Физика низких температур, 2009, т. 35, № 5, с. 479–490

Колебания конденсата электронно-дырочных пар в экситонных ловушках

А.И. Безуглый

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: bezugly@ic.kharkov.ua

С.И. Шевченко

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 5 ноября 2008 г.

В двухслойных системах в результате спаривания пространственно разделенных электронов и дырок может возникать сверхтекучее состояние. В пределе малой плотности электронно-дырочных пар сверхтекучее состояние может быть описано нелинейным динамическим уравнением. В работе приведен микроскопический вывод такого уравнения для волновой функции конденсата электронно-дырочных пар в сильном магнитном поле. Это уравнение обобщается на случай приложенного к системе электрического поля, а также на случай пространственной вариации состава полупроводника, образующего проводящие слои. Решение динамического уравнения дает частоты собственных колебаний конденсата электронно-дырочных пар в экситонных ловушках, созданных электрическим зарядом или вариацией состава полупроводника.

В двошарових системах внаслідок спарювання просторово розділених електронів та дірок може виникати надплинний стан. У межі малої щільності електронно-діркових пар надплинний стан може бути описано нелінійним динамічним рівнянням. У роботі приведено мікроскопічний вивід такого рівняння для хвильової функції конденсату електронно-діркових пар в сильному магнітному полі. Це рівняння узагальнюється на випадок прикладеного до системи електричного поля, а також на випадок просторової варіації складу напівпровідника, що утворює провідні шари. Рішення динамічного рівняння дає частоти власних коливань конденсату електронно-діркових пар в екситонних пастках, які сформовані електричним зарядом або варіацією складу напівпровідника.

PACS: **73.21.–b** Электронные состояния и коллективные возбуждения в многослойных структурах; квантовые ямы, мезоскопические и наномасштабные системы;
71.35.Ji Экситоны в магнитных полях; магнитоэкситоны;
73.43.–f Квантовые эффекты Холла.

Ключевые слова: двухслойные системы, электронно-дырочные пары, экситонные ловушки.

1. Введение

Интерес к экситонной сверхтекучести возник в 1960-е годы, когда была высказана гипотеза, что при низких температурах электронно-дырочные (e–h) пары в полупроводниках могут образовывать бозе-конденсат [1,2]. Хотя высокая плотность экситонов, достигаемая при оптической генерации, и их малая масса приводят к температуре конденсации $T_c \sim 100$ K [3], сверхтекучесть оптически возбужденных экситонов в объемных полупроводниках не была реализована в основном из-за процессов рекомбинации. Поэтому более перспективной представлялась возможность бозе-конденсации e–h пар, возникших в результате спаривания электронов из зоны проводимости полупроводника с дырками из валентной зоны в случае, когда энергия связи экситона больше ширины запрещенной щели [4]. Однако оказалось, что неустойчивость полупроводника относительно электронно-дырочного спаривания приводит не к сверхтекучести *e–h* пар, а к состоянию экситонного диэлектрика из-за фиксации фазы параметра порядка межзонными переходами [5]. Чтобы преодолеть эту трудность, было предложено использовать двухслойные *n–p* системы, в которых электрон находится в *n*-слое, а дырка в *p*-слое [6,7]. В таких двухслойных системах межзонные переходы (совпадающие с межслоевыми туннельными переходами) приводят не к диэлектрическому состоянию, а к неоднородности недиссипативного токового состояния *e–h* пар [8]. Заметим, что двухслойная геометрия также благоприятна для бозе-конденсации оптически возбужденных экситонов, поскольку межслоевой туннельный барьер значительно ослабляет процессы электронно-дырочной рекомбинации.

В настоящее время двухслойные системы создаются на основе полупроводниковых гетероструктур с двумя близко расположенными квантовыми ямами, каждая из которых содержит двумерный слой носителей. В двухслойных системах межъямные *e–h* пары либо генерируются лазерным импульсом [9–11], либо формируются из носителей, перешедших в квантовые ямы с примесных атомов [12]. Заметим, что в системах последнего типа наблюдались аномалии туннельных [13,14] и транспортных [15–17] свойств, которые можно интерпретировать в терминах макроскопической квантовой когерентности, возникшей вследствие бозе-конденсации *e–h* пар [18].

Нужно отметить, что фазово-когерентное состояние наблюдалось в двухслойных системах, когда они были помещены в сильное перпендикулярное магнитное поле при равенстве факторов заполнения нижнего уровня Ландау в каждом слое: $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$. Впоследствии оказалось, что равенство (баланс) заселенностей нижних уровней Ландау в обоих слоях не является необходимым — фазово-когерентная система вполне может быть и разбалансированной, поскольку для *e–h* спаривания достаточно выполнения более слабого условия $\nu_1 + \nu_2 = 1$ [19–21]. Смысл этого соотношения состоит в том, что число занятых состояний (электронов) на нижнем уровне Ландау в одном слое равно числу свободных состояний (дырок) на нижнем уровне Ландау в другом слое.

Двухслойные системы с разбалансом заселенностей слоев весьма интересны с теоретической точки зрения. Особенно интересен случай сильного разбаланса $\nu_1 \ll 1$, $\nu_1 + \nu_2 = 1$, когда плотность *e–h* пар мала и они ведут себя как слабо неидеальный бозе-газ [3,22]. Хорошо известно, что динамика конденсата неоднородного слабо неидеального газа бозонов описывается довольно простым дифференциальным уравнением Гросса–Питаевского [23]. Уравнение такого типа было недавно выведено нами для двухслойных электронно-дырочных систем [24]. Цель настоящей работы — во-первых, обобщить это уравнение на случай приложенного к системе электрического поля, а также на случай пространственной вариации состава полупроводника, образующего квантовые ямы. Во-вторых, с помощью динамического уравнения найти частоты собственных колебаний конденсата *e–h* пар в экситонных ловушках. Полученные результаты показывают много общего с динамикой атомарных бозе-конденсатов в магнитных ловушках [23]. Вместе с тем имеется и ряд отличий, в частности расщепление частот собственных колебаний вследствие ненулевого дипольного момента *e–h* пар.

Материал статьи организован следующим образом. Во втором разделе дан микроскопический вывод динамического уравнения для конденсата *e–h* пар в пределе малой плотности. В третьем разделе рассмотрено влияние приложенного электрического поля на статику и динамику конденсата *e–h* пар. В частности, найдены частоты собственных колебаний конденсата в гармонических электростатических ловушках. Четвертый раздел содержит анализ динамики конденсата в ловушках, созданных вариациями состава полупроводника. Получено расщепление частот собственных колебаний конденсата вихрем, находящемся в центре ловушки. В пятом разделе приведены заключительные замечания.

2. Динамическое уравнение для волновой функции конденсата *e–h* пар. Микроскопический вывод

Запишем гамильтониан двухслойной электронно-дырочной системы в магнитном поле как сумму одночастичной и двухчастичной частей:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \sum_{k} \psi_k^{+}(\mathbf{r})[\hat{h}_k(\mathbf{r}) + (-1)^k eV_k(\mathbf{r})]\psi_k(\mathbf{r}) +$$

$$+\frac{1}{2}\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \sum_{k,l} V_{kl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\psi_k^{+}(\mathbf{r})\psi_l^{+}(\mathbf{r}')\psi_l(\mathbf{r}')\psi_k(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Здесь и далее предполагается, что индексы k и l принимают значения 1 и 2 с условием, что значение 1 относится к электронному слою, а 2 — к дырочному. Полевые операторы $\psi_k^{+}(\mathbf{r})$ и $\psi_k(\mathbf{r})$ являются соответственно операторами рождения и уничтожения электрона или дырки в точке с двумерным радиусом-вектором $\mathbf{r} = (x, y)$. Спиновые индексы и поперечная слоям координата z опущены, поскольку электроны считаются спин-поляризованными и принадлежащими первой подзоне поперечного квантования. Оператор кинетической энергии электрона (дырки) в магнитном поле имеет вид

$$\hat{h}_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m_k}\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + (-1)^k \frac{e}{c}\mathbf{A}_k(\mathbf{r})\right]^2 + (-1)^{k+1}E_k, \tag{2}$$

где m_k — масса электрона или дырки (которые не предполагаются равными), $\mathbf{A}_k(\mathbf{r})$ — значение векторного потенциала в соответствующем слое, а E_k — энергия дна зоны проводимости ($k = 1$) или потолка валентной зоны ($k = 2$). Заметим, что энергии E_k отсчитываются от общего значения химического потенциала в обоих слоях. Последнее слагаемое в одночастичной части гамильтониана (1) представляет собой потенциальную энергию системы, записанную через скалярный потенциал $V_k(\mathbf{r})$. Двухчастичная часть гамильтониана (1) учитывает кулоновское взаимодействие носителей как внутри слоев, так и между слоями, т.е.

$$V_{kl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = (-1)^{k+l}\frac{e^2}{\varepsilon\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 + (1-\delta_{k,l})d^2}}. \tag{3}$$

В выражении (3) ε — диэлектрическая проницаемость, d — межслоевое расстояние, $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера.

