

## СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ОДНОМЕРНОГО ГИРОТРОПНОГО МАГНИТОФОТОННОГО КРИСТАЛЛА (АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД)

**В. Н. Мизерник<sup>1,2</sup>, А. А. Шматько<sup>2</sup>, Е. Н. Одаренко<sup>2,3</sup>, А. Ю. Галенко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Научный физико-технологический центр МОН и НАН Украины,  
Харьков, Украина,

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
Харьков, Украина,

<sup>3</sup>Харьковский национальный университет радиотехники,  
Харьков, Украина

Поступила в редакцию 23.12.2016

В работе получено в аналитическом виде дисперсионное уравнение для магнитофотонного одномерного кристалла с гиротропными слоями. Проведен анализ численных результатов расчета дисперсионных характеристик кристалла для различных значений эффективной магнитной (электрической) проницаемостей гиротропного слоя. Показано существование объемных быстрых и медленных волн в такой структуре. Установлено наличие полос пропускания и запирания на дисперсионной диаграмме в области поверхностных плазменных волн.

**Ключевые слова:** магнитофотонные одномерные кристаллы, гиромангнитные среды, феррит с поперечным магнитным полем, дисперсионные характеристики, полосы пропускания и запирания.

## ВЛАСНІ ХВИЛІ ОДНОВИМІРНОГО ГИРОТРОПНОГО МАГНИТОФОТОННОГО КРИСТАЛА (АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД)

**В. М. Мізерник, О. О. Шматько, Є. М. Одаренко, А. Ю. Галенко**

У роботі отримано в аналітичному вигляді дисперсійне рівняння для магнитофотонного одновимірного кристалу з гиротропними шарами. Проведено аналіз чисельних результатів розрахунку дисперсійних характеристик кристалу для різних значень ефективної магнітної (електричної) проникності гиротропного шару. Показано існування об'ємних швидких і повільних хвиль у такій структурі. Встановлено наявність смуг пропускання й запирання на дисперсійній діаграмі в області поверхневих плазмових хвиль.

**Ключові слова:** магнітофотонні одновимірні кристали, гіромагнітні середовища, ферит з поперечним магнітним полем, дисперсійні характеристики, смуги пропускання і запирання.

## MODES OF THE ONE-DIMENSIONAL GYROTROPIC MAGNETOPHOTONIC CRYSTAL (ANALYTICAL APPROACH)

**V. N. Mizernik, A. A. Shmat'ko, E. N. Odarenko, A. Yu. Galenko**

Analytical dispersion equation for magnetophotonic one-dimensional crystal with a gyrotropic layers is obtained in this work. Analysis of the dispersion characteristics numerical calculation results for different values of the gyrotropic layer effective permittivity is carried out. We predict the propagation of bulk fast and slow waves in such structure. The transmission and forbidden bands at the dispersion diagram in the area of surface plasma waves are found.

**Keywords:** magnetophotonic one-dimensional crystals, gyrotropic media, ferrite with transversal magnetic field, dispersion characteristics, transmission and forbidden bands.

### ВВЕДЕНИЕ

Магнитофотонные кристаллы находят широкое применение в различных приложениях современной науки и технике терагерцового, микроволнового и оптического

диапазонов. Особенности распространения электромагнитных полей в таких фотонно-кристаллических структурах полностью определяются геометрическими размерами слоев и зависимостью их материальных

параметров от частоты и величины управляющего магнитного поля. Свойства изотропных диэлектрических фотонно-кристаллических структур достаточно хорошо изучены на основании полученных аналитических дисперсионных уравнений как для ТЕ ( $H_z$  — поляризация), так и для ТМ ( $E_z$  — поляризация) волн [1, 2]. К числу наиболее перспективных применений относятся магнитофотонные кристаллы при наличии гиротропии одного или двух слоев структуры. Наличие в такой структуре гиротропного слоя позволяет относительно легко за счет величины приложенного магнитного поля изменять значения материальных параметров среды и, в конечном счете, управлять электрическим способом дисперсионными свойствами магнитофотонного кристалла и характеристиками распространения волн. Для таких кристаллов отсутствуют аналитические дисперсионные уравнения, позволяющие эффективно исследовать основные их свойства. В зависимости от направления приложенного магнитного поля в таких гиромангнитных средах наблюдаются различные эффекты: эффект Фарадея, магнитное двулучепреломление, вращение плоскости поляризации, невзаимные явления для прямых и обратных волн, наличие поверхностных волн. При наличии гиротропии материальные параметры являются тензорными величинами и зависят от магнитного поля. Это как раз и приводит к определенным математическим и физическим трудностям при получении аналитического решения задачи о нахождении дисперсионного уравнения, что, в конечном счете, усложняет анализ свойств распространения электромагнитных волн в таких магнитофотонных кристаллах.

### ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В данной работе рассмотрим одномерный магнитофотонный кристалл с внешним поперечным магнитным полем  $\vec{H}_0 = \vec{z}_0 H_0$ . Оба слоя на периоде кристалла представляют собой гиротропную среду. Получим дисперсионное уравнение, определяющее основные свойства распространения ТЕ или ТМ волн в таких магнитофотонных одномерных кристаллах.

### Бесконечная периодическая структура. Дисперсионное уравнение.

Будем рассматривать распространение волн в стратифицированной двухслойной периодической структуре с гиротропными слоями (в одномерном магнитофотонном кристалле, рис. 1). Каждый из двух слоев на периоде структуры  $l = a + b$  является анизотропной средой (плазменной, ферритовой или их комбинацией), диэлектрическая и магнитная проницаемости которой характеризуется тензорными величинами стандартного вида с материальными параметрами  $\vec{\epsilon}_j$ ,  $\vec{\mu}_j$  ( $j = 1, 2$ ). Ширина одного слоя  $a$ , а другого —  $b$ .

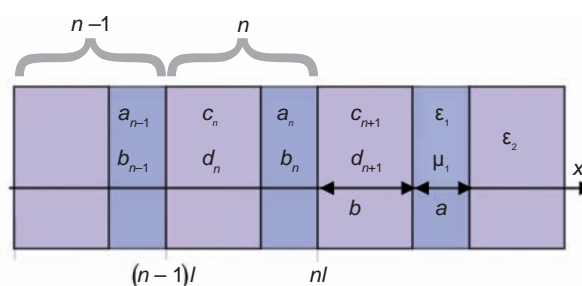


Рис. 1. Модель гиротропного магнитофотонного кристалла

Тензоры диэлектрической  $\vec{\epsilon}_j$  и магнитной проницаемостей  $\vec{\mu}_j$  имеют вид:

$$\vec{\epsilon}_j = \begin{pmatrix} \epsilon_j & -i\epsilon_{aj} & 0 \\ i\epsilon_{aj} & \epsilon_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu}_j = \begin{pmatrix} \mu_j & -i\mu_{aj} & 0 \\ i\mu_{aj} & \mu_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Для плазменной среды величина диэлектрической проницаемости  $\vec{\epsilon}_j$  — тензор, а величина магнитной проницаемости  $\vec{\mu}_j$  — скаляр. Такие среды называются электрически-гиротропными. В случае ферритовой среды, наоборот, магнитная проницаемость  $\vec{\mu}_j$  — тензор, а диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  — скаляр. Такие среды, как правило, называют магнитно-гиротропными. Если диэлектрическая и магнитная проницаемость среды одновременно описывается тензорами вида (1), то такую среду принято называть гиротропной. Материальные параметры, входящие в тензоры диэлектрической  $\vec{\epsilon}_j$  и магнитной проницаемостей  $\vec{\mu}_j$ , определяются величиной внешнего управляющего магнитного поля  $\vec{H}_0 = \vec{z}_0 H_0$  [3]. Рассмотрение

общего случая гиротропной среды с материальными параметрами вида (1) является целесообразным в первую очередь потому, что дает возможность использовать при получении основных выражений для полей и характеристических уравнений, определяющих дисперсию гиротропных периодических структур, принцип перестановочной двойственности [3, 4], когда выполняются соотношения  $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$ ,  $\vec{\epsilon} \leftrightarrow -\vec{\mu}$ . Это непосредственно следует из уравнений Максвелла.

