (m_h - m_e)/(m_h + m_e)$ , то из (51) видно, что при равных массах электрона и дырки ( $\gamma = 0$ ) поверхностный дипольный момент равен нулю, как и объемный дипольный момент.

Появление дипольного момента у атома на поверхности среды при  $m_h \gg m_e$  было предсказано ранее в работах [31–33].

В работе [31] дипольный момент атома на поверхности среды также вычислялся с помощью метода электрических изображений, однако с другой вариационной функцией:  $\varphi = C\varphi_0(1 + \lambda z)$ . Полученный в [31] результат отличается от (51) численным коэффициентом — вместо 12,5 стоит 4,5. Отметим, что наша вариационная функция (50) дает более низкое значение энергии и, следовательно, является более точной.

Метод работы [32] основан на вычислении потенциала осциллирующего заряда вблизи поверхности по теории возмущений с зависимостью от времени. Для атома на поверхности металла в приближении хаотических фаз получен результат

$$P_z = -\frac{1}{8} \frac{\alpha^2 C \hbar \omega_a}{e Z^4},$$

где  $\omega_a$  — частота возбуждения атома,  $C$  — численный коэффициент. Расчет для атома водорода вблизи металла ( $C = 9/2$ ,  $\alpha = 4,5a_B^3$ ,  $\hbar\omega_a = e^2/2a_B$ ) дает значение дипольного момента  $P_z = 5,7ne a_B^5/Z^4$ . Это согласуется с результатом (51) при учете, что для металла  $\varepsilon_2 = \infty$ .

В работе [33] рассчитаны вклады неоднородной части длинноволновых электромагнитных флуктуаций в межатомное взаимодействие в газах и жидкостях. И этот метод дает результат, аналогичный (51), с численным коэффициентом, близким к 10.

В дальнейшем мы будем считать, что  $m_h \gg m_e$ . При этом вблизи металлической поверхности ( $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ ) дипольный момент  $P_z > 0$ , т.е. электроны пар находятся ближе к поверхности, чем дырки. Вблизи границы с вакуумом ( $\varepsilon_2 \equiv 1$ ) реализуется противоположный случай. Следовательно, в пленке жидкости на металлической стенке сосуда дипольные моменты на обеих границах направлены в одну сторону.

Зависимость потенциала  $V$  от  $Z$  приводит к изменению условия разрешимости уравнения для  $\varphi^{(2)}$ . Условие разрешимости приобретает вид уравнения Гросса–Питаевского с потенциальной энергией, зависящей от  $Z$ .

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{R}_{12}^2} - \mu_1 \Psi - \frac{1}{2\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{e^2 a_B^2}{Z^3} \Psi + g |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (52)$$

Отметим, что при  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$  (для поверхности металла) численный коэффициент при  $1/Z^3$  в потенциальной энергии равняется  $2,3 \cdot 10^4 \text{ K} \cdot \text{Å}^3$ . В литературе [23] приведены экспериментальные значения данного коэффициента для взаимодействия гелия с диэлектриками: для  $\text{CaF}_2$  —  $10^3 \text{ K} \cdot \text{Å}^3$ , для стекла —  $1,25 \cdot 10^3 \text{ K} \cdot \text{Å}^3$ . Эти значения согласуются с найденным, если учесть, что в экспериментах гелий взаимодействует с диэлектриком с конечной проницаемостью  $\varepsilon_2$ .

При решении уравнения (52) воспользуемся тем же приближением, что и при расчете дипольного момента вихревой нити — пренебрежем слагаемым с лапласианом по сравнению с остальными (приближение Тома–Ферми). Получаем

$$|\Psi|^2 = n + \frac{1}{g} \left( \frac{1}{2\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{e^2 a_B^2}{Z^3} \right). \quad (53)$$

Тот факт, что благодаря ван-дер-ваальсовому взаимодействию с поверхностью плотность атомов вблизи поверхности имеет добавку, растущую при приближении к поверхности как  $1/Z^3$ , хорошо известен (см., например, [23]). Мы подтвердили этот результат в нашей модели и нашли явное выражение для численного коэффициента.