При выводе динамического уравнения для волновой функции конденсата будем следовать подходу, развитому Келдышем [25], согласно которому когерентное состояние e–h пар в приближении самосогласованного поля можно представить вектором $|\phi\rangle = \hat{D}_\phi|0\rangle$, где вектор $|0\rangle$ является вакуумным состоянием системы ($\psi_k|0\rangle = 0$), а унитарный оператор $\hat{D}_\phi = \mathrm{e}^{\hat{A}}$. Антиэрмитовый оператор $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{A} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2[\psi_1^+(\mathbf{r}_1)\Phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t)\mathrm{e}^{-i\mu t}\psi_2^+(\mathbf{r}_2) - \text{h.c.}]. \tag{4}$$

Входящие в $\hat{A}$ неизвестная комплексная функция $\Phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t)$ и химический потенциал e–h пар μ должны находиться из уравнения Шредингера для вектора $|\phi\rangle$, которое удобно записать как

$$(i\hbar\hat{D}_\phi^+\frac{\partial}{\partial t}\hat{D}_\phi - \hat{D}_\phi^+ H\hat{D}_\phi)|0\rangle = 0. \tag{5}$$

Заметим, что выражение $\hat{D}_\phi^+ H\hat{D}_\phi$ по своей структуре совпадает с исходным гамильтонианом (1), однако в него входят новые операторы рождения $\tilde{\psi}_k^+(\mathbf{r}) = \hat{D}_\phi^+\psi_k^+(\mathbf{r})\hat{D}_\phi$ и уничтожения $\tilde{\psi}_k(\mathbf{r}) = \hat{D}_\phi^+\psi_k(\mathbf{r})\hat{D}_\phi$. Использовав известную формулу

$$\mathrm{e}^{-\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{\hat{A}} = \hat{B} - [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] - \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \ldots, \tag{6}$$

где $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$, получим

$$\tilde{\psi}_1(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'[C(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi_1(\mathbf{r}') + S(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi_2^+(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-i\mu t}], \tag{7}$$

$$\tilde{\psi}_2(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'[\psi_2(\mathbf{r}')\tilde{C}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) - \psi_1^+(\mathbf{r}')S(\mathbf{r}',\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\mu t}]. \tag{8}$$

Таким образом, операторы $\hat{D}_\phi^+$ и $\hat{D}_\phi$ выполняют линейное преобразование операторов рождения и уничтожения электронов и дырок. Коэффициенты преобразования представляют собой свертки*

$$C(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{1}{2!}\int d\mathbf{r}''\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\Phi^*(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') + \ldots, \tag{9}$$

$$\tilde{C}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{1}{2!}\int d\mathbf{r}''\Phi^*(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') + \ldots, \tag{10}$$

$$S(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \\ = \Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{1}{3!}\int\int d\mathbf{r}''d\mathbf{r}'''\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\Phi^*(\mathbf{r}''',\mathbf{r}'')\Phi(\mathbf{r}''',\mathbf{r}') + \ldots \tag{11}$$

Поскольку в статье рассматривается случай низкой плотности e–h пар, в дальнейшем в выражениях (9)–(11) будем ограничиваться явно выписанными слагаемыми не выше третьего порядка по Φ.

В уравнении (5) наиболее громоздкие вычисления связаны со вторым слагаемым. Чтобы понять, как они выполняются, поучительно рассмотреть вклад в гамильтониан от взаимодействия электронов и дырок. В приближении самосогласованного поля имеем

$$\hat{H}_{12} = \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}'V_{12}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')[\langle\psi_1^+(\mathbf{r})\psi_2^+(\mathbf{r}')\rangle\psi_2(\mathbf{r}')\psi_1(\mathbf{r}) - \langle\psi_1^+(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r}')\rangle\psi_2^+(\mathbf{r}')\psi_1(\mathbf{r}) + \langle\psi_1^+(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r})\rangle\psi_2^+(\mathbf{r}')\psi_2(\mathbf{r}') + \\ + \langle\psi_2^+(\mathbf{r}')\psi_2(\mathbf{r}')\rangle\psi_1^+(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r}) - \langle\psi_2^+(\mathbf{r}')\psi_1(\mathbf{r})\rangle\psi_1^+(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r}') + \langle\psi_2(\mathbf{r}')\psi_1(\mathbf{r})\rangle\psi_1^+(\mathbf{r})\psi_2^+(\mathbf{r}')], \tag{12}$$

* Обращаем внимание читателя на матричную структуру выражений (9)–(11), которая хорошо видна, если ввести естественное обозначение $\Phi^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \Phi^*(\mathbf{r}',\mathbf{r})$. В дальнейшем будем использовать матричную структуру выражений для их компактной записи.

где средние берутся по состоянию $|\phi\rangle$, которое учитывает наличие e–h пар. Вычисление всех входящих в (12) средних однотипно. Например, последнее среднее вычисляется следующим образом:

$$\langle\psi_2(\mathbf{r}')\psi_1(\mathbf{r})\rangle =$$
$$= \langle 0|\tilde{\psi}_2(\mathbf{r}')\tilde{\psi}_1(\mathbf{r})|0\rangle = \int d\mathbf{r}_1 S(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\tilde{C}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r})e^{-i\mu t}.$$

При переходе к последнему выражению мы воспользовались равенствами (7) и (8). Для остальных средних получаем

$$\langle\psi_1^+(\mathbf{r})\psi_2^+(\mathbf{r}')\rangle = \int d\mathbf{r}_1\tilde{C}(\mathbf{r}',\mathbf{r}_1)S^+(\mathbf{r}_1,\mathbf{r})e^{i\mu t},$$
$$\langle\psi_1^+(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r}')\rangle = \langle\psi_2^+(\mathbf{r}')\psi_1(\mathbf{r})\rangle = 0,$$
$$\langle\psi_1^+(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r})\rangle = \int d\mathbf{r}_1 S(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)S^+(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}) = n_1(\mathbf{r}),$$
$$\langle\psi_1^+(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r})\rangle = \int d\mathbf{r}_1 S^+(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}) = n_2(\mathbf{r}),$$

где $S^+(\mathbf{r},\mathbf{r}') = S^*(\mathbf{r}',\mathbf{r})$. Если ввести обозначение

$$v_{12}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = V_{12}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\int d\mathbf{r}_1 S(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\tilde{C}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}'), \quad (13)$$

гамильтониан электронно-дырочного взаимодействия в приближении самосогласованного поля можно записать более компактно:

$$\hat{H}_{12} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2[v_{12}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\psi_1^+(\mathbf{r}_1)\psi_2^+(\mathbf{r}_2)e^{-i\mu t} +$$
$$+ v_{12}^*(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_2)\psi_1(\mathbf{r}_1)e^{i\mu t} +$$
$$+ V_{12}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)n_1(\mathbf{r}_1)\psi_2^+(\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_2) +$$
$$+ V_{12}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)n_2(\mathbf{r}_2)\psi_1^+(\mathbf{r}_1)\psi_1(\mathbf{r}_1)]. \quad (14)$$

Аналогичным образом преобразуются гамильтониан электрон-электронного взаимодействия $\hat{H}_{11}$ и гамильтониан дырочно-дырочного взаимодействия $\hat{H}_{22}$.

