

Сверхпроводимость электрон-дырочных пар в двухслойной графеновой системе в квантующем магнитном поле

Д.В. Филь, Л.Ю. Кравченко

Институт монокристаллов НАН Украины, пр. Ленина, 60, г. Харьков, 61001, Украина
E-mail: fil@isc.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 3 июня 2009 г.

Изучено состояние со спонтанной межслоевой фазовой когерентностью в двухслойной квантовой холловской системе на основе графена. Данное состояние можно рассматривать как газ сверхтекучих электрон-дырочных пар с компонентами пары, принадлежащими разным слоям. Сверхтекучий поток таких пар эквивалентен двум электрическим сверхтокам в слоях. Показано, что в графеновой системе состояние с межслоевой фазовой когерентностью возникает, если создан определенный разбаланс факторов заполнения уровней Ландау в соседних слоях. Найдены температура перехода в сверхтекучее состояние, максимальное расстояние между слоями, при котором возможна фазовая когерентность, а также критические значения сверхтока. Обсуждаются преимущества использования графеновых систем вместо GaAs гетероструктур для реализации двухслоевой электрон-дырочной сверхпроводимости.

Вивчено стан зі спонтанною міжшаровою фазовою когерентністю у двошаровій квантовій холлівській системі на основі графену. Даний стан можна розглядати як газ надплинних електрон-діркових пар з компонентами пари, які належать різним шарам. Надплинний потік таких пар еквівалентний двом електричним надструмам у шарах. Показано, що в графеновій системі стан з міжшаровою фазовою когерентністю виникає, якщо створено певний розбаланс факторів заповнення рівнів Ландау у сусідніх шарах. Знайдено температуру переходу у надплинний стан, максимальну відстань між шарами, при якій можлива фазова когерентність, а також критичні значення надструму. Обговорюються переваги використання графенових систем замість GaAs гетероструктур для реалізації двошарової електрон-діркової надпровідності.

PACS: 71.35.Ji Экситоны в магнитном поле; магнитные экситоны;
73.21.-b Электронные состояния и коллективные возбуждения в многослойных структурах, квантовые ямы, мезоскопические и наномасштабные системы;
73.63.-b Электронный перенос в наномасштабных материалах и структурах.

Ключевые слова: двухслойная система, межслоевая фазовая когерентность, графен, магнетоэкситон.

1. Введение

Экспериментальное открытие графена [1] послужило стимулом для проведения широкомасштабных исследований электронных свойств проводников с дираковским законом дисперсии носителей заряда. С одной стороны, такие исследования носят несомненный фундаментальный характер. С другой стороны, уникальность свойств графена делает его чрезвычайно интересным материалом с точки зрения различных практических приложений.

В настоящей работе рассмотрим вопрос о перспективах применения графена для реализации сверхпроводимости связанных электрон-дырочных пар в системе двух двумерных проводников, разделенных диэлектриком. Идея о возможности такой сверхпроводимости высказана достаточно давно [2,3]. Рассматривалась система, представляющая собой сэндвич двумерный полупроводник *n*-типа–диэлектрик–двумерный полупроводник *p*-типа. Несколько позже было установлено [4,5], что аналогичное явление можно реализовать в полупроводниковой гетероструктуре с

двумя квантовыми ямами (квазидвумерными электронными слоями). Если такая система помещена в перпендикулярное слоям квантующее магнитное поле (реализован режим квантового эффекта Холла) и суммарный фактор заполнения уровней Ландау равен единице ($\nu_1 + \nu_2 = 1$, где ν_i — фактор заполнения в слое), происходит спаривание электронов одного слоя с дырками (незаполненными состояниями на нижнем уровне Ландау) другого слоя. Эти пары являются бозонами, и при понижении температуры газ таких пар может переходить в сверхтекучее состояние. Ввиду двумерности газа пар переход будет происходить по механизму Березинского–Костерлица–Таулеса. Поскольку электронная и дырочная компоненты пар принадлежат разным слоям, сверхтекучий поток электрически нейтральных пар эквивалентен двум электрическим сверхтокам противоположного направления в соседних слоях.

Для описания такого состояния (которое получило название состояние со спонтанной межслоевой фазовой когерентностью) широко используется аналогия с квантовым ферромагнетиком [6–10]. Указанная аналогия позволяет, в рамках единого подхода, рассмотреть как случай нулевого разбаланса факторов заполнения слоев ($\nu_1 = \nu_2 = 1/2$), так и ситуацию с ненулевым разбалансом ($\nu_1 = \nu$, $\nu_2 = 1 - \nu$, $\nu \neq 1/2$), который, например, возникает за счет внешнего электростатического поля затвора. В случае предельно большого разбаланса ($\nu \ll 1$) систему можно описывать как разреженный газ бозонов (магнетоэкситонов) с диполь-дипольным взаимодействием. Такой подход был развит в работах [11–15]. Отметим, что и экспериментальные исследования двухслойной электрон-дырочной сверхпроводимости проводились в основном на квантовых холловских системах [16–23].

Сверхпроводимость электрон-дырочных пар в системе графен–диэлектрик–графен изучалась в работах [24–30]. В [24–27,29] была рассмотрена возможность такого спаривания в отсутствие перпендикулярного слоям магнитного поля (не в режиме квантового эффекта Холла). В отсутствие магнитного поля условием БКШ спаривания электронов и дырок является совпадение их ферми-поверхностей. В случае полупроводников с квадратичным законом дисперсии носителей заряда последнее требует равенства эффективных масс электронов и дырок. В случае дираковского спектра носителей (который реализуется в графене) требуемое условие на ферми-поверхности выполняется автоматически. В пренебрежении экранированием теория предсказывает очень высокую (сотни градусов) температуру перехода в сверхпроводящее состояние в такой системе [24,29]. С учетом экранирования оценка для температуры перехода значительно менее оптимистична и лежит в области милликельвинов [26,27].

В квантовой холловской системе эффекты экранирования должны быть не столь существенными, что позволяет надеяться достичь высоких температур перехода в сверхпроводящее состояние. Кроме того, сам квантовый эффект Холла в графене наблюдается при высоких (вплоть до комнатных) температурах [31]. Вопрос о сверхпроводимости газа магнетоэкситонов в двухслойной графеновой системе был рассмотрен в [28,30]. Подход, используемый в работах [28,30], применим лишь к случаю низкой плотности магнетоэкситонов ($\nu \ll 1$). Но случай низкой плотности не оптимален с точки зрения достижения высоких температур перехода. Более вероятно, что максимальным критическим температурам будет отвечать случай половинного заполнения уровней Ландау в каждом из слоев. Анализ этой проблемы и посвящена настоящая работа.

2. Состояние с межслоевой фазовой когерентностью в двухслойной графеновой системе

Стартовой точкой для изучения электрон-дырочного спаривания в квантовой холловской системе является гамильтониан кулоновского взаимодействия, записанный в приближении нижнего (активного) уровня Ландау. Поэтому начнем с получения искомого гамильтониана для графеновой системы.

Для описания свойств электронной подсистемы графена в магнитном поле будем следовать подходу, подробно изложенному в обзоре [32] (см. также [33]). Графен имеет кристаллическую структуру типа пчелиных сот, которая может быть представлена как совокупность вложенных друг в друга простых треугольных подрешеток A и B . Расстояние между ближайшими атомами углерода a (которые принадлежат разным подрешеткам) равно $1,42 \text{ \AA}$. В приближении сильной связи и с учетом туннелирования только между ближайшими узлами гамильтониан системы имеет вид

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} (a_{i,\sigma}^{\dagger} b_{j,\sigma} + \text{h.c.}), \quad (1)$$

где $a_i^{\dagger}, b_i^{\dagger}$ (a_i, b_i) — операторы рождения (уничтожения) электронов на i -м узле подрешетки A и B соответственно, $t \approx 2,8 \text{ эВ}$ — амплитуда туннелирования, σ — спиновый индекс.

Записав гамильтониан (1) в импульсном представлении, легко убедиться, что энергетическая зона разделяется на две подзоны, имеющие только две неэквивалентные точки соприкосновения $\mathbf{K} = (2\pi/3a, 2\pi/3\sqrt{3}a)$ и $\mathbf{K}' = (2\pi/3a, -2\pi/3\sqrt{3}a)$ (ось x направлена вдоль линии, соединяющей какую-либо пару ближайших узлов). В недопированном графене (содержащем один свободный электрон на узел) уровень Ферми прохо-

дит через точки соприкосновения этих подзон. Соответственно, подзоны можно интерпретировать как электронную и дырочную зоны. В связи с такой структурой спектра низкоэнергетичные возбуждения в недопированном и слабодопированном графене можно описать, введя псевдоспиновый индекс $\alpha = \pm 1$, отвечающий состояниям, квазиимпульсы которых лежат вблизи \mathbf{K} и \mathbf{K}' . В низкоэнергетичной области гамильтониан диагонален по псевдоспиновым индексам. Предполагается также, что отсутствуют взаимодействия, нарушающие диагональность по спину. Собственные квантовые состояния такого гамильтониана обладают определенным значением спина и псевдоспина.

Уравнение Шредингера для таких состояний, записанное в координатном представлении, имеет вид

$$-i\hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} - i\alpha \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + i\alpha \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix}_{\alpha,\sigma} = E \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix}_{\alpha,\sigma}, \quad (2)$$

где $v_F = 3ta/2\hbar$. Для графена указанный параметр равен $\approx 10^8$ см/с. Электронное состояние представляет собой спинор, компоненты которого отвечают подре-

шеткам A и B . Переходя в (2) к импульсному представлению, находим спектр в виде $E = \pm \hbar v_F k$ (k — модуль волнового вектора, отсчитанный от точки \mathbf{K} или \mathbf{K}'). Как видно, величина v_F есть скорость электронов на поверхности Ферми. Для фермионов с таким спектром эта скорость не зависит от концентрации носителей.