Известно [3], что при наличии гиротропной среды в двухмерном случае  $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$  в среде типы волн разделяются — существует два независимых решения уравнений Максвелла, два типа волн —  $H_z$  (ТЕ) волны и  $E_z$  (ТМ) волны.

Электромагнитные поля для ТЕ волн ( $H_z$  — поляризация) и ТМ волн ( $E_z$  — поляризация) описываются решениями двух независимых уравнений Гельмгольца, непосредственно полученных из уравнений Максвелла, а именно:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k^2 \epsilon_{\perp j} \mu_j H_z = 0, \quad (2)$$

$$E_y = \left( \frac{1}{ik\epsilon_{\perp j}} \right) \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} + i \frac{\epsilon_{aj}}{\epsilon_j} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 \mu_{\perp j} \epsilon_j E_z = 0, \quad (4)$$

$$H_y = - \left( \frac{1}{ik\mu_{\perp j}} \right) \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} + i \frac{\mu_{aj}}{\mu_j} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$\mu_{\perp j} = \mu_j \left( 1 - \frac{\mu_{aj}^2}{\mu_j^2} \right), \quad \epsilon_{\perp j} = \epsilon_j \left( 1 - \frac{\epsilon_{aj}^2}{\epsilon_j^2} \right).$$

Соотношения (3) и (5), полученные из уравнений Максвелла с учетом тензорного вида (1) магнитной  $\vec{\mu}_j$  и электрической  $\vec{\epsilon}_j$  проницаемостей, используются для нахождения тангенциальных компонент

электромагнитных полей в каждом слое периодической гиротропной среды.

Как легко заметить, решения уравнений Гельмгольца (3) и (5) взаимозаменяемы, если поменять местами поля  $H_z$  и  $E_z$  с соответствующей заменой всех величин диэлектрических проницаемостей  $\epsilon$  на величины магнитных проницаемостей ( $-\mu$ ), и наоборот. Поэтому, учитывая принцип перестановочной двойственности полей, дальнейшее исследование можно производить для одного из двух указанных выше типов волн. Ограничимся рассмотрением  $E_z$  поляризации (ТМ волны). Для ТЕ волн используем принцип перестановочной двойственности.

Решение уравнения Гельмгольца для ТМ волн (4) в двух слоях периодической структуры запишем для двух тангенциальных компонент поля  $E_z$  и  $H_y$ , а именно:

$$\begin{aligned} E_z^1(x, y) &= \left( a_{n-1} e^{i\xi_1(x-(n-1)l)} + b_{n-1} e^{-i\xi_1(x-(n-1)l)} \right) e^{i\beta y}, \\ & \quad b < x - (n-1)l < l \\ H_y^1(x, y) &= \frac{1}{-k\mu_{\perp 1}} \times \\ & \quad \times \left( a_{n-1} \left( \xi_1 + i \frac{\mu_{a1}}{\mu_1} \beta \right) e^{i\xi_1(x-(n-1)l)} - b_{n-1} \left( \xi_1 - i \frac{\mu_{a1}}{\mu_1} \beta \right) e^{-i\xi_1(x-(n-1)l)} \right) \times \\ & \quad \times e^{i\beta y}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} E_z^2(x, y) &= \left( c_n e^{i\xi_2(x-nl)} + d_n e^{-i\xi_2(x-nl)} \right) e^{i\beta y}, \\ & \quad 0 < x - nl < b \\ H_y^2(x, y) &= \left( \frac{1}{-ik\mu_{\perp 2}} \right) \times \\ & \quad \times \left[ i \left( \xi_2 + \frac{\mu_{a2}}{\mu_2} i\beta \right) c_n e^{i\xi_2(x-nl)} - i \left( \xi_2 - \frac{\mu_{a2}}{\mu_2} i\beta \right) d_n e^{-i\xi_2(x-nl)} \right] e^{i\beta y}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $n=1, 2, \dots$  номер ячейки периодической структуры;  $\xi_1 = \sqrt{k^2 \mu_{\perp 1} \epsilon_1 - \beta^2}$  и  $\xi_2 = \sqrt{k^2 \epsilon_{\perp 2} \mu_2 - \beta^2}$  — поперечные волновые числа в слоях в направлении оси  $Ox$ ;  $\beta$  — продольное волновое число вдоль слоев управляемого статическим магнитным полем магнитофотонного гиротропного кристалла, которое подлежит определению;  $a_n, b_n, c_n, d_n$  — неизвестные амплитуды волн в слоях.