Рассмотрим подробно вклад, который вносит гамильтониан электронно-дырочного взаимодействия (14) в уравнение Шредингера (5). Действие обкладок $\hat{D}_\phi^+$ и $\hat{D}_\phi$ приводит к замене полевых операторов $\psi_k(\mathbf{r})$ и $\psi_k^+(\mathbf{r})$ на $\tilde{\psi}_k(\mathbf{r})$ и $\tilde{\psi}_k^+(\mathbf{r})$ соответственно. Если теперь (воспользовавшись соотношениями (7) и (8) и эрмитово сопряженными к ним соотношениями) вернуться к исходным полевым операторам, получим сумму, состоящую из слагаемых, каждое из которых пропорционально какому-либо из следующих произведений: $\psi_1^+\psi_1, \psi_2^+\psi_2, \psi_1^+\psi_2^+$ и $\psi_1\psi_2$. Из этих слагаемых только пропорциональные $\psi_1^+\psi_2^+$ дают ненулевой вклад при их действии на вакуумное состояние $|0\rangle$. Явный вид этих слагаемых таков:

$$\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2\psi_1^+(\mathbf{r}_1)[Cv_{12}\tilde{C} - Sv_{12}^+S +$$
$$+ S\varphi_{21}\tilde{C} + C\varphi_{12}S]_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\psi_2^+(\mathbf{r}_2)e^{-i\mu t}, \quad (15)$$

где

$$\varphi_{kl}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\int d\mathbf{r}'' n_l(\mathbf{r}'')V_{lk}(\mathbf{r}-\mathbf{r}''). \quad (16)$$

Следует иметь в виду, что в (15) в квадратных скобках под произведениями понимаются интегральные свертки по «внутренним» повторяющимся аргументам. Например, $[Cv_{12}\tilde{C}]_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2} = \int d\mathbf{r}'d\mathbf{r}'' C(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}')v_{12}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\tilde{C}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}_2)$.

Аналогичным образом слагаемые, пропорциональные произведению $\psi_1^+\psi_2^+$, можно выделить и из остальных вкладов в уравнение Шредингера (5). (Мы имеем в виду вклад первого слагаемого, содержащего производную по времени, вклад одночастичной части гамильтониана, а также электрон-электронного и дырочно-дырочного взаимодействий.) Сумму выделенных слагаемых запишем как $\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2\psi_1^+(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t)\psi_2^+(\mathbf{r}_2)e^{-i\mu t}$. Ясно, что уравнение Шредингера удовлетворяется, если $Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t) = 0$. В явном виде это равенство представляет собой следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для функции Φ:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = C(h_1 + \varphi_{12} + \varphi_{11} + v_{11})S +$$
$$+ S(h_2 + \varphi_{21} + \varphi_{22} + v_{22})\tilde{C} + Cv_{12}\tilde{C} - Sv_{12}^+S - \mu CS. \quad (17)$$

Как и в (15), здесь произведения обозначают интегральные свертки по повторяющимся пространственным аргументам. При этом для сохранения матричной структуры (17) в кинетическую энергию h_k вводится дельта-функция $\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')$. Отметим, что в уравнении (17) слагаемые с φ_{kl} соответствуют приближению Хартри, слагаемые с $v_{11}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = V_{11}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\int d\mathbf{r}_1 S(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)S^+(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}')$ и $v_{22}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = V_{22}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\int d\mathbf{r}_1 S^+(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}')$ учитывают внутрислоевое обменное взаимодействие, а вклад межслоевого обменного взаимодействия содержится в слагаемых с v_{12}. Учет приложенного электростатического потенциала $V_k(\mathbf{r})$ отложим до следующего раздела.

Довольно сложный вид уравнения (17) обусловлен тем, что оно описывает конденсат e–h пар при произвольной его плотности. В интересующем нас пределе низкой плотности ситуация существенно упрощается. В этом пределе уравнение (17) можно решать методами теории возмущений, разлагая все члены уравнения по степеням функции Φ. В линейном по Φ порядке, соответствующем случаю невзаимодействующих пар, имеем

$$i\hbar\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t)}{\partial t}=$$
$$=[h_1(\mathbf{r}_1)+h_2(\mathbf{r}_2)+V_{12}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)-\mu]\Phi_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t). \quad (18)$$

Полученное уравнение можно преобразовать в уравнение для медленно меняющейся в пространстве и во времени волновой функции конденсата *e–h* пар, если усреднить (18) по «быстрым» переменным, описывающим внутренние степени свободы *e–h* пар. Чтобы выделить внутренние степени свободы, перейдем от координат электрона $\mathbf{r}_1$ и дырки $\mathbf{r}_2$ к разностной координате $\tilde{\mathbf{r}}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ и координате центра инерции пары $\mathbf{R}=(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2)/(m_1+m_2)$. В симметричной калибровке $\mathbf{A}_k(\mathbf{r}_k)=(1/2)[\mathbf{H}\mathbf{r}_k]$ приближенное решение уравнения (18) для состояний на нижней ветви экситонного спектра удобно искать в виде

$$\Phi(\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{R},t)=\exp\left(\frac{ie}{2\hbar c}\mathbf{R}[\mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}}]+\frac{\gamma}{2}\tilde{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\right)\varphi_0(\tilde{\mathbf{r}}-\hat{\rho})\Psi(\mathbf{R},t). \quad (19)$$

Здесь $\gamma=(m_2-m_1)/(m_2+m_1)$, волновая функция состояния на нижнем уровне Ландау $\varphi_0(\mathbf{r})=(\sqrt{2\pi}l_H)^{-1}\times\exp(-r^2/4l_H^2)$, а оператор $\hat{\rho}=-i(\hbar c/eH^2)[\mathbf{H}(\partial/\partial\mathbf{R})]$. Структура выражения (19) определяется решением стационарного уравнения Шредингера для *e–h* пары в двухслойной системе: при $\Psi(\mathbf{R})\propto\exp((i/\hbar)\mathbf{pR})$ выражение (19) переходит в волновую функцию экситона с импульсом $\mathbf{p}$ [26,27]. В интересующем нас случае медленно меняющейся функции $\Psi(\mathbf{R})$ выражение (19) представляет собой волновой пакет, составленный из экситонных состояний с малыми импульсами.

Чтобы получить уравнение для $\Psi(\mathbf{R},t)$, подставим (19) в (18), подействуем на (18) слева оператором $\varphi_0(\tilde{\mathbf{r}}-\hat{\rho})\exp\left(-\frac{ie}{2\hbar c}\mathbf{R}[\mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}}]-\frac{\gamma}{2}\tilde{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\right)$ и проинтегрируем по переменной $\tilde{\mathbf{r}}$, связанной с внутренними степенями свободы *e–h* пары. В результате интегрирования левой части уравнения (18) получим $\dot{\Psi}(\mathbf{R},t)$. В правой части два первых слагаемых дадут $(\hbar\omega_c/2+E_1-E_2)\Psi(\mathbf{R},t)$, где $\omega_c=(m_1^{-1}+m_2^{-1})(eH/c)$. Поскольку $\mathbf{R}$ является «медленной» переменной, интеграл от кулоновского слагаемого в (18) можно вычислить, разложив $\varphi_0(\mathbf{r}-\hat{\rho})$ по степеням $\hat{\rho}$ с точностью до членов второго порядка. Вклад нулевого порядка дает энергию связи *e–h* пары

$$E_b=-\frac{e^2}{\varepsilon l_H}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H}\right). \quad (20)$$

Здесь

$$\mathrm{erfc}(x)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$$

— дополнительная функция ошибок. Квадратичное по $\hat{\rho}$ слагаемое (с учетом равенства $\hat{\rho}^2=-l_H^4\partial^2/\partial\mathbf{R}^2$) приводит к выражению для кинетической энергии *e–h* пары $-(\hbar^2/2M_H)\partial^2\Psi(\mathbf{R},t)/\partial\mathbf{R}^2$. В сильном магнитном поле эффективная масса пары определяется кулоновским взаимодействием электрона и дырки и не зависит от их масс m_1 и m_2:

$$M_H=\frac{2\varepsilon\hbar^2}{e^2l_H}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\left(1+\frac{d^2}{l_H^2}\right)\exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{l_H}\right]^{-1}. \quad (21)$$

В двухслойной системе величина M_H растет с увеличением как магнитного поля, так и расстояния между слоями d. При $d=0$ эффективная масса пары $M_H=[2\varepsilon\hbar^2/(e^2l_H)]\sqrt{2/\pi}$. Положив химический потенциал μ равным энергии основного состояния невзаимодействующих пар, $\mu=\mu_0=(\hbar\omega_c/2)+E_1-E_2+E_b$, приходим к уравнению

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{R},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2M_H}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{R}^2}\Psi(\mathbf{R},t), \quad (22)$$

которое описывает динамику конденсата невзаимодействующих *e–h* пар.