В перпендикулярном графену магнитном поле уравнение Шредингера (2) принимает вид

$$-i\hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha e B x}{\hbar c} - i\alpha \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\alpha e B x}{\hbar c} + i\alpha \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) дает энергии уровней Ландау в графене $E_0 = 0$, $E_{\pm N} = \pm (\hbar v_F / \ell) \sqrt{2N}$, где $\ell = \sqrt{\hbar c / eB}$ — магнитная длина, и $N = 1, 2, \dots$. В (3) мы пренебрегаем зеемановским слагаемым, поскольку величина зеемановского расщепления при разумных значениях магнитного поля значительно меньше расстояния между уровнями Ландау. Собственные функции $\Psi_{N,\alpha,k}$, отвечающие нулевому и $\pm N$ -м уровням Ландау, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{0,-1,k}(x,y) &= \frac{e^{-iky}}{\pi^{1/4} \sqrt{\ell L_y}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\ell^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \Psi_{0,+1,k}(x,y) &= \frac{e^{-iky}}{\pi^{1/4} \sqrt{\ell L_y}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\ell^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \Psi_{\pm N,-1,k}(x,y) &= \frac{e^{-iky}}{\pi^{1/4} \sqrt{\ell L_y} \sqrt{2^{N+1} N!}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\ell^2}} \begin{pmatrix} \mp H_N \left(\frac{x-X}{\ell} \right) \\ i\sqrt{2N} H_{N-1} \left(\frac{x-X}{\ell} \right) \end{pmatrix}, \\ \Psi_{\pm N,+1,k}(x,y) &= \frac{e^{-iky}}{\pi^{1/4} \sqrt{\ell L_y} \sqrt{2^{N+1} N!}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\ell^2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2N} H_{N-1} \left(\frac{x-X}{\ell} \right) \\ \mp H_N \left(\frac{x-X}{\ell} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $X = k\ell^2$, и $H_N(x)$ — полином Эрмита. Степень вырождения уровня Ландау равна $4S/(2\pi\ell^2)$, где $S = L_x L_y$ — площадь слоя. Множитель 4 возникает за счет двукратного вырождения по спину и двукратного вырождения по индексу α . Введем фактор заполнения уровня $\nu = 2\pi\ell^2 n$, где n — концентрация заполненных состояний. Полностью заполненный уровень соответствует $\nu = 4$. В недопированном графене химический потенциал совпадает с нулевым уровнем Ландау, поэтому отрицательные уровни заполнены полностью, положительные уровни пустые, а нулевой уровень заполнен наполовину (имеет фактор заполнения 2).

Рассмотрим систему двух графеновых слоев, разделенных диэлектриком толщиной d с диэлектрической проницаемостью ϵ . Чтобы не вносить в задачу принципиальные осложнения, будем считать, что система находится внутри диэлектрической матрицы с той же ϵ . Гамильтониан кулоновского взаимодействия в такой системе имеет вид

$$H_C = \frac{1}{2} \sum_{i,i'} \int d^2 r d^2 r' V_{i,i'}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\rho}_i(\mathbf{r}) \hat{\rho}_{i'}(\mathbf{r}'), \quad (6)$$

$V_{i,i'}(r) = e^2/(\epsilon\sqrt{r^2 + d^2(i-i')^2})$ — кулоновский потенциал, $\hat{\rho}_i(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha,\sigma} \hat{\Psi}_{i,\alpha,\sigma}^+ \hat{\Psi}_{i,\alpha,\sigma}(\mathbf{r})$ — оператор электронной плотности, $i = 1, 2$ — индекс слоя, $\hat{\Psi}_{i,\alpha,\sigma}^+$ и $\hat{\Psi}_{i,\alpha,\sigma}(\mathbf{r})$ — операторы рождения и уничтожения электрона в точке \mathbf{r} с заданными значениями спина и псевдospина.

Представим операторы $\hat{\Psi}^+$, $\hat{\Psi}$ через операторы рождения и уничтожения электронов в квантовых состояниях (4), (5). Если расстояние между уровнями Ландау много больше кулоновской энергии $e^2/(\epsilon\ell)$, то в данном разложении достаточно учесть лишь один активный (частично заполненный) уровень Ландау

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{i,\alpha,\sigma}(x, y) &= \sum_k \Psi_{\lambda,\alpha,k}(x, y) a_{i,k,\alpha,\sigma}, \\ \hat{\Psi}_{i,\alpha,\sigma}^+(x, y) &= \sum_k \Psi_{\lambda,\alpha,k}^+(x, y) a_{i,k,\alpha,\sigma}^+, \end{aligned} \quad (7)$$

где λ — номер активного уровня, $\Psi_{\lambda,\alpha,k}^+$ — двухкомпонентные вектор-матрицы, определяемые уравнениями (4), (5), $\Psi_{\lambda,\alpha,k}$ — эрмитово-сопряженные матрицы, $a_{i,k,\alpha,\sigma}^+$, $a_{i,k,\alpha,\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения электронов в состоянии с соответствующими квантовыми числами на уровне λ .

В этом приближении гамильтониан (6), записанный в фурье-представлении, имеет вид

$$H_C = \frac{1}{2S} \sum_{i,i'} \sum_{\mathbf{q}} V_{i,i'}(q) \hat{\rho}_i(\mathbf{q}) \hat{\rho}_{i'}(-\mathbf{q}), \quad (8)$$

где $V_{i,i'}(q) = (2\pi e^2/\epsilon q) \exp(-qd|i-i'|)$ — фурье-компонента кулоновского потенциала. Для $\lambda = 0$ фурье-компонента оператора электронной плотности равна

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_i(\mathbf{q}) &= \sum_{\alpha,\sigma} \sum_k a_{i,k+q_y/2,\alpha,\sigma}^+ a_{i,k-q_y/2,\alpha,\sigma} \times \\ &\times \exp\left(-iq_x k \ell^2 - \frac{q^2 \ell^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

При $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_i(\mathbf{q}) &= \sum_{\alpha,\sigma} \sum_k a_{i,k+q_y/2,\alpha,\sigma}^+ a_{i,k-q_y/2,\alpha,\sigma} \times \\ &\times \exp\left(-iq_x k \ell^2 - \frac{q^2 \ell^2}{4}\right) \frac{L_{|\lambda|}\left(\frac{q^2 \ell^2}{2}\right) + L_{|\lambda|-1}\left(\frac{q^2 \ell^2}{2}\right)}{2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $L_\lambda(x)$ — полином Лагерра.

Если система составлена из двух недопированных слоев графена, то в каждом из слоев активным будет

нулевой уровень Ландау с половинным заполнением. Если к системе дополнительно приложить перпендикулярное слоям электростатическое поле, то может возникнуть разбаланс факторов заполнения, т.е. факторы заполнения слоев станут равными $\nu_1 = 2 + \tilde{\nu}$ и $\nu_2 = 2 - \tilde{\nu}$ ($0 < \tilde{\nu} \leq 2$). В более сильных полях активными станут уровни $\lambda = +1$ в слое 1 и уровни $\lambda = -1$ в слое 2, затем уровни $+2$ и -2 и т.д.

Рассмотрим вначале случай, когда активными являются нулевые уровни. При этом гамильтониан кулоновского взаимодействия отличается от гамильтониана обычной двухслойной квантовой холловской системы с суммарным фактором заполнения $\nu = 1$ только тем, что в нем содержится взаимодействие не одной, а четырех компонент, соответствующих квантовым числам ($\alpha = \pm 1, \sigma = \uparrow, \downarrow$). Будем нумеровать эти совокупности квантовых чисел индексом $\beta = 1, 2, 3, 4$.

По аналогии с однокомпонентным случаем [6,7] запишем пробную многочастичную волновую функцию системы в виде

$$|\Psi\rangle = \prod_k \prod_\beta \left(\cos \frac{\theta_\beta}{2} a_{1,k\beta}^+ + e^{i\phi_\beta} \sin \frac{\theta_\beta}{2} a_{2,k\beta}^+ \right) |0\rangle. \quad (11)$$

Функция (11) описывает состояние, в котором межслоевая фазовая когерентность возникает для каждой из компонент. Легко убедиться (см., например, [34,35]), что (11) можно представить в форме волновой функции БКШ, описывающей спаривание электронов одного слоя с дырками другого слоя, причем спаренные электрон и дырка отвечают одному и тому же состоянию β . Параметр θ_β связан с величиной среднего разбаланса для этой компоненты соотношением $\tilde{\nu}_\beta = \cos \theta_\beta / 2$ (факторы заполнения для этой компоненты равны $\nu_{1(2)\beta} = 1/2 \pm \tilde{\nu}_\beta$, а полный разбаланс $\tilde{\nu} = \sum_\beta \tilde{\nu}_\beta$). Энергия системы в состоянии (11) задается

выражением $E = \langle \Psi | H_C | \Psi \rangle + E_g + E_{bg}$, где E_g — энергия взаимодействия электронов с электростатическим полем, создаваемым внешним затвором, а E_{bg} учитывает кулоновское взаимодействие с положительным остовом. Прямое вычисление (см., например, [36]) дает

$$\begin{aligned} E &= \frac{S}{2\pi\ell^2} \left[W \left(\sum_\beta \tilde{\nu}_\beta \right)^2 - J_0 \left(1 + \sum_\beta \tilde{\nu}_\beta^2 \right) - \right. \\ &\left. - J_1 \left(1 - \sum_\beta \tilde{\nu}_\beta^2 \right) - eV \sum_\beta \tilde{\nu}_\beta \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$W = \frac{e^2 d}{\epsilon \ell^2}, \quad J_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon \ell}, \quad J_1 = J_0 \exp\left(\frac{d^2}{2\ell^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\ell}\right), \quad (13)$$

$\operatorname{erfc}(x)$ — дополнительный интеграл вероятности и V — разность потенциалов между слоями, создаваемая полем затвора.