Для нахождения дисперсионного уравнения, связывающего продольное волновое число  $\beta$  с параметрами структуры, необходимо воспользоваться граничными условиями на границах раздела слоев, а также теоремой Блоха-Флоке для периодической структуры. На границах слоев тангенциальные компоненты электромагнитных полей непрерывны. Для определенности выберем границу раздела сред между двумя периодами структуры  $x = (n-1)l$ . Воспользуемся граничными условиями и в результате получим систему уравнений:

$$(a_0 + b_0) = (c_1 e^{-i\xi_2 l} + d_1 e^{i\xi_2 l}), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( 1 + i \frac{\beta \mu_{a1}}{\xi_1 \mu_1} \right) a_1 - \left( 1 - i \frac{\beta \mu_{a1}}{\xi_1 \mu_1} \right) b_0 \right] = \\ & = \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} \times \\ & \times \left[ \left( 1 + i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) c_1 e^{-i\xi_2 l} - \left( 1 - i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) d_1 e^{i\xi_2 l} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

В матричном виде эти уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left( 1 + i \frac{\beta \mu_{a1}}{\xi_1 \mu_1} \right) & - \left( 1 - i \frac{\beta \mu_{a1}}{\xi_1 \mu_1} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} e^{-i\xi_2 l} & e^{i\xi_2 l} \\ \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} \left( 1 + i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{-i\xi_2 l} & - \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} \left( 1 - i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{i\xi_2 l} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для нахождения связи коэффициентов первого слоя  $a_0, b_0$  с неизвестными коэффициентами второго слоя на периоде  $c_1, d_1$  воспользуемся свойством обратной матрицы. Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  обратная матрица  $A^{-1}$  по определению имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Тогда находим обратную матрицу для матрицы, стоящей в левой части уравнения (10):

$$\begin{aligned} & \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left( 1 + i \frac{\beta \mu_{a1}}{\xi_1 \mu_1} \right) & - \left( 1 - i \frac{\beta \mu_{a1}}{\xi_1 \mu_1} \right) \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ & = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left( 1 - i \frac{\beta \mu_{a1}}{\xi_1 \mu_1} \right) & 1 \\ \left( 1 + i \frac{\beta \mu_{a1}}{\xi_1 \mu_1} \right) & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Перепишем матричное уравнение (10) в виде:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где матрица  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  получена в результате перемножения матрицы (12) и матрицы в правой части уравнения (10). Элементы матрицы уравнения (13) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} & = \frac{1}{2} \times \\ & \times \left[ \left( 1 - i \frac{\mu_{a1} \beta}{\mu_1 \xi_1} \right) e^{-i\xi_2 l} + \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} \left( 1 + i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{-i\xi_2 l} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a_{12} & = \frac{1}{2} \times \\ & \times \left[ \left( 1 - i \frac{\mu_{a1} \beta}{\mu_1 \xi_1} \right) e^{i\xi_2 l} - \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} \left( 1 - i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{i\xi_2 l} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{21} & = \frac{1}{2} \times \\ & \times \left[ \left( 1 + i \frac{\mu_{a1} \beta}{\mu_1 \xi_1} \right) e^{-i\xi_2 l} - \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} \left( 1 + i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{-i\xi_2 l} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} \times \left[ \left( 1 + i \frac{\mu_{a1} \beta}{\mu_1 \xi_1} \right) e^{i\xi_2 l} + \frac{\xi_2}{\xi_1} \frac{\mu_{\perp 1}}{\mu_{\perp 2}} \left( 1 - i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{i\xi_2 l} \right] \times \left[ \left( 1 - i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{\mu_{\perp 2}}{\mu_{\perp 1}} \left( 1 + i \frac{\mu_{a1} \beta}{\mu_1 \xi_1} \right) \right] e^{i\xi_2 a} e^{-i\xi_1 a}, \quad (17)$$