Чтобы учесть взаимодействие между *e–h* парами, в уравнении (17) нужно удержать кубические по Φ слагаемые. Кроме того, следует помнить, что из-за взаимодействия возникает сдвиг химического потенциала μ_1. Для вычисления μ_1 достаточно взять уравнение (17) в стационарном случае. Заметим, что в отсутствие взаимодействия *e–h* пар уравнение (17) можно записать символически как $H_0\Phi_0=\mu_0\Phi_0$, где гамильтониан H_0 представляет собой первые три слагаемые в квадратной скобке уравнения (18). С учетом взаимодействия уравнение (17) имеет вид

$$H_0(\Phi_0+\Phi_1)+H_1(\Phi_0)=\mu_0(\Phi_0+\Phi_1)+\mu_1\Phi_0. \quad (23)$$

Здесь в $H_1(\Phi_0)$ собраны все кубические по Φ вклады из разложения правой части уравнения (17). После вычитания из (23) уравнения нулевого порядка получим

$$(H_0-\mu_0)\Phi_1=\mu_1\Phi_0-H_1(\Phi_0). \quad (24)$$

Введем скалярное произведение двух функций:

$$(f,g)=\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}'f^+(\mathbf{r}',\mathbf{r})g(\mathbf{r},\mathbf{r}'). \quad (25)$$

Поскольку правая часть равенства (24) ортогональна Φ_0, для μ_1 имеем

$$\mu_1 = \frac{(\Phi_0, H_1(\Phi_0))}{(\Phi_0, \Phi_0)}. \qquad (26)$$

Из нормировки функции Φ_0 на среднюю плотность пар n_p следует, что $(\Phi_0, \Phi_0) = Sn_p$, где S — площадь слоя. Для числителя в (26) нетрудно записать явное выражение:

$$(\Phi_0, H_1(\Phi_0)) = -\int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}' [V_{11}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) + V_{22}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}') +$$
$$+ V_{12}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) + V_{12}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)]\Phi_0^+(\mathbf{r}',\mathbf{r})\Phi_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\Phi_0^+(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\times$$
$$\times\Phi_0(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}') + \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Phi_0^+(\mathbf{r}',\mathbf{r})[\varphi_{11}(\mathbf{r}) + \varphi_{12}(\mathbf{r}) +$$
$$+ \varphi_{21}(\mathbf{r}') + \varphi_{22}(\mathbf{r}')]\Phi_0(\mathbf{r}',\mathbf{r}), \qquad (27)$$

где

$$\Phi_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \exp\left[\frac{ie}{2\hbar c}\mathbf{R}[\mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}}]\right]\varphi_0(\tilde{\mathbf{r}})\sqrt{n_p}.$$

Вычислив входящие в (27) интегралы, получим

$$\mu^{(1)} = \frac{e^2}{\varepsilon}\left[4\pi d - (2\pi)^{3/2} l_H + \right.$$
$$\left. + (2\pi)^{3/2} l_H \exp\left(\frac{d^2}{2l_H^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}l_H}\right)\right] n_p. \qquad (28)$$

В выражении (28) первое слагаемое связано с прямым кулоновским взаимодействием носителей. Второе и третье слагаемые описывают обменные вклады внутрислоевого и межслоевого взаимодействий носителей соответственно [28,29]. В важном случае малого межслоевого расстояния ($d \ll l_H$)

$$\mu^{(1)} = \sqrt{2}\pi^{3/2}\frac{e^2 d^2}{\varepsilon l_H} n_p. \qquad (29)$$

Заметим, что взаимодействие между e–h парами ослабляется с уменьшением расстояния между слоями, и при $d = 0$ e–h пары образуют идеальный газ [30]. (Последнее утверждение справедливо в пренебрежении переходами с нижнего уровня Ландау на более высокие уровни.)

Нелинейный (кубический по Ψ) вклад в динамическое уравнение для волновой функции конденсата вычисляется подстановкой выражения (19) (без производных по «медленной» переменной $\mathbf{R}$) в кубические по Φ члены исходного уравнения (17). Далее следует умножить результат на $\varphi_0(\tilde{\mathbf{r}})\exp(-\frac{ie}{2\hbar c}\mathbf{R}[\mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}}])$ и проинтегрировать по $\tilde{\mathbf{r}}$. В итоге вычислений получаем, что коэффициент при кубическом члене в точности совпадает с μ_1/n_p. Таким образом, приходим к нелинейному уравнению

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{R},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M_H}\frac{\partial^2\Psi(\mathbf{R},t)}{\partial\mathbf{R}^2} -$$
$$-\frac{\mu^{(1)}}{n_p}[n_p - |\Psi(\mathbf{R},t)|^2]\Psi(\mathbf{R},t), \qquad (30)$$

которое представляет собой уравнение Гросса–Питаевского для волновой функции конденсата e–h пар в отсутствие внешних полей. Из коэффициентов уравнения (30) можно составить параметр $\xi = \hbar/\sqrt{2M_H\mu^{(1)}}$, имеющий смысл характерного масштаба изменения волновой функции $\Psi(\mathbf{R})$. Для согласованности макроскопического подхода необходимо, чтобы длина ξ была много больше среднего расстояния между парами $n_p^{-1/2}$. Легко увидеть, что это условие эквивалентно неравенству $d \ll l_H$.

Коллективные колебания конденсата в однородной системе описываются решениями вида

$$\Psi(\mathbf{R},t) = \sqrt{n_p} + A e^{i(\mathbf{kR}-\omega t)} + B^* e^{-i(\mathbf{kR}-\omega t)}, \qquad (31)$$

где коэффициенты A и B считаются малыми по сравнению с $\sqrt{n_p}$ [31]. Подстановка (31) в (30) приводит к системе уравнений для A и B. Равенство нулю детерминанта этой системы дает закон дисперсии, полученный Боголюбовым для слабо неидеального бозе-газа:

$$\omega_B(k) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2M_H} + 2\mu^{(1)}\right)\frac{k^2}{2M_H}}. \qquad (32)$$

При малых импульсах k и $d \neq 0$ закон дисперсии малых колебаний является звуковым, $\omega = sk$, где скорость звука $s = \sqrt{\mu^{(1)}/M_H}$. Спектр (32) удовлетворяет критерию сверхтекучести Ландау, т.е. при скоростях $v < s$ конденсат e–h пар обладает свойством сверхтекучести. Уменьшение межслоевого расстояния d приводит к уменьшению s. В случае $d = 0$ величина $\mu^{(1)} = 0$, и спектр (32) становится квадратичным по k. Последнее, как известно, означает отсутствие сверхтекучести.

3. Двухслойная система в электростатическом поле

Полученное в предыдущем разделе динамическое уравнение для волновой функции конденсата e–h пар довольно легко обобщается на случай, когда к системе приложено электрическое поле, напряженность которого мало меняется на масштабе l_H. Для такого обобщения примем во внимание входящий в гамильтониан скалярный потенциал $V_k(\mathbf{r})$, который был опущен в предыдущем разделе. Учет $V_k(\mathbf{r})$ изменяет уравнение

(18), в котором теперь появляются слагаемые, представляющие собой потенциальную энергию электрона и дырки в электрическом поле:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t)}{\partial t}=[h_1(\mathbf{r}_1)-eV_1(\mathbf{r}_1)+h_2(\mathbf{r}_2)+$$
$$+eV_2(\mathbf{r}_2)+V_{12}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)-\mu]\Phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t). \qquad (33)$$