Первое слагаемое в (12) в точности совпадает с энергией плоского конденсатора и представляет собой вклад в энергию от прямого кулоновского взаимодействия. Второе и третье слагаемые дают вклад обменного взаимодействия внутри слоев и между слоями соответственно. Отметим, что $J_0 > J_1$, т.е. константа внутрислойной обменной энергии больше константы межслойной обменной энергии.

Для нахождения параметров θ_β , входящих в пробную функцию (11), нужно найти \tilde{v}_β , отвечающие минимуму энергии (12) с учетом ограничения $|\tilde{v}_\beta| \leq 1/2$ (которое следует из определения \tilde{v}_β).

В неграфеновой двухслойной квантовой холловской системе с $v_1 + v_2 = 1$ имеется только одна компонента, и минимуму энергии в отсутствие поля затвора отвечает $\tilde{v} = 0$, т.е. $v_1 = v_2 = 1/2$. В многокомпонентной системе ситуация более сложная. При $J_0 > J_1$ квадратичная по \tilde{v}_β часть в (12) не является положительно определенной. Более того, она не является положительно определенной при фиксации одного и двух \tilde{v}_β . Следовательно, минимум (12) достигается на границе области определения \tilde{v}_β , причем по крайней мере три из четырех \tilde{v}_β должны принимать граничные значения, равные $\pm 1/2$. При $V = 0$ минимум достигается при $\sum_\beta \tilde{v}_\beta = 0$, но когда два $\tilde{v}_{\beta_i} = +1/2$, а оставшиеся

два других $\tilde{v}_{\beta_i} = -1/2$. Физически такой результат вполне понятен. Поскольку $J_0 > J_1$, выигрыш в обменной энергии достигается при максимальном разбалансе данной компоненты. В однокомпонентной системе этому препятствует прямое обменное взаимодействие. В многокомпонентной системе последний эффект отсутствует, так как величины разбаланса компонент могут быть противоположного знака. Значения $\tilde{v}_{\beta_i} = \pm 1/2$ соответствуют $\theta_\beta = 0, \pi$, что означает отсутствие межслойной фазовой когерентности (т.е. отсутствие сверхпроводящего состояния). Отметим, что данная ситуация аналогична той, которая имеет место в неграфеновой двухслойной квантовой холловской системе при суммарном факторе заполнения $v_1 + v_2 = 2$ [37].

Покажем, что при $V \neq 0$ реализация состояния с межслойной фазовой когерентностью становится возможной. Для определенности, будем считать $V > 0$. Также учтем, что параметры, определенные уравнениями (13), удовлетворяют неравенству $W - J_0 + J_1 > 0$. Анализ (12) показывает, что при $eV \leq J_0 - J_1$ миниму-

му энергии соответствует такое же состояние, как и при $V = 0$. Если разность потенциалов удовлетворяет условию

$$J_0 - J_1 < eV < 2W - J_0 + J_1, \quad (14)$$

то минимум энергии достигается в состоянии

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{v}_3 = \frac{eV - W}{2(W - J_0 + J_1)}, \quad \tilde{v}_4 = -\frac{1}{2}. \quad (15)$$

Состояние (15) вырождено по перестановкам индексов β . Скорее всего, такое вырождение снимается за счет более слабых, неучтенных в (12), взаимодействий. Для нашего рассмотрения это значения не имеет. В области параметров

$$2W - J_0 + J_1 \leq eV \leq 2W + J_0 - J_1 \quad (16)$$

минимуму соответствует состояние

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = \tilde{v}_3 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{v}_4 = -\frac{1}{2}. \quad (17)$$

Если V лежит в диапазоне

$$2W + J_0 - J_1 \leq eV \leq 4W - J_0 + J_1, \quad (18)$$

то минимум достигается при

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = \tilde{v}_3 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{v}_4 = \frac{eV - 3W}{2(W - J_0 + J_1)}. \quad (19)$$

При дальнейшем увеличении V нулевой уровень Ландау станет неактивным: в слое 1 он будет полностью заполнен, а в слое 2 — пустым.

В следующем разделе мы увидим, что сверхтекучая плотность и, соответственно, температура перехода пропорциональны $\sqrt{v_\beta(1-v_\beta)} = \sqrt{1/4 - \tilde{v}_\beta^2}$, т.е. отличны от нуля при $\tilde{v}_\beta \neq \pm 1/2$. Как следует из приведенных выше выражений, спаривание будет возникать при внешней разности потенциалов, лежащей в диапазоне (14) либо (18). При этом максимальная сверхтекучая плотность (соответствующая $\tilde{v}_\beta = 0$) будет отвечать $eV = W$ и $eV = 3W$. Для оценки величины требуемого значения напряженности поля в затворе укажем, что условие $eV = W$ соответствует напряженности поля $E \approx 2 \cdot 10^4 \epsilon^{-1} B$ В/см, где B взято в Тл.

Отметим также, что при $eV = W$ факторы заполнения слоев равны $v_1 = 5/2$ и $v_2 = 3/2$, а при $eV = 3W$ они принимают значения $v_1 = 7/2$ и $v_2 = 1/2$. В обоих случаях только одна из компонент имеет нулевой разбаланс между слоями, и именно эта (активная) компонента ответственна за спаривание электронов и дырок.

При дальнейшем увеличении V электроны будут переходить с уровня $\lambda = -1$ слоя 2 на уровень $\lambda = +1$ слоя 1, и станет возможным спаривание электронов

$\lambda = +1$ уровня с дырками $\lambda = -1$. Согласно (10), выражения для фурье-компонент оператора плотности для уровней $\lambda = \pm 1$ имеют вид

$$\hat{\rho}_i(\mathbf{q}) = \sum_{\alpha, \sigma} \sum_k a_{i,k+q_y/2, \alpha, \sigma}^+ a_{i,k-q_y/2, \alpha, \sigma} \left(1 - \frac{q^2 \ell^2}{4} \right) \times \exp \left(-iq_x k \ell^2 - \frac{q^2 \ell^2}{4} \right). \quad (20)$$

Состояние со спариванием электронов уровня $\lambda = +1$ с дырками уровня $\lambda = -1$ можно описать волновой функцией вида (11), в которой операторы рождения электронов в слое 1 относятся к уровню Ландау $\lambda = +1$, а операторы рождения электронов слое 2 к уровню $\lambda = -1$.

Энергия кулоновского взаимодействия в таком состоянии с учетом полного разбаланса компонент уровня $\lambda = 0$ принимает вид

$$E = \frac{S}{2\pi\ell^2} \left[W \left(2 + \sum_{\gamma} \left(\frac{1}{2} + \tilde{v}_{\gamma} \right) \right)^2 - 2J_0 - J_2 \left(1 + \sum_{\gamma} \tilde{v}_{\gamma}^2 \right) - J_3 \left(1 - \sum_{\gamma} \tilde{v}_{\gamma}^2 \right) - 2eV - (eV - \Omega) \sum_{\gamma} \left(\frac{1}{2} + \tilde{v}_{\gamma} \right) \right], \quad (21)$$

где

$$J_2 = \frac{11}{16} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon \ell},$$

$$J_3 = J_2 \left[\frac{11 - 2\tilde{d}^2 + \tilde{d}^4}{11} \exp \left(\frac{\tilde{d}^2}{2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{\tilde{d}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{2\tilde{d}(3 - \tilde{d}^2)}{11\sqrt{2\pi}} \right] \quad (22)$$

константы внутрислоевого и межслоевого обменного взаимодействия для уровней $|\lambda|=1$ ($\tilde{d} = d/\ell$). Как и в случае активного нулевого уровня, константа внутрислоевого обмена J_2 больше константы межслоевого обмена J_3 . В (21) $\Omega = 2\sqrt{2}\hbar v_F/\ell$ — расстояние между уровнями $\lambda = +1$ и $\lambda = -1$, γ обозначают те же квантовые числа, что и β , но для уровней $|\lambda|=1$, а \tilde{v}_{γ} определяют разбаланс компоненты γ .

Из (21) находим, что при

$$4W + \Omega + J_2 - J_3 \leq eV \leq 6W + \Omega - J_2 + J_3 \quad (23)$$

минимуму энергии соответствует состояние

$$\tilde{v}_1 = \frac{eV - \Omega - 5W}{2(W - J_2 + J_3)}, \quad \tilde{v}_2 = \tilde{v}_3 = \tilde{v}_4 = -\frac{1}{2}, \quad (24)$$

т.е. неравенства (23) определяют очередной диапазон V , в котором может возникать состояние с межслоевой фазовой когерентностью, но теперь между электронами, принадлежащими уровням $\lambda = +1$ и $\lambda = -1$. В частности, при $eV = \Omega + 5W$ компонента, в которой такая когерентность возникнет, будет иметь нулевой разбаланс, то есть будет достигнут максимум сверхтекучей плотности.

3. Критические параметры для электрон-дырочной сверхпроводимости в графене

Как было показано в предыдущем разделе, в двухслойной графеновой системе в перпендикулярном слоем квантующем магнитном поле и электростатическом поле затвора может возникать состояние с межслоевой фазовой когерентностью. Мы установили, что, несмотря на присутствие на уровне Ландау в графене четырех компонент, активной может быть только одна компонента. В зависимости от величины поля затвора межслоевая фазовая когерентность может возникать между электронами нулевого уровня Ландау либо между электронами $\lambda = \pm 1$ уровней. В первом случае критические параметры электрон-дырочной сверхпроводимости в графене будут описываться теми же уравнениями, что и в двухслойных квантовых холловских системах в GaAs гетероструктурах. Во втором случае уравнения будут несколько другими. В настоящем разделе сравним два этих случая. Для анализа будем использовать подход [10], получивший дальнейшее обобщение в [38], а также в настоящей работе.