Для определения связи коэффициентов первого слоя  $c_1, d_1$  на периоде  $n = 1$  с неизвестными коэффициентами второго слоя  $a_1, b_1$  этого же периода воспользуемся граничными условиями для тангенциальных компонент полей  $E_z$  и  $H_y$  (6), (7) в плоскости  $x = nl$ , тогда получим следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\xi_2 a} & e^{i\xi_2 a} \\ \left( 1 + i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{-i\xi_2 a} & - \left( 1 - i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{i\xi_2 a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\xi_1 a} & e^{i\xi_1 a} \\ \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{\mu_{\perp 2}}{\mu_{\perp 1}} \left( 1 + i \frac{\mu_{a1} \beta}{\mu_1 \xi_1} \right) e^{-i\xi_1 a} & - \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{\mu_{\perp 2}}{\mu_{\perp 1}} \left( 1 - i \frac{\mu_{a1} \beta}{\mu_1 \xi_1} \right) e^{i\xi_1 a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Определим обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\xi_2 a} & e^{i\xi_2 a} \\ \left( 1 + i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{-i\xi_2 a} & - \left( 1 - i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{i\xi_2 a} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left( 1 - i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{i\xi_2 a} & e^{i\xi_2 a} \\ \left( 1 + i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) e^{-i\xi_2 a} & - e^{-i\xi_2 a} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

В результате уравнение (18) представляется в виде:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где:

$$b_{12} = \frac{1}{2} \times \left[ \left( 1 - i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) - \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{\mu_{\perp 2}}{\mu_{\perp 1}} \left( 1 - i \frac{\mu_{a1} \beta}{\mu_1 \xi_1} \right) \right] e^{i\xi_2 a} e^{i\xi_1 a}, \quad (22)$$

$$b_{21} = \frac{1}{2} \times \left[ \left( 1 + i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) - \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{\mu_{\perp 2}}{\mu_{\perp 1}} \left( 1 + i \frac{\mu_{a1} \beta}{\mu_1 \xi_1} \right) \right] e^{-i\xi_2 a} e^{-i\xi_1 a}, \quad (23)$$

$$b_{22} = \frac{1}{2} \times \left[ \left( 1 + i \frac{\mu_{a2} \beta}{\mu_2 \xi_2} \right) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{\mu_{\perp 2}}{\mu_{\perp 1}} \left( 1 - i \frac{\mu_{a1} \beta}{\mu_1 \xi_1} \right) \right] e^{-i\xi_2 a} e^{i\xi_1 a}. \quad (24)$$

Исключая в матричных уравнениях (13) и (20) коэффициенты  $\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$ , получим,

в общем случае, связь коэффициентов в одинаковых слоях для двух соседних периодов структуры:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Элементы матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

вычисляются по правилу перемножения двух матриц. Используя выражения для элементов матриц (14)–(17) и (21)–(24), находим элементы исходной матрицы  $A, B, C, D$ , а именно:

$$A = \left\{ \cos \xi_2 b - i \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi_1 \mu_{\perp 2}}{\xi_2 \mu_{\perp 1}} + \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} + \frac{\beta^2 \mu_{\perp 2}}{\xi_1 \xi_2 \mu_{\perp 1}} \left( \frac{\mu_{a1}}{\mu_1} - \frac{\mu_{\perp 1} \mu_{a2}}{\mu_2} \right)^2 \right] \sin \xi_2 b \right\} e^{-i \xi_1 a}, \quad (26)$$

$$D = \left\{ \cos \xi_2 b + i \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi_1 \mu_{\perp 2}}{\xi_2 \mu_{\perp 1}} + \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} + \frac{\beta^2 \mu_{\perp 2}}{\xi_1 \xi_2 \mu_{\perp 1}} \left( \frac{\mu_{a1}}{\mu_1} - \frac{\mu_{\perp 1} \mu_{a2}}{\mu_2} \right)^2 \right] \sin \xi_2 b \right\} e^{i \xi_1 a}, \quad (27)$$

$$B = i \frac{1}{2} \sin \xi_2 b \left\{ - \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} + \frac{\xi_1 \mu_{\perp 2}}{\xi_2 \mu_{\perp 1}} \left[ 1 - i \frac{\beta}{\xi_1} \left( \frac{\mu_{a1}}{\mu_1} - \frac{\mu_{a2} \mu_{\perp 1}}{\mu_2} \right) \right]^2 \right\} e^{i \xi_1 a}, \quad (28)$$