Далее, как и в предыдущем разделе, следует перейти к координатам $\tilde{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{R}$ и исключить из (33) быструю переменную $\tilde{\mathbf{r}}$. Интеграл, возникающий при исключении $\tilde{\mathbf{r}}$, упрощается следующим образом:

$$\int d\tilde{\mathbf{r}}\varphi_0(\tilde{\mathbf{r}}-\hat{\rho})e^{(-\gamma/2)\tilde{\mathbf{r}}\partial/\partial\mathbf{R}}[-eV_1(\mathbf{R}+\frac{m_2}{M}\tilde{\mathbf{r}}_1)+$$
$$+eV_2(\mathbf{R}-\frac{m_1}{M}\tilde{\mathbf{r}}_1)]e^{(\gamma/2)\tilde{\mathbf{r}}\partial/\partial\mathbf{R}}\varphi_0(\tilde{\mathbf{r}}-\hat{\rho})\Psi(\mathbf{R},t)=$$
$$=\int d\tilde{\mathbf{r}}\varphi_0(\tilde{\mathbf{r}}-\hat{\rho})[-eV_1(\mathbf{R}+\frac{\tilde{\mathbf{r}}_1}{2})+$$
$$+eV_2(\mathbf{R}-\frac{\tilde{\mathbf{r}}_1}{2})]\varphi_0(\tilde{\mathbf{r}}-\hat{\rho})\Psi(\mathbf{R},t).$$

Поскольку мы рассматриваем плавные на масштабе l_H изменения потенциала, функции $V_k(\mathbf{R}\pm\tilde{\mathbf{r}}_1/2)$ можно разложить по степеням $\tilde{\mathbf{r}}$, а оператор $\varphi_0(\tilde{\mathbf{r}}-\hat{\rho})$ — по степеням $\hat{\rho}$. Если в разложениях ограничиться членами не выше первого порядка, рассматриваемый интеграл сводится к следующему выражению:

$$e[V_2(\mathbf{R})-V_1(\mathbf{R})]\Psi(\mathbf{R},t)+\frac{\alpha}{cM_H}[\mathbf{E}_{\parallel}\mathbf{H}]\times$$
$$\times\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\Psi(\mathbf{R},t)+\frac{\alpha}{2cM_H}\Psi(\mathbf{R},t)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}[\mathbf{E}_{\parallel}\mathbf{H}], \qquad (34)$$

где введены поляризуемость e–h пары $\alpha=c^2M_H/H^2$ и поляризующее пару электрическое поле

$$\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{R})=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}[V_1(\mathbf{R})+V_2(\mathbf{R})].$$

Включив слагаемые (34) в уравнение (30) и использовав равенство

$$\frac{\alpha^2}{2M_Hc^2}[\mathbf{E}_{\parallel}\mathbf{H}]^2=\frac{\alpha}{2}E_{\parallel}^2,$$

получим динамическое уравнение для волновой функции конденсата e–h пар в электростатическом поле:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{R},t)}{\partial t}=\left\{\frac{1}{2M_H}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}+\frac{\alpha}{c}[\mathbf{E}_{\parallel}\mathbf{H}]\right)^2-\frac{\alpha}{2}E_{\parallel}(\mathbf{R})^2+\right.$$
$$\left.+e[V_2(\mathbf{R})-V_1(\mathbf{R})]-\mu+g|\Psi(\mathbf{R},t)|^2\right\}\Psi(\mathbf{R},t), \qquad (35)$$

с константой взаимодействия пар $g=\mu_1/n_p$. Заметим, что в неоднородном случае химический потенциал μ должен находиться из условия нормировки $\int|\Psi|^2\,d\mathbf{R}$ на полное число e–h пар N.

3.1. Поляризация e–h пар параллельным электрическим полем

Важным следствием уравнения (35) является уравнение непрерывности для сверхтекучей плотности n_s:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t}+\operatorname{div}(n_s\mathbf{v}_s)=0. \qquad (36)$$

Чтобы получить (36), нужно продифференцировать соотношение $n_s=\Psi\Psi^*$ по времени и воспользоваться равенством (35) при вычислении производных $\partial\Psi/\partial t$ и $\partial\Psi^*/\partial t$. После несложных преобразований получаем (36), где сверхтекучая скорость

$$\mathbf{v}_s=\frac{1}{M_H}\left(\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{R}}+\frac{\alpha}{c}[\mathbf{E}_{\parallel}\mathbf{H}]\right). \qquad (37)$$

Здесь φ — фаза волновой функции конденсата ($\Psi=|\Psi|e^{i\varphi}$). Зависящая от электрического поля добавка к градиенту фазы имеет ясный физический смысл. Она возникает из сдвига фазы $\Delta\varphi_{eh}$ волновой функции e–h пары при ее движении в поле векторного потенциала:

$$\Delta\varphi_{eh}=-\frac{e}{\hbar c}\int d\mathbf{r}_1\mathbf{A}_1(\mathbf{r}_1)+\frac{e}{\hbar c}\int d\mathbf{r}_2\mathbf{A}_2(\mathbf{r}_2), \qquad (38)$$

где интегралы берутся вдоль траекторий электрона и дырки соответственно. Поскольку в электрическом поле e–h пара поляризована, траектории электрона и дырки не совпадают и в общем случае сдвиг фазы $\Delta\varphi_{eh}\neq 0$. Как нетрудно показать [32], входящее в (37) слагаемое $(\alpha/c)[\mathbf{E}_{\parallel}\mathbf{H}]=-\hbar\partial\Delta\varphi_{eh}/\partial\mathbf{R}$.

Хорошо известно, что уравнение Гросса–Питаевского можно вывести с помощью вариационной процедуры

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{R},t)}{\partial t}=\frac{\delta\mathcal{E}[\Psi,\Psi^*]}{\delta\Psi^*},$$

где $\mathcal{E}[\Psi,\Psi^*]$ — функционал энергии [23]. В частности, чтобы получить уравнение (35), функционал энергии следует взять в виде

$$\mathcal{E}[\Psi,\Psi^*]=\int d\mathbf{R}\Psi^*\left\{\frac{1}{2M_H}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}+\frac{\alpha}{c}[\mathbf{E}_{\parallel}\mathbf{H}]\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{2}E_{\parallel}(\mathbf{R})^2+e[V_2(\mathbf{R})-V_1(\mathbf{R})]-\mu+\frac{g}{2}|\Psi|^2\right\}\Psi. \qquad (39)$$

Вариация $-\mathcal{E}$ по электрическому полю $\mathbf{E}_\parallel$ дает параллельный слоям дипольный момент, приходящийся на единицу площади:

$$\mathbf{P}_\parallel = -\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\mathbf{E}_\parallel} = \alpha\left(\mathbf{E}_\parallel + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_s\mathbf{H}]\right)|\Psi|^2. \qquad (40)$$

Этот результат показывает, что как электрическое поле, так и сила Лоренца поляризуют *e–h* пару. Поскольку выражение в круглых скобках представляет собой электрическое поле в системе отсчета, движущейся вместе с конденсатом, можно также сказать, что *e–h* пару поляризует электрическое поле в сопутствующей системе отсчета.

Параллельное слоям однородное электрическое поле изменяет закон дисперсии малых колебаний конденсата (32), который принимает вид

$$\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{v}_s + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2M_H} + 2\mu^{(1)}\right)\frac{k^2}{2M_H}}, \qquad (41)$$

где индуцированная полем сверхтекучая скорость

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{E}_\parallel) = \frac{1}{M_H}\frac{\alpha}{c}[\mathbf{E}_\parallel\mathbf{H}].$$

Заметим, что $\mathbf{v}_s(\mathbf{E}_\parallel)$ — это скорость, при которой в системе отсчета, движущейся вместе с конденсатом, электрическое поле отсутствует. Выражение (41) представляет собой закон дисперсии возбуждений, которые распространяются в конденсате, движущемся со скоростью $\mathbf{v}_s(\mathbf{E}_\parallel)$.

В соответствии с критерием сверхтекучести Ландау величина $\mathbf{v}_s(\mathbf{E}_\parallel)$ не должна превышать критического значения $s = \sqrt{\mu^{(1)}/M_H}$. Этому значению соответствует критическая напряженность электрического поля $E_{\parallel\mathrm{cr}} = (s/c)H$. Для типичных значений параметров двухслойной системы $n_p \sim 10^{10}$ см$^{-2}$, $d \sim 10^{-6}$ см, $H \sim 1$ Тл, $\varepsilon \sim 10$ оценка дает $E_{\parallel\mathrm{cr}} \sim 10^3$ В/см.