Рассмотрим состояние, в котором V обеспечивает межслоевую фазовую когерентность одной из компонент, и в котором параметры для данной компоненты θ и φ зависят от k :

$$|\Psi\rangle = \prod_k \left(\cos \frac{\theta_k}{2} a_{1,k}^+ + e^{i\varphi_k} \sin \frac{\theta_k}{2} a_{2,k}^+ \right) |0\rangle. \quad (25)$$

Здесь и далее операторы рождения и уничтожения, а также функции θ_k и φ_k относятся к активной компоненте. Квантовый индекс k определяет координату x центра орбиты электрона $X = k\ell^2$. Поэтому функция (25) описывает состояние, в котором параметр порядка электрон-дырочного спаривания $\langle \Psi | a_{1X}^+ a_{2X} | \Psi \rangle = (1/2) \sin \theta_X e^{i\varphi_X}$ варьируется вдоль оси x .

Энергия системы в состоянии (25) равна

$$E = E_0 - e\tilde{V} \sum_X \cos \theta_X + \frac{1}{2L_y} \sum_{X, X'} \left\{ [H(X - X' - F_S(X - X')) \cos \theta_X \cos \theta_{X'} - F_D(X - X') \sin \theta_X \sin \theta_{X'} \cos(\varphi_X - \varphi_{X'})] \right\}, \quad (26)$$

где $\tilde{V} = V - V_0, V_0$ — разность потенциалов, соответствующая нулевому разбалансу данной компоненты, и E_0 — кулоновская энергия неактивных компонент. Для сокращения обозначений входящие в (25) функции от $X - X'$ выразим через соотношение $A(X) = \ell^2 \int dq \mathcal{A}(q) e^{iqX}$, где $A(X) = H(X), F_S(X), F_D(X)$, а явный вид фурье-компонент этих величин следующий:

$$H(q) = \frac{e^2}{2\epsilon\ell^2} e^{-\frac{q^2\ell^2}{2}} \frac{1 - e^{-d|q|}}{|q|} f_\lambda(q\ell), \quad (27)$$

$$F_S(q) = \frac{e^2}{2\epsilon\ell} \int_0^\infty dk e^{-\frac{k^2}{2}} J_0(kq\ell) f_\lambda(k), \quad (28)$$

$$F_D(q) = \frac{e^2}{2\epsilon\ell} \int_0^\infty dk e^{-\frac{k^2}{2}} J_0(kq\ell) e^{-k\tilde{d}} f_\lambda(k). \quad (29)$$

В уравнениях (27)–(29) $J_0(q)$ есть функция Бесселя нулевого порядка, и

$$f_\lambda(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda = 0 \\ \left(1 - \frac{k^2}{4}\right)^2 & \text{при } |\lambda| = 1 \end{cases} \quad (30)$$

задает зависимость данной величины от расстояния между слоями.

Величина ρ_{s0} называется сверхтекучей жесткостью. Точнее сказать, выражение (33) дает значение этой величины при $T = 0$ в приближении среднего поля. График зависимости $\rho_{s0}(d/\ell)$ приведен на рис. 1. Величина $\rho_{s0}/2$ дает оценку температуры перехода в сверхтекучее состояние. Оценка не учитывает температурную поправку к ρ_s и справедлива в ограниченном интервале d . Ниже обсудим этот вопрос более подробно.

(активными являются уровень $\lambda = 0$ или уровни $\lambda = \pm 1$).

В однородном состоянии с ненулевым потоком электрон-дырочных пар в направлении x фаза параметра порядка линейна по X ($\varphi_X = QX$) и $\theta_X = \theta_0$ не зависит от X . Энергия такого состояния равна

$$E_{mf} = E_0 - \frac{e\tilde{V}S \cos \theta_0}{2\pi\ell^2} + \frac{S}{4\pi\ell^2} ([\mathcal{H}(0) - F_S(0)] \cos^2 \theta_0 - F_D(Q) \sin^2 \theta_0). \quad (31)$$

Учитывая, что величина разбаланса $\tilde{v}_\beta = \cos \theta_0/2$, а также соотношения $2\mathcal{H}(0) = W$, $2F_S(0) = J_0(J_2)$ и $2F_D(0) = J_1(J_3)$ (при $\lambda = 0 (\pm 1)$ соответственно), можно видеть, что имеется полное соответствие между выражением () при $Q = 0$ и выражениями (31), (12).

При малых Q энергию () можно представить в виде

$$E = S(\text{const} + \frac{1}{2}\rho_{s0}Q^2), \quad (32)$$

где

$$\rho_{s0} = \sin^2 \theta_0 \frac{E_c}{16\pi} \tilde{\rho}\left(\frac{d}{\ell}\right), \quad (33)$$

$E_c = e^2/\epsilon\ell$ — кулоновская энергия, а функция

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) (1 + x^2) - x, & \text{при } \lambda = 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \frac{7 + 13x^2 + 7x^4 + x^6}{16} - \frac{x(3 + x^2)^2}{16} & \text{при } |\lambda| = 1 \end{cases} \quad (34)$$

Для того чтобы найти критический ток и температуру перехода, необходимо получить спектр коллективных мод. Будем использовать подход [10,38], основанный на квантовании энергии малых флуктуаций θ_X и φ_X . Вначале нам понадобится спектр при волновых векторах q , направленных вдоль градиента фазы φ (который получен в [38]). Общий случай проанализирован в Приложении. Согласно [38], выражение для спектра можно записать в виде, формально совпадающем с выражением для боголюбовского спектра квазичастиц в движущемся конденсате:

$$E(q) = \sqrt{\epsilon(\epsilon + 2\gamma)} + \hbar qv. \quad (35)$$

В (35) введены следующие обозначения:

$$\epsilon = 2F_D(Q) - F_D(q + Q) - F_D(q - Q), \quad (36)$$

$$\gamma = \sin^2 \theta_0 \left[\mathcal{H}(q) - F_S(q) + \frac{F_D(q + Q) + F_D(q - Q)}{2} \right], \quad (37)$$

$$v = \frac{F_D(q + Q) - F_D(q - Q)}{\hbar q} \cos \theta_0. \quad (38)$$

Величина (36) есть кинетическая энергия пар. В пределе $q \rightarrow 0$ и $Q \rightarrow 0$ выражение (36) сводится к $\epsilon = \hbar^2 q^2 / 2M$, где M — магнитная масса пары

$$M = \frac{2\hbar^2 \epsilon}{e^2 \ell} \frac{1}{\tilde{\rho}(d/\ell)}, \quad (39)$$

и $\tilde{\rho}(x)$ определяется уравнением (34). Так как масса M обратно пропорциональна ρ_s , то, согласно рис. 1, она увеличивается с ростом d , причем в случае активных уровней $\lambda = \pm 1$ магнитная масса больше, чем для активного уровня $\lambda = 0$.

Выражение (37) в пределе $q \rightarrow 0$ и $Q \rightarrow 0$ стремится к константе

$$\gamma_0 = \frac{E_c}{2} \sin^2 \theta_0 \tilde{\gamma}\left(\frac{d}{\ell}\right), \quad (40)$$

где

$$\tilde{\gamma}(x) = \begin{cases} x - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right) & \text{при } \lambda = 0 \\ x + \frac{x(3-x^2)}{16} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{11}{16} - \frac{11-2x^2+x^4}{16} e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right) & \text{при } |\lambda| = 1. \end{cases} \quad (41)$$

Величина (40) определяет энергию взаимодействия между парами в пересчете на одну пару. Зависимость $\gamma_0(d/\ell)$ приведена на рис. 2. Видно, что энергия взаимодействия в случае $\lambda = \pm 1$ больше, чем в случае $\lambda = 0$. Более того, в области малых \tilde{d} энергия $\gamma_0 \propto d$ при $\lambda = \pm 1$, тогда как при $\lambda = 0$ зависимость $\gamma_0(d)$ квадратична.

В длинноволновом пределе спектр (35) является линейным: $E = \hbar sq$ ($Q = 0$), где скорость звука равна

$$s = \sqrt{\gamma_0/M} = \frac{e^2}{\epsilon \hbar} \sin \theta_0 \tilde{s}\left(\frac{d}{\ell}\right), \quad (42)$$

$$s(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{\gamma}(x) \tilde{\rho}(x)}.$$

График зависимости $s(d/\ell)$ представлен на рис. 3. Согласно рис. 3, максимальная скорость звука (которая достигается при $d/\ell \approx 1$ и нулевом разбалансе активной

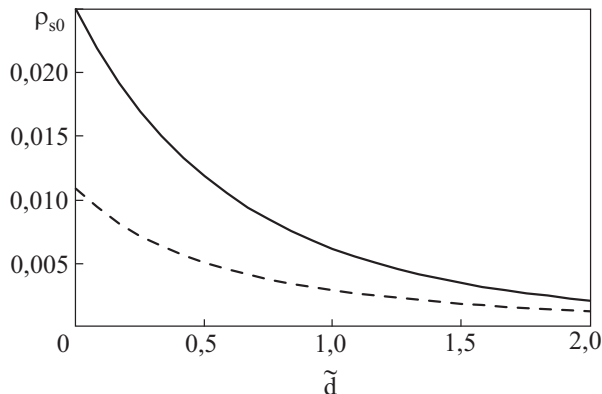


Рис. 1. Зависимость сверхтекучей жесткости (в единицах $E_c \sin^2 \theta_0$) от расстояния между слоями ($\tilde{d} = d/\ell$). Сплошная линия — $\lambda = 0$ (спаривание на нулевом уровне Ландау), штриховая — $|\lambda| = 1$ (спаривание на ± 1 уровнях).