$$C = -i \frac{1}{2} \sin \xi_2 b \left\{ - \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} + \frac{\xi_1 \mu_{\perp 2}}{\xi_2 \mu_{\perp 1}} \left[ 1 + i \frac{\beta}{\xi_1} \left( \frac{\mu_{a1}}{\mu_1} - \frac{\mu_{a2} \mu_{\perp 1}}{\mu_2} \right) \right]^2 \right\} e^{-i \xi_1 a}. \quad (29)$$

Важным свойством матрицы  $ABCD$  является свойство унимодулярности:  $AD - BC = 1$ . Используя выражения для элементов матрицы  $ABCD$  (26)–(29) можно показать, что это условие выполняется. Отметим, что когда величина  $\xi_1^2 = k^2 \varepsilon_1 \mu_{\perp 1} - \beta^2 > 0$ , то  $\xi_1$  — вещественное число и, как следует из (26)–(29), выполняются соотношения:  $A = D^*$  и  $B = C^*$ .

Полученное матричное уравнение (25), определяющее связь неизвестных коэффициентов в двух одинаковых слоях различных периодов структуры, и теорема Блоха-Флоке позволяют найти характеристическое (дисперсионное) уравнение для определения неизвестного волнового числа  $K$ . Согласно теореме Блоха-Флоке [4]:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = e^{iKl} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где  $K$  — блоховское волновое число.

Используя уравнение (25) и (30), находим:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = e^{-iKl} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Фазовый множитель  $e^{-iKl}$  является собственным значением матрицы трансляции  $ABCD$  и удовлетворяет характеристическому уравнению:

$$\begin{pmatrix} A - e^{-iKl} & B \\ C & D - e^{-iKl} \end{pmatrix} = 0,$$

решение которого при использовании свойства унимодулярности матрицы  $ABCD$  ( $AD - BC = 1$ ), принимает вид:

$$e^{-iKl} = \frac{1}{2}(A + D) \pm i \sqrt{1 - \left[ \frac{1}{2}(A + D) \right]^2}. \quad (32)$$

Тогда значения корней характеристического уравнения определяются из выражения:

$$K(\beta) = \frac{1}{l} \arccos \left[ \frac{1}{2}(A + D) \right]. \quad (33)$$

Вещественным значениям  $K(\beta)$  соответствуют волны Блоха-Флоке, распространяющиеся в структуре в пределах частотных зон пропускания. Комплексным значениям  $K(\beta) = K'(\beta) - iK''(\beta)$  соответствуют затухающие волны, которые находятся в запрещенных частотных зонах. Границы полос запираения определяются равенством

$$\frac{1}{2}(A + D) = 1.$$

Получим дисперсионное уравнение для исследуемой периодической структуры. Для этого вычислим величину  $(A + D) / 2$ :

$$\frac{(A+D)}{2} = \cos \xi_2 b \cos \xi_1 a - \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi_1 \mu_{\perp 2}}{\xi_2 \mu_{\perp 1}} + \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} + \frac{\beta^2 \mu_{\perp 2}}{\xi_1 \xi_2 \mu_{\perp 1}} \left( \frac{\mu_{a1}}{\mu_1} - \frac{\mu_{\perp 1} \mu_{a2}}{\mu_{\perp 2} \mu_2} \right)^2 \right] \sin \xi_2 b \sin \xi_1 a.$$

Тогда уравнение (33) принимает вид:

$$K(\beta) = \frac{1}{l} \arccos \left\{ \cos \xi_2 b \cos \xi_1 a - \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi_1 \mu_{\perp 2}}{\xi_2 \mu_{\perp 1}} + \frac{\xi_2 \mu_{\perp 1}}{\xi_1 \mu_{\perp 2}} + \frac{\beta^2 \mu_{\perp 2}}{\xi_1 \xi_2 \mu_{\perp 1}} \left( \frac{\mu_{a1}}{\mu_1} - \frac{\mu_{\perp 1} \mu_{a2}}{\mu_{\perp 2} \mu_2} \right)^2 \right] \sin \xi_2 b \sin \xi_1 a \right\}. \quad (34)$$