Подставляя полученное выражение для  $|\Psi|^2$  из (53) в (13), находим добавку к дипольному моменту, обусловленную неоднородностью системы.

$$P_z \approx -13,2 \frac{\gamma}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} en \frac{a_B^5}{Z^4}. \quad (54)$$

Это выражение имеет такую же зависимость от расстояния до поверхности, как и  $P_z$  в выражении (51), но противоположный знак.

Полный дипольный момент получается сложением выражений (51) и (54).

$$P_z \approx -0,7 \frac{\gamma}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} en \frac{a_B^5}{Z^4}. \quad (55)$$

Полученный знак дипольного момента связан с тем, что численный коэффициент в (54) больше, чем в (51). Нужно, однако, учесть замечание, сделанное непосредственно после выражения (13), о возможности смены знака у поляризации в жидком гелии, обусловленной притяжением между атомами. Если такая смена знака действительно имеет место, то это приведет и к смене знака в выражении (55).

### Заключение

Настоящая работа появилась как попытка объяснения физической причины наблюдавшихся в работах [1,2] явлений. Чтобы максимально уменьшить количество допущений, мы рассмотрели точно решаемую модель слабонеидеального поляризуемого бозе-газа электрон-дырочных пар. Единственное допущение, которое содержится в теории, — это вид волновой функции основного состояния, предложенный Келдышем. Такая волновая функция является естественным обобщением волновой функции БКШ и, на первый взгляд, должна адекватно описывать систему положительно и отрицательно заряженных частиц. Однако, если между массами  $m_e$  и  $m_h$  выполняется неравенство  $m_h \gg m_e$ , то, как отмечено в работе [34], в этом случае задача о взаимодействии двух электрон-дырочных пар принципиально не отличается от задачи о взаимодействии двух атомов водорода, которые, как хорошо известно, образуют молекулу водорода. При  $m_h \approx m_e$  энергия нулевых колебаний пар порядка энергии их связи в молекуле, что способствует развалу молекулы [34]. Таким образом, количественно представленная микроскопическая теория может описывать лишь систему, в которой  $m_h$  и  $m_e$  одного порядка, но мы надеемся, что эта теория качественно правильно описывает систему, в которой  $m_h \gg m_e$ , в частности сверхтекучий  $^4\text{He}$ .

Нам представляется, что мы получили правильные порядки величин для поляризации, связанной с квантованными вихрями, которые, естественно, имеют место лишь в сверхтекучих системах. Появление поляризации вблизи поверхности гелия, хотя оно получено для сверхтекучего газа, должно иметь место как в сверхтекучей, так и в нормальной фазе. Влияние сверхтекучего перехода на поверхностную поляризацию будет происходить только через изменение плотности с изменением температуры. В этой связи мы хотим отметить работу [13], в которой автор пытается связать наблюдаемые в [1,2] эффекты с поверхностным дипольным моментом. Автор [13] исходит из предположения, что при сверхтекучем переходе меняется «смачивание» поверхности жидким гелием. По его допущению, это должно существенно изменять величину поверхностного дипольного момента, что, в свою очередь, будет приводить к появлению наблюдаемых электрических явлений. Но изменение смачивания означает изменение энергии взаимодействия атомов гелия с поверхностью, для чего при сверхтекучем переходе мы не видим никаких оснований. В литературе [12,14] имеются предположения, что некоторые из наблюдаемых явлений обусловлены необычными свойствами ротона (например, с наличием у ротона квадрупольного момента). Так как число ротонных в системе определяется величиной ротонной щели, а щель у по-

верхности, как отмечалось в ряде работ [35,36], уменьшается, то это означает, что поверхностные эффекты могут вносить заметный вклад в наблюдаемые явления. Описание свойств ротонных находится за пределами изложенной теории, поскольку квазичастицы разреженного бозе-газа имеют боголюбовский спектр, а не спектр Ландау.

В заключение авторы пользуются возможностью выразить благодарность Л.А. Пастуру за обсуждение результатов работы. Мы также признательны В.Д. Нацкику за ряд весьма полезных дискуссий.