3.2. Электростатические экситонные ловушки

Входящее в уравнение (35) слагаемое $e[V_2(\mathbf{R}) - V_1(\mathbf{R})]$ представляет собой потенциальную энергию *e–h* пары. Рассмотрим ситуацию, когда потенциальная энергия понижена в области, размеры которой существенно больше, чем l_H. Поскольку *e–h* пары концентрируются в такой области, она обычно называется электростатической экситонной ловушкой. Рассмотрим стационарные состояния и динамику конденсата *e–h* пар в электростатических ловушках. В настоящее время электростатические ловушки используются в экспериментах на двухслойных системах при лазерном возбуждении *e–h* пар, поскольку накопление *e–h* пар в области ловушки облегчает их бозе-эйнштейновскую конденсацию [33,34].

Для анализа динамики конденсата *e–h* пар в электростатической ловушке найдем скорость изменения фазы $\partial\varphi/\partial t$. С этой целью уравнение (35) умножим на $e^{-i\varphi}$ и возьмем его вещественную часть. После простых преобразований получаем

$$\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2M_H}\frac{1}{\sqrt{n_s}}\frac{\partial^2\sqrt{n_s}}{\partial\mathbf{R}^2} - \frac{M_H}{2}v_s^2 + $$
$$+\frac{\alpha}{2}E_\parallel(\mathbf{R})^2 + e(V_1 - V_2) - gn_s + \mu. \qquad (42)$$

В случае статических полей из формулы (37) следует, что изменение кинематического импульса *e–h* пары связано с фазой φ соотношением

$$\frac{\partial(M_H\mathbf{v}_s)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\left[\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right].$$

Отсюда с учетом (42) имеем

$$M_H\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t} = e\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}[V_1(\mathbf{R}) - V_2(\mathbf{R})] + $$
$$+\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\left(\frac{\hbar^2}{2M_H}\frac{1}{\sqrt{n_s}}\frac{\partial^2\sqrt{n_s}}{\partial\mathbf{R}^2} - \frac{M_H}{2}v_s^2 + \frac{\alpha}{2}E_\parallel^2 - gn_s\right). \qquad (43)$$

Смысл первого слагаемого в правой части вполне прозрачен: это параллельная слоям сила, действующая на *e–h* пару со стороны электрического поля.

Для электростатических ловушек, размеры которых R_0 много больше, чем длина когерентности $\xi = \hbar/\sqrt{2M_H\mu^{(1)}}$, можно пренебречь слагаемым $\frac{\hbar^2}{2M_H}\frac{1}{\sqrt{n_s}}\frac{\partial^2\sqrt{n_s}}{\partial\mathbf{R}^2}$ по сравнению с gn_s. В этом случае постоянная Планка выпадает из уравнения (43) и оно становится уравнением гидродинамики конденсата *e–h* пар. В основном состоянии, когда $\partial\varphi/\partial t = 0$, плотность конденсата *e–h* пар в достаточно больших ловушках ($R_0 >> \xi$) описывается уравнением

$$e[V_2(\mathbf{R}) - V_1(\mathbf{R})] + \frac{M_H}{2}v_{s0}^2 - \frac{\alpha}{2}E_\parallel^2 - gn_{s0}(\mathbf{R}) = \mu. \qquad (44)$$

Зная основное состояние, можно рассмотреть динамическую задачу о свободных колебаниях конденсата в электростатической ловушке. Для определенности рассмотрим ловушку, которая создается точечным зарядом $q > 0$, расположенным в точке $(0,0,h_q)$, причем $h_q >> d$. Координаты проводящих слоев: $z_{1,2} = \pm d/2$. Вблизи центра ловушки, т.е. при $R << h_q$, удерживающий потенциал имеет квадратичный ход:

$$[V_2(R)-V_1(R)]=[V_2(0)-V_1(0)]+\frac{M_H}{2e}\omega_0^2R^2, \quad (45)$$

где $\omega_0^2=3qed/(\varepsilon M_H h_q^4)$. Помимо удерживающего потенциала точечный заряд q также создает параллельное слоям электрическое поле

$$\mathbf{E}_\parallel=\frac{q}{\varepsilon h_q^3}\mathbf{R}, \quad (46)$$

которое приводит к поляризации e–h пар и ненулевой сверхтекучей скорости в основном состоянии. Согласно (37), сверхтекучая скорость дается выражением, описывающим твердотельное вращение

$$\mathbf{v}_{s0}=\frac{1}{M_H}\frac{\alpha}{c}[\mathbf{E}_\parallel\mathbf{H}]=-\Omega_q R\mathbf{e}_\theta, \quad (47)$$

где $\Omega_q=cq/(\varepsilon h_q^3H)$ — угловая скорость вращения, а $\mathbf{e}_\theta$ — азимутальный единичный вектор. При выводе (47) предполагалось, что поле $\mathbf{E}_\parallel$ не слишком велико и не порождает квантованные вихри (см. [24]); таким образом, в (37) мы положили $\partial\varphi/\partial\mathbf{R}=0$. (Влияние квантованного вихря на колебания конденсата в гармонической экситонной ловушке рассмотрено в следующем разделе.) Поскольку, согласно (47), $M_Hv_{s0}^2=\alpha E_\parallel^2$, уравнение (44) упрощается, и равновесная плотность конденсата может быть записана как

$$n_{s0}(R)=\frac{M_H}{2g}\omega_0^2(R_0^2-R^2), \quad (48)$$

где R_0 — радиус области, которую занимает конденсат. Условие нормировки связывает R_0 с полным числом e–h пар в ловушке:

$$N=\frac{\pi M_H\omega_0^2}{4g}R_0^4. \quad (49)$$

В случае малых колебаний плотность конденсата можно записать в виде суммы равновесной плотности и малой добавки: $n_s(\mathbf{R},t)=n_{s0}(R)+n_{s1}(\mathbf{R},t)$. Аналогично для сверхтекучей скорости имеем $\mathbf{v}_s(\mathbf{R},t)=\mathbf{v}_{s0}(R)+\mathbf{v}_{s1}(\mathbf{R},t)$. Линеаризация уравнения непрерывности (36) и гидродинамического уравнения дает следующую систему уравнений для добавок n_{s1} и $\mathbf{v}_{s1}$:

$$\frac{\partial n_{s1}}{\partial t}=-\operatorname{div}(n_{s0}\mathbf{v}_{s1})-\operatorname{div}(n_{s1}\mathbf{v}_{s0}), \quad (50)$$

$$M_H\frac{\partial \mathbf{v}_{s1}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}(M_H\mathbf{v}_{s0}\mathbf{v}_{s1}+gn_{s1}). \quad (51)$$

В линейном по $\mathbf{v}_{s0}$ приближении из этой системы можно получить уравнение для комплексной амплитуды колебаний плотности конденсата $\overline{n}_{s1}(\mathbf{R})$:

$$\omega^2\overline{n}_{s1}+\frac{g}{M_H}\operatorname{div}(n_{s0}\nabla\overline{n}_{s1})=$$
$$=-i\operatorname{div}(\mathbf{v}_{s0}\overline{n}_{s1})+\frac{ig}{\omega M_H}\operatorname{div}[n_{s0}\nabla(\mathbf{v}_{s0}\nabla\overline{n}_{s1})]. \quad (52)$$

Найдем сначала собственные частоты колебаний конденсата при $\mathbf{v}_{s0}=0$, а затем вычислим расщепление этих частот, связанное со скоростью $\mathbf{v}_{s0}$, индуцированной параллельным электрическим полем (46). Положив правую часть равенства (52) равной нулю и записав $\overline{n}_{s1}(\mathbf{R})$ в виде $\tilde{n}_{s1}(R)\mathrm{e}^{im\theta}$, где m — целое число, получим для $\tilde{n}_{s1}$ уравнение

$$\frac{1-x^2}{2}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\tilde{n}_{s1}}{dx}\right)-\frac{m^2}{x^2}\tilde{n}_{s1}\right]-x\frac{d\tilde{n}_{s1}}{dx}+\Omega^2\tilde{n}_{s1}=0. \quad (53)$$

Здесь использованы безразмерные величины $x=R/R_0$ и $\Omega=\omega/\omega_0$. Уравнение (53) с помощью подстановки $\tilde{n}_{s1}=x^{|m|}F(x)$ и последующей замены $x=\sqrt{y}$ сводится к

$$y(1-y)F''_{yy}+[|m|+1-y(|m|+2)]F'_y+\frac{1}{2}(\Omega^2-|m|)F=0. \quad (54)$$

Решением этого уравнения является гипергеометрическая функция ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,y)$, где $\gamma=|m|+1$, $\alpha+\beta=|m|+1$, $\alpha\beta=(\Omega^2-|m|)/2$. Гипергеометрическая функция регулярна при $y=0$. Чтобы она была регулярна при $y=1$, необходимо, чтобы величина α была целым неположительным числом: $\alpha=-n$. В этом случае частота Ω принимает дискретные значения

$$\Omega_{nm}^{(0)}=\sqrt{2n^2+2n|m|+2n+|m|}, \quad (55)$$

которые и определяют спектр частот колебаний конденсата в электростатической ловушке без учета вклада параллельного электрического поля. Заметим, что (55) совпадает с выражением для безразмерной частоты колебаний бозе-атомов в цилиндрической магнитной ловушке [35,36].