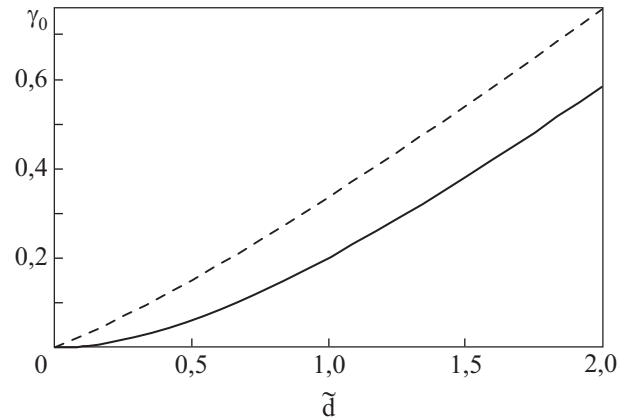


Рис. 2. Зависимость средней энергии взаимодействия между парами (в единицах $E_c \sin^2 \theta_0$) от расстояния между слоями. Сплошная линия — $\lambda = 0$, штриховая — $|\lambda| = 1$.

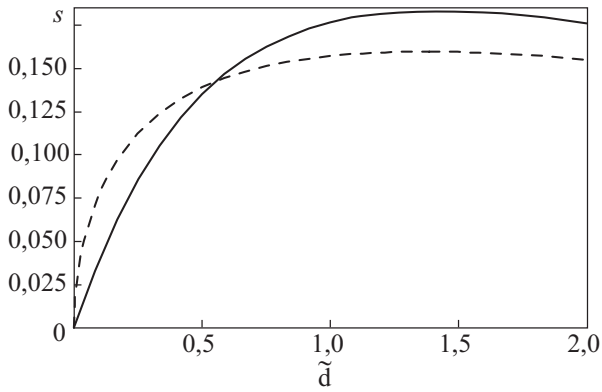


Рис. 3. Зависимость скорости звуковой моды (в единицах $e^2/(\epsilon\hbar)\sin\theta_0$) от расстояния между слоями. Сплошная линия — $\lambda = 0$, штриховая — $|\lambda| = 1$.

компоненты) не зависит от магнитного поля и при $\epsilon \approx 3,9$ (SiO_2) составляет величину $\approx 10^7$ см/с.

Выражение (38) в пределе $q \rightarrow 0, Q \rightarrow 0$ принимает вид $v = (\hbar Q/M) \cos \theta_0$. Поскольку $Q = \partial\phi/\partial X$, величина v есть произведение сверхтекучей скорости ($v_s = \hbar\nabla\phi/M$) на дополнительный фактор, зависящий от разбаланса. В частности, при нулевом разбалансе $v = 0$. Как обсуждалось в [38], это является следствием электрон-дырочной симметрии. В настоящей работе мы хотим пояснить такую особенность, исходя из несколько других аргументов.

Сверхтекучесть электрон-дырочных пар в двухслойной квантовой холловской системе можно рассматривать как аналог так называемой противопотоковой сверхтекучести [39]. Противопотоковая сверхтекучесть возникает в системе, в которой имеются бозоны сортов I и II на решетке, суммарный фактор заполнения узлов решетки равен единице, и сильное одноузельное отталкивание запрещает двум бозонам находиться на одном и том же узле. Элементарным актом движения бозонов в такой системе является перескок бозона сорта I на узел с бозоном II с одновременным обратным перескоком бозона сорта II на узел, занимаемый бозоном I. Потоки бозонов I и II в такой системе равны по модулю и имеют противоположные направления. Соотношение между скоростями движения компонент I и II зависит от отношения концентраций компонент. При равных концентрациях модули скоростей будут также одинаковыми.

В рассматриваемой двухслойной квантовой холловской системе число электронов верхнего слоя равно числу дырок нижнего слоя, а также число дырок верхнего слоя равно числу электронов нижнего слоя. Спаривание электронов и дырок соседних слоев можно рассматривать как образование пар двух сортов: сорта различаются направлением дипольного момента (вверх либо вниз). В такой интерпретации движение пар есть процесс обмена между парами разного

сорта. Другими словами, поток пар одного сорта сопровождается противопотоком пар другого сорта. В отсутствие разбаланса концентрации пар разных сортов одинаковы.

Противопотоковая сверхтекучесть есть частный случай двухкомпонентной сверхтекучести [40–42]. В этом частном случае накладываются дополнительные условия равенства противопотоков и сохранения локально суммарной плотности компонент (поэтому имеется одна, а не две моды колебаний). Спектр коллективных мод в двухкомпонентной системе [41,42] обладает той особенностью, что не содержит линейные по градиенту фазы слагаемые, если скорости компонент равны по модулю и противоположны по направлению. В то же время этот спектр содержит квадратичную зависимость от градиента фазы. Аналогичные свойства демонстрирует и спектр (35), а зануление v при нулевом разбалансе является следствием противопотокового характера сверхтекучести в двухслойной квантовой холловской системе.

При конечных q спектр существенно отклоняется от боголюбовского. В частности, при достаточно больших d в спектре появляется минимум ротонного типа, глубина которого увеличивается с ростом d (рис. 4). При $d > d_c$ спектр становится мнимым при конечных q , и в системе возникает неустойчивость относительно образования волны зарядовой плотности. Зависимость критического расстояния между слоями d_c от разбаланса факторов заполнения активной компоненты приведена на рис. 5, из которого видно, что состояние со спариванием электронов и дырок на уровнях Ландау $\lambda = \pm 1$ является неустойчивым при меньших d , чем это же состояние, но возникающее в ситуации, когда активным является уровень $\lambda = 0$.

Из анализа спектра (35) можно также определить критические значения сверхтоков. Как уже обсуждалось в [38], ограничение на токи в данном случае не

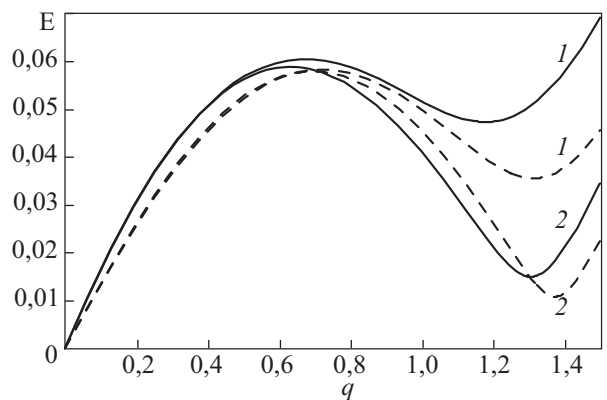


Рис. 4. Энергия коллективной моды (в E_c) от волнового вектора q (в единицах ℓ^{-1}) при $\tilde{v}_B = 0$ и $d = 0,9d_c$ (1), $d = 0,99d_c$ (2). Сплошные линии — $\lambda = 0$, штриховые — $|\lambda| = 1$.

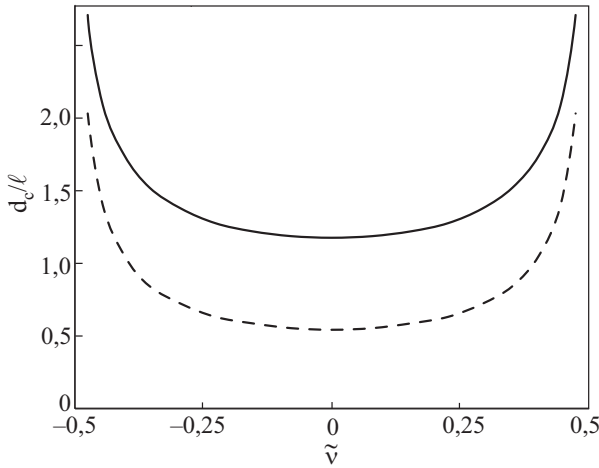


Рис. 5. Зависимость критического расстояния между слоями от разбаланса фактора заполнения активной компоненты. Сплошная линия — $\lambda = 0$, штриховая — $|\lambda| = 1$.

связано с параллельным слоям магнитным полем, которое создают токи в слоях. Максимальное значение тока соответствует максимальному Q , при котором спектр (35) является положительным (критерий сверхтекучести Ландау) и вещественным (условие стабильности). Зависимость плотностей сверхтоков в слоях от Q определяется выражением [38]

$$j_1 = -j_2 = \frac{e}{\hbar} \frac{1}{4\pi\ell^2} \sin^2 \theta_0 \frac{dF_D(Q)}{dQ}. \quad (43)$$

Результаты расчета критического тока представлены на рис. 6. Максимальный критический ток пропорционален величине квантующего магнитного поля. При $B = 1$ Тл и $\varepsilon = 3,9$ максимальная критическая плотность тока приблизительно равна 1 А/м.

В заключение этого раздела оценим, как температура перехода в сверхтекучее состояние зависит от d . Поскольку рассматриваемая система является двумерной, переход в сверхтекучее состояние есть переход Березинского–Костерлица–Таулеса. Критическая температура перехода T_c определяется уравнением $T_c = \pi\rho_s(T_c)/2$, где $\rho_s(T)/2$ — сверхтекучая жесткость при конечной температуре. Для нахождения $\rho_s(T)$ заметим, что плотность сверхтекучего потока j_s связана с градиентом фазы Q соотношением $j_s = \rho_s(T)Q/\hbar$ (при малых Q). С другой стороны, плотность потока можно найти из соотношения $j_s = (1/S\hbar)\partial F/\partial Q$, где

$$F = E_{mf} + E_{zp} + T \sum_{\mathbf{q}} \ln \left(1 - \exp \left(-\frac{E(\mathbf{q})}{T} \right) \right) \quad (44)$$

— свободная энергия. Здесь E_{zp} — энергия нулевых колебаний. В энергии нулевых колебаний необходимо учесть как коллективные, так и одночастичные возбуждения. Как было показано в [8], при d , не слишком