1. А.С. Рыбалко, *ФНТ* **30**, 1321 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 994 (2004)].
2. А.С. Рыбалко, С.П. Рубец, *ФНТ* **31**, 820 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 623 (2005)].
3. А.М. Косевич, *ФНТ* **31**, 50 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 37 (2005)].
4. L.A. Melnikovsky, *J. Low Temp. Phys.* **148**, 559 (2007).
5. В.Д. Нацик, *ФНТ* **31**, 1201 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 915 (2005)].
6. В.Д. Нацик, *ФНТ* **33**, 1319 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 999 (2007)].
7. В.Д. Нацик, *ФНТ* **34**, 625 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 493 (2008)].
8. Э.А. Пашицкий, С.М. Рябченко, *ФНТ* **33**, 12 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 8 (2007)].
9. В.М. Локтев, М.Д. Томченко, *ФНТ* **34**, 337 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 262 (2008)].
10. V.M. Loktev and M.D. Tomchenko, *arXiv:0903.2153v3*, 8 Oct 2009.
11. M.D. Tomchenko, *arXiv:0903.4538v1*, 26 Mar 2009; *0903.4538v3*, 1 Nov 2009.
12. В.П. Минеев, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 866 (2009).
13. Е.Д. Гутлянский, *ФНТ* **35**, 956 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 748 (2009)].
14. L.A. Melnikovsky, *arXiv:0808.1188v1*, 8 Aug 2008.
15. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009).
16. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 186 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 146 (2010)].
17. Л.В. Келдыш, в: *Проблемы теоретической физики*, Наука, Москва (1972).
18. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
19. С.И. Шевченко, *Письма в ЖЭТФ* **28**, 112 (1978).
20. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3312 (1995).
21. U. Leonhardt and P. Piwnicki, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2426 (1999).
22. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1978), ч. 2, гл. 3.
23. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Приложение, Мир, Москва (1978).
24. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

25. А.Ф. Андреев, И.М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **56**, 2057 (1969).
26. E. Kim and M. Chan, *Nature (London)* **427**, 225 (2004).
27. A.S. Rittner and J.D. Reppy, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 165301 (2006).
28. С.И. Шевченко, *ФНТ* **13**, 115 (1987) [*Sov. Low Temp. Phys.* **13**, 61 (1987)].
29. С.И. Шевченко, *ФНТ* **14**, 1011 (1988) [*Sov. Low Temp. Phys.* **14**, 553 (1988)].
30. T. Tsuzuki, *J. Low Temp. Phys.* **4**, 441 (1971).
31. P.R. Antoniewicz, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 1424 (1974).
32. B. Linder and R.A. Kromhout, *Phys. Rev.* **B13**, 1532 (1976).
33. Г.Н. Салистра, *ЖЭТФ* **87**, 1713 (1984).
34. Л.В. Келдыш, А.Н. Козлов, *ЖЭТФ* **54**, 979 (1968).
35. В.Н. Бондарев, *Письма в ЖЭТФ* **33**, 511 (1981).
36. W. Thomlinson, J.A. Tarvin, and L. Passell, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 266 (1980).

### About electric polarization of inhomogeneous superfluid systems

S.I. Shevchenko and A.S. Rukin

The problem of electric polarization of superfluid systems caused by their inhomogeneity is studied by using the model of rarefied electron-hole gas which

was studied by the authors. Microscopical calculation of the polarization of quantized vortices is made with and without external magnetic field. In magnetic field the vortices acquire an additional polarization, resulting in the appearance of a quantized charge in the vortex cores. It is shown that the Van der Waals interaction of the superfluid system with a solid surface leads to appearance of polarization in the vicinity of the surface. It is found that the results obtained allow a possible polarization of the medium on its irregular motion to be predicted.

PACS: **67.90.+z** Other topics in quantum fluids and solids;  
**67.25.D-** Superfluid phase.

Keywords: polarization, superfluid systems, inhomogeneity, quantum vortexes, surface polarization.