Найдем сдвиг частоты, связанный с правой частью уравнения (52). После отделения угловой координаты θ уравнение (52) может быть записано как

$$\Omega^2\tilde{n}_{s1}+\hat{L}\tilde{n}_{s1}=-\frac{\Omega_q m}{\omega_0\Omega}(\Omega^2\tilde{n}_{s1}-\hat{L}\tilde{n}_{s1}), \quad (56)$$

где самосопряженный дифференциальный оператор

$$\hat{L}=\frac{1-x^2}{2}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx})-\frac{m^2}{x^2}\right]-x\frac{d}{dx}.$$

Умножим (56) на функцию $\tilde{n}_{nm}$, которая представляет собой решение уравнения (53), соответствующее собственной частоте $\Omega_{nm}^{(0)}$. Затем проинтегрируем правую и левую части полученного равенства от 0 до 1 с весовым множителем x. С учетом самосопряженности оператора $\hat{L}$ и равенства (53) получим

$$\Omega_{nm}^2 - (\Omega_{nm}^{(0)})^2 = -2m\Omega_{nm}^{(0)} \frac{\Omega_q}{\omega_0}, \tag{57}$$

откуда следует, что в размерных единицах сдвиг частоты

$$\omega_{nm} - \omega_{nm}^{(0)} = -m\Omega_q. \tag{58}$$

Можно показать, что сдвиг частоты мал по сравнению с расстоянием между частотами, если $ed >> \alpha E(0)$ (при этом, конечно, $d << l_H$).

4. Экситонные ловушки, сформированные вариациями состава полупроводников

Вариации состава полупроводника, образующего квантовую яму, приводят к пространственной неоднородности характеристик зонной структуры, т.е. к зависимости положения дна зоны проводимости E_1 и/или потолка валентной зоны E_2 от координат в плоскости квантовой ямы. Поскольку подробное обсуждение способов создания неоднородности энергетических параметров E_1 и E_2 не является нашей задачей, только заметим, что зависимости E_1 и E_2 от $\mathbf{r}$ можно получить, если в качестве формирующего квантовую яму узкозонного полупроводника использовать $Al_xGa_{1-x}As$, у которого концентрация атомов Al, с одной стороны, достаточно мала (чтобы он оставался узкозонным), а с другой стороны, варьируется в плоскости слоя. Отметим также, что пространственная неоднородность зонной структуры может возникать вследствие приложенных к двухслойной системе неоднородных механических напряжений [37].

Двухслойные системы, у которых энергетические параметры E_1 и E_2 являются плавными функциями координат, можно описывать в рамках подхода, развитого в предыдущем разделе. Уравнение для невзаимодействующих e–h пар в рассматриваемом случае записывается как

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m_1} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}_1) \right]^2 + \right.$$
$$+ E_1(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2m_2} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}_2) \right]^2 + E_2(\mathbf{r}_2) +$$
$$\left. + V_{12}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \mu \right\} \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t). \tag{59}$$

Аналогично преобразованию уравнения (33) из уравнения (59) следует исключить быструю переменную $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, сохранив медленную переменную $\mathbf{R}$ — координату центра инерции пары. В результате этой процедуры в правой части (59) появятся слагаемые

$$E_g(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}, t) + \frac{\alpha}{cM_H} [\mathbf{E}_{\text{in}} \mathbf{H}] \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \Psi(\mathbf{R}, t) +$$
$$+ \frac{\alpha}{2cM_H} \Psi(\mathbf{R}, t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} [\mathbf{E}_{\text{in}} \mathbf{H}],$$

где $E_g(\mathbf{R}) = E_1(\mathbf{R}) - E_2(\mathbf{R})$ — локальное значение щели между зоной проводимости и валентной зоной, а поляризующее пары «внутреннее»поле

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{2e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} [E_1(\mathbf{R}) + E_2(\mathbf{R})].$$

Заметим, что поле $\mathbf{E}_{\text{in}}$ возникает исключительно из-за пространственной неоднородности зонной структуры и не представляет собой какое-либо электрическое поле в системе.

Совершенно аналогично предыдущему разделу можно записать динамическое уравнение для волновой функции конденсата e–h пар в двухслойной системе с неоднородной зонной структурой:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2M_H} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\alpha}{c} [\mathbf{E}_{\text{in}} \mathbf{H}] \right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{2} E_{\text{in}}^2(\mathbf{R}) + E_g(\mathbf{R}) - \mu + g|\Psi(\mathbf{R}, t)|^2 \right\} \Psi(\mathbf{R}, t). \tag{60}$$

В случае экситонных ловушек, связанных с неоднородностью энергетической структуры, координатные зависимости дна зоны проводимости $E_1(\mathbf{R})$ и потолка зоны валентности $E_2(\mathbf{R})$ являются, вообще говоря, независимыми функциями. Поэтому в принципе возможны крайние случаи, когда $E_g(\mathbf{R}) \neq \text{const}$, но $\mathbf{E}_{\text{in}} = 0$ и когда $\mathbf{E}_{\text{in}} \neq 0$, но $E_g(\mathbf{R}) = \text{const}$. Заметим, что ловушка для экситонов существует лишь в первом случае, тогда как во втором в системе возникнет токовое состояние при однородной экситонной плотности. В общей ситуации, когда и $E_g(\mathbf{R}) \neq \text{const}$, и $\mathbf{E}_{\text{in}} \neq 0$, имеем экситонную ловушку, в которой конденсат e–h пар находится в токовом состоянии.

Рассмотрим сначала аксиально симметричную гармоническую ловушку, в которой $\mathbf{E}_{\text{in}} = 0$, т.е. в основном состоянии конденсат покоится. Если межзонную щель записать в виде

$$E_g(R) = E_g(0) + \frac{M_H}{2} \omega_0^2 R^2,$$

то в достаточно больших ловушках ($R_0 >> \xi$) равновесная плотность конденсата дается равенством

$$n_{s0}(R) = \frac{M_H}{2g}\omega_0^2(R_0^2 - R^2),$$

где граница конденсата R_0 определяется полным числом пар в ловушке (49). При этом спектр собственных колебаний конденсата дается формулой (55). Отметим, что отсутствие циркуляции в основном состоянии приводит к вырождению собственных частот по знаку *m*, т.е. по направлению *z*-компоненты углового момента. Ниже рассмотрим, как это вырождение снимается квантованным вихрем, расположенным в центре ловушки. Понятно, что физической причиной снятия вырождения является индуцированная вихрем циркуляция конденсата со сверхтекучей скоростью

$$\mathbf{v}_{s0}(R) = \frac{\hbar}{M_H R}\mathbf{e}_\theta. \tag{61}$$

Для вычисления собственных частот воспользуемся уравнением непрерывности (36) и гидродинамическим уравнением для сверхтекучей скорости. Последнее в нашем случае имеет вид

$$M_H \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}[E_g(R) + \frac{M_H}{2}v_s^2 + gn_s]. \tag{62}$$