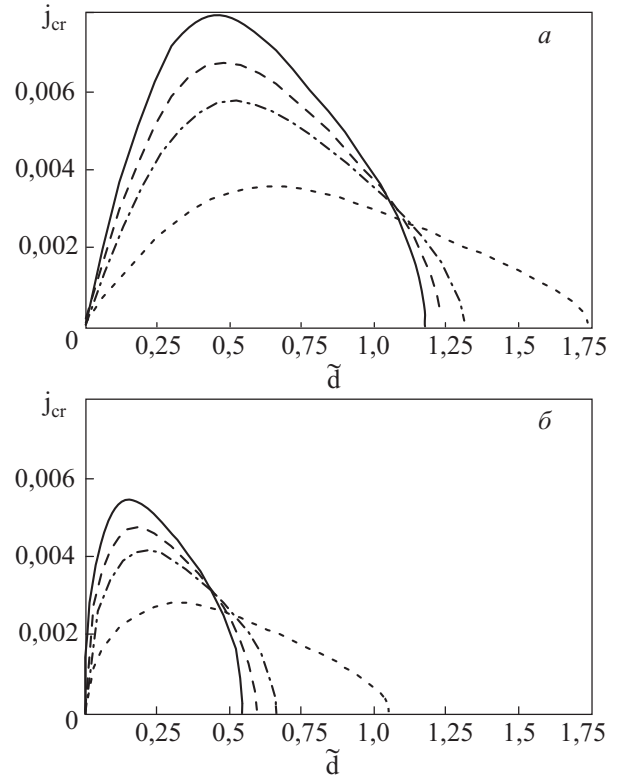


Рис. 6. Плотность критического тока (в единицах $e^3/\hbar\ell^2$) от расстояния между слоями при различной величине разбаланса. Сплошная линия — $\tilde{v} = 0$, штриховая — $\tilde{v} = 0,17$, штрих-пунктирная — $\tilde{v} = 0,25$, пунктирная — $\tilde{v} = 0,4$ для $\lambda = 0$ (а) и $|\lambda| = 1$ (б).

близких к критическим, нулевые колебания вносят незначительный вклад в перенормировку сверхтекучей жесткости. Поэтому при расчете сверхтекучей жесткости не будем учитывать E_{zp} . При учете температурной поправки к ρ_s в энтропийном слагаемом в (44) достаточно учесть лишь коллективные моды (спектр одночастичных возбуждений имеет щель порядка E_c). В результате имеем

$$\rho_s(T) = \rho_{s0} + \frac{1}{S} \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{1}{Q} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\partial E(\mathbf{q})}{\partial Q} N_B(E(\mathbf{q})), \quad (45)$$

где $N_B(E) = (\exp(E/T) - 1)^{-1}$ — функция распределения Бозе. Для однокомпонентной сверхтекучей системы с законом дисперсии $E(\mathbf{q}) = E_0(q) + \hbar q_x v_s$ (где $v_s = \hbar Q/M$ сверхтекучая скорость, и $E_0(q)$ — спектр при $v_s = 0$) выражение (45) сводится к стандартному виду $\rho_s(T) = \rho_{s0} - \rho_n$, где

$$\rho_n = -\frac{\hbar^2}{MS} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\hbar^2 q_x^2}{M} \left(\frac{\partial N_B(E)}{\partial E} \right)_{E=E_0(q)} \quad (46)$$

— нормальная плотность. В рассматриваемом случае выражение для нормальной плотности будет иным,

поскольку сверхтекучесть носит противопотоковый характер.

Здесь ограничимся вычислением температуры перехода при нулевом разбалансе. В этом случае спектр при малых Q можно записать в виде

$$E(\mathbf{q}) = E_0(q) + \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{q}) Q^2 + \dots$$

что дает

$$\rho_s(T) = \rho_{s0} + \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{q}} \alpha(\mathbf{q}) N_B(E_0(q)). \quad (47)$$

Для вычисления коэффициента разложения $\alpha(\mathbf{q})$ нам необходим спектр возбуждений при произвольном направлении волнового вектора. В Приложении описан метод вычисления искомого спектра, обобщающий подход [38]. Согласно результатам, полученным в Приложении, при $\theta_0 = \pi/2$ спектр принимает вид

$$E(\mathbf{q}) = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{q},Q}(\epsilon_{\mathbf{q},Q} + 2\gamma_{\mathbf{q},Q})}, \quad (48)$$

где

$$\epsilon_{\mathbf{q},Q} = 2F_D(Q) - F_D(|\mathbf{q} + Q\hat{x}|) - F_D(|\mathbf{q} - Q\hat{x}|), \quad (49)$$

$$\gamma_{\mathbf{q},Q} = \left[\mathcal{H}(\mathbf{q},Q) - F_S(q) + \frac{F_D(|\mathbf{q} + Q\hat{x}|) + F_D(|\mathbf{q} - Q\hat{x}|)}{2} \right], \quad (50)$$

$$\rho_s(T) = \rho_{s0} + \int_0^\infty dq \frac{q N_B(E_0(q))}{2\pi E_0(q)} \left[2(\gamma_q + \epsilon_q) F_D''(0) - \left(\gamma_q + \frac{\epsilon_q}{2} \right) \left(F_D''(q) + \frac{F_D'(q)}{q} \right) + \epsilon_q \mathcal{D}(q) \right], \quad (52)$$

где

$$\mathcal{D}(q) = \frac{e^2}{4\epsilon} e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}} q \ell^2 e^{-dq} f_\lambda(q\ell),$$

$\epsilon_q = \epsilon_{\mathbf{q},0}$ и $\gamma_q = \gamma_{\mathbf{q},0}$ Зависимость критической температуры от расстояния между слоями, рассчитанная из (52), приведена на рис. 7.

Согласно полученным результатам, в области промежуточных d температура перехода с хорошей точностью аппроксимируется выражением $T_c = \pi \rho_{s0}/2$, а учет температурной поправки важен в области малых d/ℓ , а также при d , близких к критическим. Максимум критической температуры достигается при промежуточных d . Зависимость $T_c(d/\ell)$ качественно подобна зависимости критического тока от d/ℓ . В состоянии, где спариваются электроны и дырки нулевого уровня Ландау, критическая температура выше, чем в состоянии, где спариваются электроны уровня $\lambda = +1$ и дырки уровня $\lambda = -1$.

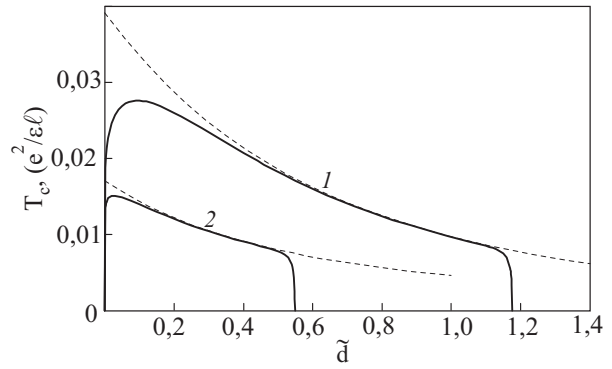


Рис. 7. Зависимость критической температуры от расстояния между слоями. Сплошные кривые 1 и 2 отвечают $\lambda = 0$ и $|\lambda| = 1$, соответственно. Пунктирными кривыми показана критическая температура в приближении среднего поля (без учета температурной перенормировки сверхтекучей жесткости).

функции $F_S(q)$, $F_D(q)$ определены уравнениями (28), (29), \hat{x} — единичный вектор в направлении x , и

$$\mathcal{H}(\mathbf{q},Q) = \frac{e^2}{2\epsilon \ell^2} e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}} \frac{1 - e^{-d|q|} \cos(q_y Q \ell^2)}{|q|} f_\lambda(q\ell). \quad (51)$$

Вычисляя из (48)–(51) функцию $\alpha(\mathbf{q})$, приходим к следующему выражению для $\rho_s(T)$:

Отметим, что результаты данного раздела, полученные для нулевого уровня, описывают также ситуацию в двухслойных квантовых холловских системах в полупроводниковых гетероструктурах на основе GaAs (и соответственно, частично повторяют результаты работ [6–8, 10, 38]).

4. Обсуждение результатов

Основной вывод, который следует из предыдущего раздела, состоит в том, что максимальные параметры электрон-дырочной сверхпроводимости в двухслойной графеновой системе в квантующем магнитном поле могут быть достигнуты, если межслоевая фазовая когерентность возникает между электронами,

принадлежащими нулевому уровню Ландау. В этой связи возникает вопрос, даст ли использование графена какие-либо преимущества по сравнению с GaAs гетероструктурами.

Чтобы ответить на этот вопрос, напомним общие условия, при которых в двухслойной квантовой холловской системе можно ожидать возникновение сверхтекучего состояния связанных электрон-дырочных пар. В данной задаче можно выделить три характерные энергии: расстояние между уровнями Ландау ω_0 , кулоновская энергия E_c и амплитуда межслоевого туннелирования t' . Анализ, проведенный в настоящей работе, основан на предположении о выполнении следующих сильных неравенств: $t' \ll E_c$ и $E_c \ll \omega_0$.

Первое неравенство позволяет не учитывать туннелирование при анализе коллективных мод. Кроме того, наличие даже слабого туннелирования приводит к образованию в системе вихрей, подобных джозефсоновским. Если двухслойная система используется для передачи тока от источника к нагрузке (именно такая конфигурация была реализована в экспериментах [20–22]), то вихри будут двигаться, что приведет к диссипации энергии [43]. Величина диссипации пропорциональна квадрату амплитуды туннелирования. Отметим, что можно реализовать конфигурации, в которых вихри будут стационарными и диссипация будет отсутствовать [44], но такие конфигурации нельзя применить для передачи энергии от источника к нагрузке [45]. Поэтому нужны системы с пренебрежимо малой амплитудой межслоевого туннелирования. В двойной квантовой яме туннелирование достаточно велико из-за относительной узости и малости барьера.