Как и в предыдущем разделе, плотность конденсата и сверхтекучую скорость запишем в виде суммы равновесной части и малой добавки: $n_s(\mathbf{R},t) = n_{s0}(R) + n_{s1}(\mathbf{R},t)$, $\mathbf{v}_s(\mathbf{R},t) = \mathbf{v}_{s0}(R) + \mathbf{v}_{s1}(\mathbf{R},t)$. Линеаризация уравнения непрерывности и гидродинамического уравнения дает систему уравнений для добавок n_{s1} и $\mathbf{v}_{s1}$. С линейной точностью по $\mathbf{v}_{s0}$ из этой системы следует уравнение колебаний плотности конденсата (52), где теперь $\mathbf{v}_{s0}$ задается формулой (61). Левая часть этого уравнения описывает собственные колебания конденсата (с частотой $\Omega_{nm}^{(0)}$) в отсутствие вихря, а правая часть дает поправки к $\Omega_{nm}^{(0)}$, связанные с индуцированной вихрем циркуляцией конденсата. Записав комплексную амплитуду колебаний плотности как $\overline{n}_{s1}(\mathbf{R}) = \widetilde{n}_{s1}(R)e^{im\theta}$, где m — целое число, получим для $\widetilde{n}_{s1}$ уравнение

$$\Omega^2\widetilde{n}_{s1} + \hat{L}\widetilde{n}_{s1} = \\ = -\frac{2\hbar m}{M_H\Omega\omega_0 R_0^2 x^2}\left[1-\Omega^2 + \frac{1-x^2}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{d}{dx}\right)\right]\widetilde{n}_{s1}, \tag{63}$$

в котором использованы обозначения, введенные в предыдущем разделе. Это уравнение совпадает с уравнением для колебаний плотности разреженного бозе-газа в цилиндрической ловушке с вихрем в ее центре [36]. Соответственно, сдвиг частоты собственных колебаний совпадает с результатом работы [36]. В размерных единицах

$$\omega_{nm} - \omega_{nm}^{(0)} = \frac{\hbar m}{M_H R_0^2}\begin{cases} 2n + |m| + 1, & |m| > 1; \\ \dfrac{2n(n+1)(n+2)}{1+2n(n+2)}, & |m| = 1. \end{cases} \tag{64}$$

Заметим, что в случае $|m| = 1$ и $n = 0$ (так называемая дипольная мода) присутствие вихря в ловушке не приводит к расщеплению частот собственных колебаний. Дело в том, что дипольная мода представляет собой колебания центра инерции конденсата [38], а на такие колебания взаимодействие *e–h* пар не влияет. Как следствие, они не возмущаются эффектами сверхтекучести.

5. Заключение

Представляется полезным сделать следующее разъяснение относительно использования термина «конденсат» в рассматриваемой нами двумерной системе. В разд. 2 получено динамическое уравнение (30), подобное уравнению Гросса–Питаевского. В разд. 3 и 4 это уравнение обобщено на случай приложенного к системе электрического поля и на случай пространственной вариации состава полупроводника. Поскольку в трехмерном случае уравнение Гросса–Питаевского записывается для волновой функции конденсата, а хорошо известно, что в двумерном случае при $T \neq 0$ бозе-конденсация отсутствует, возникает вопрос о точном смысле функции Ψ, входящей в уравнение (30) и в его обобщения. Чтобы прояснить смысл функции Ψ, заметим, что в двумерной бозе-системе имеются дальние корреляции, которые при температуре ниже температуры перехода Березинского–Костерлица–Таулесса приводят к степенному убыванию матрицы плотности $\rho(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ при $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \to \infty$ [31]. Вследствие этих дальних корреляций двумерная бозе-системе обладает сверхтекучестью, и именно сверхтекучую плотность *e–h* пар $n_s = \Psi\Psi^*$ определяет волновая функция Ψ. Использование термина «конденсат» в двумерном случае является традиционным и, как мы надеемся, не приведет к недоразумениям.

1. С.А. Москаленко, *ФТТ* **4**, 276 (1962).
2. J.M. Blatt, K.W. Boer, and W. Brandt, *Phys. Rev.* **126**, 1691 (1962).
3. Л.В. Келдыш, А.Н. Козлов, *ЖЭТФ* **54**, 978 (1968).
4. Л.В. Келдыш, Ю.В. Копаев, *ФТТ* **6**, 2791 (1964).
5. Р.Р. Гусейнов, Л.В. Келдыш, *ЖЭТФ* **63**, 2255 (1972).
6. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *ЖЭТФ* **71**, 738 (1976).
7. С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 505 (1976) [*Sov. J. Low Temp. Phys*. **2**, 251 (1976)].
8. И.О. Кулик, С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 1405 (1976) [*Sov. J. Low Temp. Phys*. **2**, 687 (1976)].
9. L.V. Butov, A. Zrenner, G.A. Abstreier, G. Bohm, and G. Weimann, *Phys. Rev. Lett*. **73**, 304 (1994).
10. L.V. Butov, C.W. Lai, A.L. Ivanov, A.C. Gossard, and D.S. Chemla, *Nature* **417**, 47 (2002).

11. L.V. Butov, A.C. Gossard, and D.S. Chemla, *Nature* **418**, 751 (2002).
12. J.P. Eisenstein, in: *Perspectives in Quantum Hall Effects,* S. Das Sarma and A. Pinczuk (eds.), Wiley, New York (1997).
13. I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett*. **84**, 5808 (2000).
14. I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 036803 (2001).
15. M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett*. **93**, 036801 (2004).
16. E. Tutuc, M. Shayegan, and D.A. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036802 (2004).
17. R.D. Wiersma, J.G.S. Lok, S. Kraus, W. Dietsche, K. von Klitzing, D. Schuh, M. Bichler, H.-P. Tranitz, and W. Wegscheider, *Phys. Rev. Lett*. **93**, 266805 (2004).
18. J.P. Eisenstein and A.H. MacDonald, *Nature* **432**, 691 (2004).
19. E. Tutuc, S. Melinte, E.P. De Poortere, R. Pillarisetty, and M. Shayegan, *Phys. Rev. Lett*. **91**, 076802 (2003).
20. A.R. Champagne, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett*. **100**, 096801 (2008).
21. I.B. Spielman, M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev.* **B70**, 081303(R) (2004).
22. Kun Yang, *Phys. Rev. Lett*. **87**, 056802 (2001).
23. F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys*. **79**, 463 (1999).
24. A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev*. **B75**, 075322 (2007).
25. Л.В. Келдыш, в сборнике *Проблемы теоретической физики*, Наука, Москва (1972), с. 433.
26. Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **53**, 717 (1967).
27. Ю.Е. Лозовик, А.М. Рувинский, *ЖЭТФ* **112**, 1791 (1997).
28. D. Yoshioka and H. Fukuyama, *J. Phys. Soc. Jpn*. **45**, 137 (1978).
29. D. Yoshioka and A.H. MacDonald, *J. Phys. Soc. Jpn*. **59**, 4211 (1990).
30. И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик, *ЖЭТФ* **80**, 1488 (1981).
31. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика. Теория конденсированного состояния*, Наука, Москва (1975).
32. H. Wei, R. Han, and X. Wei, *Phys. Rev. Lett*. **75**, 2071 (1997).
33. А.В. Горбунов, В.Б. Тимофеев, *Письма в ЖЭТФ* **80**, 210 (2004).
34. В.Б. Тимофеев, *УФН* **175**, 315 (2005).
35. M. Fleisser, A. Csordas, P. Szepfalusy, and R. Graham, *Phys. Rev.* **A56**, R2533 (1997).
36. A.A. Svidzinsky and A. Fetter, *Phys. Rev*. **A58**, 3168 (1998).
37. V. Negoita, D.W. Snoke, and K. Eberl, *Appl. Phys. Lett*. **75**, 2059 (1999).
38. C.J. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).

Oscillation of the condensate of electron–hole pairs in exciton traps

A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko

In two-layered systems there may occur an exciton superfluidity due to the pairing of spatially separated electrons and holes. In the limit of low density of electron–hole pairs the superfluid state can be described by the nonlinear equation of motion. The paper presents a microscopic derivation of this equation for wave function of electron–hole pair condensate at high magnetic field. This equation is extended to the case of electric field applied to the system and to the case of spatial variation in composition of the semiconductor forming the layers. Solving the dynamic equation provides collective excitation frequencies of the condensate in exciton traps created by electric charge or by variation of the semiconductor composition.

PACS: **73.21.–b** Electron states and collective excitations in multilayers, quantum wells, mesoscopic, and nanoscale systems;
71.35.Ji Excitons in magnetic fields; magnetoexcitons;
73.43.–f Quantum Hall effects.

Keywords: two-layered systems, electron–hole pairs, exciton traps.