Второе неравенство есть условие применения так называемого приближения нижнего уровня Ландау (в котором не учитываются переходы на неактивные уровни). В этом случае электроны и дырки на активном уровне являются хорошо определенными квазичастицами. В системах с квадратичным законом дисперсии носителей заряда расстояние между уровнями Ландау $\omega_0 = \hbar e B / m_* c$ (m_* — эффективная масса носителей) прямо пропорционально магнитному полю, а кулоновская энергия $E_c = e^2 / \epsilon \ell = (e^2 / \epsilon) \sqrt{e B / \hbar c}$ пропорциональна корню из магнитного поля. Поэтому неравенство $E_c < \omega_0$ выполняется лишь в достаточно больших полях ($B \gtrsim 10$ Тл для GaAs). При этом магнитная длина мала, т.е. мало критическое d . Соответственно, нельзя использовать большие d , чтобы подавить межслоевое туннелирование.

Для двухслойной графеновой системы $\omega_0 = \sqrt{2} \hbar v_F / \ell$, т.е. условие $E_c < \omega_0$ эквивалентно условию $\epsilon > e^2 / (\sqrt{2} \hbar v_F) \approx 1,5$. При соответствующем выборе ϵ условие выполняется при любых магнитных полях и можно использовать большие d (отношение d/ℓ можно сделать меньшим единицы соответствующим выбо-

ром магнитной длины). При этом, поскольку графен есть монослой, а не достаточно широкая квантовая яма, то и амплитуда туннелирования между слоями будет значительно меньше при тех же самых d .

Отметим, что для графеновой системы неравенство $E_c \ll \omega_0$ не столь принципиально, как для двухслойной электронной системы в GaAs гетероструктуре. Во втором случае в пределе малых магнитных полей мы перейдем к случаю двух слоев с одинаковым типом носителей, а в первом (в поле затвора) мы приходим к электрон-дырочной графеновой системе в нулевом магнитном поле [24–27]. При $\epsilon = 1$, а также при заполнении большого числа положительных уровней Ландау в одном слое (и такого же количества пустых отрицательных уровней в другом слое) подход, используемый в настоящей работе, строго говоря, неприменим. Тем не менее эффект спаривания, по-видимому, остается. Вопрос о температуре перехода в этом случае пока является открытым.

В заключение обсудим вопрос о том, какие максимальные температуры перехода в сверхпроводящее состояние могут быть достигнуты в двухслойной квантовой холловской системе на основе графена. Предположим, что мы создали систему с заданным d и начинаем варьировать магнитное поле (одновременно выполняя соответствующую подстройку поля затвора, чтобы оставаться в режиме нулевого разбаланса активной компоненты). Для определения максимальной температуры перехода представим график рис. 7 в несколько ином виде, а именно выберем величину $e^2 / \epsilon d$ в качестве единицы температуры. Результат показан на рис. 8. Как видно из приведенных зависимостей, максимальная температура составляет $T_c \approx 0,01 e^2 / \epsilon d$ и достигается при $d/\ell = 0,5-1$ в случае, когда в спаривании участвуют носители на нулевом уровне. При $d = 50$ Å и $\epsilon = 3,9$ максимальная температура $T_c \approx 8$ К. Требуемые магнитные поля $B \gtrsim 25$ Тл.

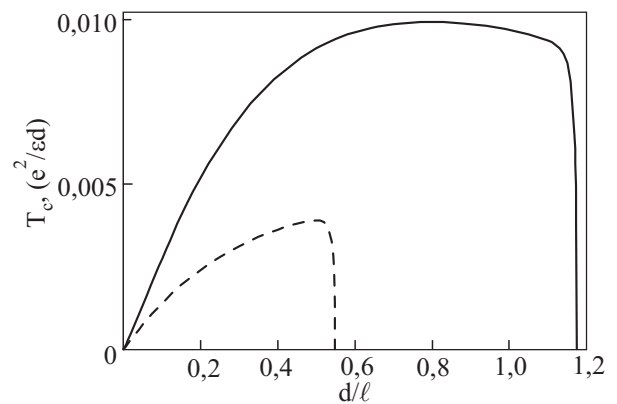


Рис. 8. Критическая температура при фиксированном расстоянии между слоями в зависимости от обратной магнитной длины. Сплошная линия — $\lambda = 0$, штриховая — $|\lambda| = 1$.

Температура перехода порядка 1 К может быть достигнута при $d \approx 400 \text{ \AA}$ (при том же ϵ) при достаточно слабых полях $\gtrsim 0,4 \text{ Тл}$.

Приложение. Спектр коллективных колебаний при произвольном направлении волнового вектора

Задача о спектре коллективных мод в двухслойной квантовой системе с межслоевой фазовой когерентностью рассмотрена в работах [8–10,38]. В работе [38] подход [10] (основанный на квантовании энергии флуктуаций фазы и локального разбаланса) обобщен на случай произвольного среднего разбаланса, и показано, что спектр, во-первых, обладает электрон-дырочной симметрией и, во-вторых, переходит в боголюбовский спектр в пределе малой плотности. В [10,38] рассматривался случай, когда направление волнового вектора совпадает с направлением градиента фазы. В работах [8,9] для нахождения спектра использован метод функциональных интегралов. В [8] был рассмотрен случай нулевого разбаланса и найден спектр для произвольного направления волнового вектора. В [9] рассматривался общий случай. В настоящем Приложении обобщим подход [38] на случай произвольного направления волнового вектора.

Используя аналогию с квантовым ферромагнетиком [6], рассмотрим фурье-компоненты операторов псевдоспиновой плотности

$$\hat{m}(\mathbf{q}) = \sum_{k_1, k_2} \langle k_1 | e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} | k_2 \rangle a_{i, k_1}^+ \sigma_{ij} a_{j, k_2} \quad (\text{П.1})$$

(σ_{ij} — матрицы Паули). Состояние с ненулевым градиентом фазы можно интерпретировать как спиральное состояние с $m_z = \cos \theta_0$, $m_x = \sin \theta_0 \cos(\mathbf{Q}\mathbf{r})$, $m_y = \sin \theta_0 \sin(\mathbf{Q}\mathbf{r})$. В таком состоянии фурье-разложение средних $\langle \Psi | \hat{m}_{x(y)}(\mathbf{q}) | \Psi \rangle$ содержит слагаемые с $\mathbf{q} = \pm \mathbf{Q}$. Волновая функция

$$|\Psi\rangle = \prod_k \left(\cos \frac{\theta_0}{2} a_{1,k}^+ + e^{iQk} \sin \frac{\theta_0}{2} a_{2,k}^+ \right) |0\rangle \quad (\text{П.2})$$

описывает спиральное состояние с $\mathbf{Q} = Q\hat{x}$, где \hat{x} — единичный вектор вдоль оси x . Для того чтобы описать спиральное состояние с произвольным $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y)$, волновую функцию нужно выбрать в виде

$$|\Psi\rangle = \prod_k \left(\cos \frac{\theta_0}{2} a_{1,k}^+ + e^{iQ_x k} \sin \frac{\theta_0}{2} a_{2, k-Q_y}^+ \right) |0\rangle. \quad (\text{П.3})$$

Легко проверить, что энергия не зависит от направления \mathbf{Q} : в состоянии (П.3), как и в состоянии (П.2), выражение для энергии имеет вид (31). Действительно, переход от (П.2) к (П.3) есть просто поворот системы координат, и энергия не должна меняться при таком преобразовании. Рассмотрим теперь флуктуации θ и φ вдоль оси x в новой системе координат. Для учета таких флуктуаций запишем волновую функцию в виде

$$|\Psi\rangle = |\Psi\rangle = \prod_k \left(\cos \frac{\theta_k}{2} a_{1,k}^+ + e^{iQ_x k + i\tilde{\varphi}_k} \sin \frac{\theta_k}{2} a_{2, k-Q_y}^+ \right) |0\rangle. \quad (\text{П.4})$$

Вычисление энергии в состоянии (П.4) дает

$$E = E_0 - e\tilde{V} \sum_X \cos \theta_X + \frac{1}{2L_y} \sum_{X, X'} \left\{ [H_{Q_y}(X-X') - F_S(X-X')] \cos \theta_X \cos \theta_{X'} - F_{D, Q_y}(X-X') \sin \theta_X \sin \theta_{X'} \cos(Q_x(X-X') + \tilde{\varphi}_X - \tilde{\varphi}_{X'}) \right\}, \quad (\text{П.5})$$

где

$$H_{Q_y}(X) = \frac{e^2}{2\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{1 - e^{-|q|d} \cos(Q_y q \ell^2)}{|q|} e^{iqX - \frac{q^2 \ell^2}{2}} f_\lambda(q\ell),$$

$$F_S(X) = \frac{e^2}{2\epsilon} e^{-\frac{X^2}{2\ell^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{q^2 + X^2/\ell^4}} e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}} f_\lambda\left(\sqrt{q^2 \ell^2 + X^2/\ell^2}\right),$$

$$F_{D, Q_y}(X) = \frac{e^2}{2\epsilon} e^{-\frac{X^2}{2\ell^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{q^2 + X^2/\ell^4}} e^{-d\sqrt{q^2 + X^2/\ell^4} - \frac{q^2 \ell^2}{2}} e^{-iqX Q_y} f_\lambda\left(\sqrt{q^2 \ell^2 + X^2/\ell^2}\right). \quad (\text{П.6})$$

Выполняя разложение (П.6) по малым флуктуациям $\tilde{\varphi}_X$ и $\tilde{m}_z(X) = \cos \theta_X - \cos \theta_0$ и переходя к фурье-компонентам

$$\begin{aligned}\tilde{m}_z(q) &= \frac{2\pi\ell^2}{S} \sum_X \tilde{m}_z(X) e^{-iqX}, \\ \tilde{\varphi}(q) &= \frac{2\pi\ell^2}{S} \sum_X \tilde{\varphi}(X) e^{-iqX},\end{aligned}\quad (\text{П.7})$$

получаем следующее выражение для энергии флуктуаций:

$$\begin{aligned}E_{\text{fl}} &= \frac{S}{4\pi\ell^2} \sum_q [\tilde{m}_z(-q) \mathcal{K}_{zz}(q) \tilde{m}_z(q) + \\ &+ \tilde{\varphi}(-q) \mathcal{K}_{\varphi\varphi}(q) \tilde{\varphi}(q) - (i\tilde{m}_z(-q) \mathcal{K}_{z\varphi}(q) \tilde{\varphi}(q) + \text{с.с.})],\end{aligned}\quad (\text{П.8})$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{zz}(q) &= \mathcal{H}_{Q_y}(q) - \mathcal{F}_S(q) + \mathcal{F}_D(Q) + \\ &+ \left(\mathcal{F}_D(Q) - \frac{\mathcal{F}_D(|q\hat{x} + \mathbf{Q}|) + \mathcal{F}_D(|q\hat{x} - \mathbf{Q}|)}{2} \right) \text{ctg}^2 \theta_0,\end{aligned}\quad (\text{П.9})$$

$$\mathcal{K}_{z\varphi}(q) = \cos \theta_0 \frac{\mathcal{F}_D(|q\hat{x} + \mathbf{Q}|) - \mathcal{F}_D(|q\hat{x} - \mathbf{Q}|)}{2}, \quad (\text{П.10})$$

$$\mathcal{K}_{\varphi\varphi}(q) = \sin^2 \theta_0 \left[\mathcal{F}_D(Q) - \frac{\mathcal{F}_D(|q\hat{x} + \mathbf{Q}|) + \mathcal{F}_D(|q\hat{x} - \mathbf{Q}|)}{2} \right]. \quad (\text{П.11})$$

Здесь $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$,

$$\mathcal{H}_{Q_y}(q) = \frac{e^2}{2\epsilon\ell^2} e^{-\frac{q^2\ell^2}{2}} \frac{1 - e^{-d|q|} \cos(Q_y q \ell^2)}{|q|} f_\lambda(q\ell), \quad (\text{П.12})$$

а функции $\mathcal{F}_{S,D}(q)$ определяются уравнениями (28), (29). Чтобы проквантовать энергию (П.8), учтем, что величины \tilde{m}_z и $\tilde{\varphi}$ являются канонически сопряженными, и коммутатор операторов этих величин равен

$$[\hat{m}_z(q), \hat{\varphi}(q')] = -2i \frac{2\pi\ell^2}{S} \delta_{q,-q'}. \quad (\text{П.13})$$

Выражая операторы $\hat{m}_z(q)$ и $\hat{\varphi}_z(q)$ через бозевские операторы рождения и уничтожения

$$\begin{aligned}\hat{m}_z(q) &= A_q \sqrt{\frac{2\pi\ell^2}{S}} (b_q + b_{-q}^+), \\ \hat{\varphi}(q) &= i \frac{1}{A_q} \sqrt{\frac{2\pi\ell^2}{S}} (b_q - b_{-q}^+),\end{aligned}\quad (\text{П.14})$$

заменяя в (П.8) величины \tilde{m}_z и $\tilde{\varphi}$ на операторы (П.14) и требуя зануления слагаемых, содержащих два оператора рождения или уничтожения (что позволяет определить величину A_q), приходим к уравнению

$$H_{\text{fl}} = \sum_q E(q) \left(b^+(q) b(q) + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{П.15})$$

где

$$E(q) = 2[\sqrt{\mathcal{K}_{\varphi\varphi}(q)\mathcal{K}_{zz}(q)} + \mathcal{K}_{z\varphi}(q)]. \quad (\text{П.16})$$

Спектр коллективных мод (П.16) зависит от q , Q и угла между осью x (которая выбрана в направлении волнового вектора \mathbf{q}) и вектором \mathbf{Q} . Повернув систему координат таким образом, чтобы ось x была направлена вдоль \mathbf{Q} , получаем спектр коллективных мод для произвольного направления волнового вектора:

$$\begin{aligned}E(\mathbf{q}) &= \sqrt{\epsilon_{\mathbf{q},Q}(\epsilon_{\mathbf{q},Q} + 2\gamma_{\mathbf{q},Q} \sin^2 \theta_0) +} \\ &+ \cos \theta_0 (\mathcal{F}_D(|\mathbf{q} + Q\hat{x}|) - \mathcal{F}_D(|\mathbf{q} - Q\hat{x}|)),\end{aligned}\quad (\text{П.17})$$

где величины $\epsilon_{\mathbf{q},Q}$ и $\gamma_{\mathbf{q},Q}$ определяются выражениями (49) и (50) соответственно.

1. K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, and A.A. Firsov, *Science* **306**, 666 (2004).
2. С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 505 (1976) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **2**, 251 (1976)].
3. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *ЖЭТФ* **71**, 738 (1976).
4. A.H. MacDonald and E.H. Rezayi, *Phys. Rev.* **B42**, 3224 (1990).
5. X.G. Wen and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1811 (1992).
6. K. Moon, H. Mori, K. Yang, S.M. Girvin, A.H. MacDonald, L. Zheng, D. Yoshioka, and S.C. Zhang, *Phys. Rev.* **B51**, 5138 (1995).
7. K. Yang, K. Moon, L. Belkhir, H. Mori, S.M. Girvin, A.H. MacDonald, L. Zheng, and D. Yoshioka, *Phys. Rev.* **B54**, 11644 (1996).
8. Y.N. Joglekar and A.H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B64**, 155315 (2001).
9. Y.N. Joglekar and A.H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B65**, 235319 (2002).
10. M. Abolfath, A.H. MacDonald, and L. Radzihovsky, *Phys. Rev.* **B68**, 155318 (2003).
11. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B57**, 148 (1998).
12. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B67**, 214515 (2003).
13. A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B75** 075322 (2007).
14. Ю.Е. Лозовик, А.М. Рувинский, *ЖЭТФ* **112**, 1791 (1997).
15. O.L. Berman, Yu.E. Lozovik, D.W. Snoke, and R.D. Colson, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 386219 (2007).
16. J.P. Eisenstein and A.H. MacDonald, *Nature* **432**, 691 (2004).
17. I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 036803 (2001).

18. M. Kellogg, I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 126804 (2002).
19. M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 246801 (2003).
20. M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036801 (2004).
21. E. Tutuc, M. Shayegan, and D.A. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036802 (2004).
22. R.D. Wiersma, J.G.S. Lok, S. Kraus, W. Dietsche, K. von Klitzing, D. Schuh, M. Bichler, H.-P. Tranitz, and W. Wegscheider, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 266805 (2004).
23. L. Tiemann, J.G.S. Lok, W. Dietsche, K. von Klitzing, K. Muraki, D. Schuh, and W. Wegscheider, *Phys. Rev.* **B77**, 033306 (2008).
24. H. Min, R. Bistritzer, J.J. Su, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B78**, 121401 (2008).
25. C.H. Zhang and Y.N. Joglekar, *Phys. Rev.* **B77**, 233405 (2008).
26. M.Yu. Kharitonov and K.B. Efetov, *Phys. Rev.* **B78**, 241401 (2008).
27. M.Yu. Kharitonov and K.B. Efetov, *e-print arXiv:0903.4445*.
28. O.L. Berman, Yu.E. Lozovik, and G. Gumbs, *Phys. Rev.* **B77**, 155433 (2008).
29. Yu.E. Lozovik and A.A. Sokolik, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 61 (2008).
30. Ю.Е. Лозовик, С.П. Меркулова, А.А. Соколик, *УФН* **187**, 757 (2008).
31. K.S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang, S.V. Morozov, H.L. Stormer, U. Zeitler, J.C. Maan, G.S. Boebinger, P. Kim, and A.K. Geim, *Science* **315**, 1379 (2007).
32. A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M. Peres, K.S. Novoselov, and A.K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).
33. V.P. Gusynin and S.G. Sharapov, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146801 (2005).
34. S.B. Simon, *Solid State Commun.* **134**, 81 (2005).
35. K. Park and S. Das Sarma, *Phys. Rev.* **B74**, 035338 (2006).
36. С.И. Шевченко, Д.В. Филь, А.А. Яковлева, *ФНТ* **30**, 431 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 321 (2004)].
37. A.H. MacDonald, R. Rajaraman, and T. Jungwirth, *Phys. Rev.* **B60**, 8817 (1999).
38. L.Yu. Kravchenko and D.V. Fil, *J. Phys.: Condens. Matter* **20**, 325235 (2008).
39. A.B. Kuklov and B.V. Svistunov, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 100401 (2003).
40. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **A72**, 013616 (2005).
41. L.Yu. Kravchenko and D.V. Fil, *J. Low Temp. Phys.* **150**, 162 (2008).
42. L.Yu. Kravchenko and D.V. Fil, *J. Low Temp. Phys.* **155**, 219 (2009).
43. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *ФНТ* **33**, 1023 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 780 (2007)].
44. J.J. Su and A.H. MacDonald, *Nature Physics* **4**, 799 (2008).
45. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 215701 (2009).

Superconductivity of electron-hole pairs in
a double layer graphene system in a quantizing
magnetic field

D.V. Fil and L.Yu. Kravchenko

The state with a spontaneous interlayer phase coherence in a graphene based bilayer quantum Hall system is studied. This state can be considered as a gas of superfluid electron-hole pairs with the components of the pair belonging to different layers. Superfluid flux of such pairs is equivalent to two electrical supercurrents in the layers. It is shown that the state with the interlayer phase coherence emerges in the graphene system if a certain imbalance of the Landau level filling factors of the layers is created. We obtain the temperature of transition into the superfluid state, the maximum interlayer distance at which the phase coherence is possible, and the critical values of the supercurrent. The advantages of use of graphene systems instead of GaAs heterostructures for the realization of the bilayer electron-hole superconductivity are discussed.

PACS: 71.35.Ji Excitons in magnetic fields; magnetoexcitons;
73.21.-b Electron states and collective excitations in multilayers, quantum wells, mesoscopic, and nanoscale systems;
73.63.-b Electronic transport in nanoscale materials and structures

Keywords: double layer system, interlayer phase coherence, graphene, magnetoexciton.