Легко показать, что выражение (34) переходит в известное дисперсионное уравнение [2] для случая двух магнитоэлектрических слоев, когда  $\mu_{a1} = \mu_{a2} = 0$  (если  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ).

$$K(\beta) = \frac{1}{l} \times \arccos \left\{ \cos \xi_2 b \cos \xi_1 a - \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi_1 \mu_2}{\xi_2 \mu_1} + \frac{\xi_2 \mu_1}{\xi_1 \mu_2} \right] \sin \xi_2 b \sin \xi_1 a \right\}. \quad (35)$$

Заметим, что в уравнение (34) продольное волновое число  $\beta$  (вдоль оси  $Oy$ ) входит в квадрате. Это говорит о том, что его значение по абсолютной величине одинаково для противоположных направлений распространения волн. То есть дисперсия одинакова для прямых и обратных волн, распространяющихся вдоль оси  $Oy$ , вдоль слоев. Однако распределение поля в случае гиротропных сред в направлении периодичности для прямых и обратных волн, как следует из их выражений, разные.

Воспользуемся далее принципом перестановочной двойственности [3]. Тогда уравнение (34) можно переписать для плазменной гиротропной периодической структуры, а именно:

$$K(\beta) = \frac{1}{l} \arccos \left\{ \cos \xi_2 b \cos \xi_1 a - \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi_1 \varepsilon_{\perp 2}}{\xi_2 \varepsilon_{\perp 1}} + \frac{\xi_2 \varepsilon_{\perp 1}}{\xi_1 \varepsilon_{\perp 2}} + \frac{\beta^2 \varepsilon_{\perp 2}}{\xi_1 \xi_2 \varepsilon_{\perp 1}} \left( \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_{\perp 1} \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{\perp 2} \varepsilon_2} \right)^2 \right] \sin \xi_2 b \sin \xi_1 a \right\}, \quad (34a)$$

где  $\xi_j = \sqrt{k \varepsilon_{\perp j} \mu_j - \beta^2}$ . В случае  $\varepsilon_{a2} = 0$  уравнение (34a) переходит в дисперсионное уравнение работы [4].

Перейдем к анализу решений дисперсионного уравнения (34).

#### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2 и рис. 3 приведены решения уравнения (34a) в виде дисперсионных диаграмм для случая  $\varepsilon_{a2} = 0$ , когда один слой магнитофотонного кристалла представляет собой гиромангнитную плазму, а другой слой — магнитоэлектрик. Диаграммы являются проекциями функции  $K(k, \beta)$  на плоскость  $(k, \beta)$  в трехмерном пространстве волновых чисел. Затемненные области соответствуют полосам пропускания, а светлые — полосам запираения. Дисперсионные диаграммы построены для следующих параметров задачи:  $a = b = 0,5$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 2$ ,  $\varepsilon_1 = 6$ , штрихпунктирная линия определяется прямой  $\beta = k \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ , пунктирная линия —

прямой  $\beta = k \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ . Диагональная штриховая линия  $k = \beta$  на рисунках соответствует условию равенства фазовой скорости волны и скорости света. Выше прямой — область существования быстрых объемных волн, а ниже прямой — область существования

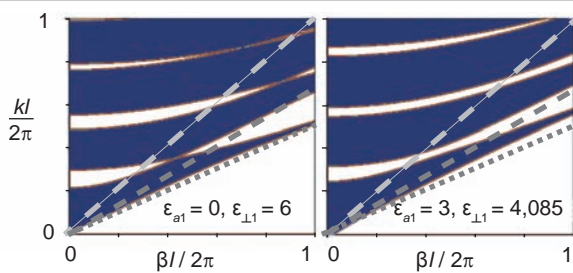


Рис. 2. Дисперсионные диаграммы для  $\epsilon_{\perp 1} > 0$

замедленных волн. Для выявления особенностей распространения волн в таких структурах следует разделять два случая для различных значений магнитного поля  $H_0$ , соответствующих условиям  $\epsilon_{\perp 1} > 0$  и  $\epsilon_{\perp 1} < 0$  (параметр  $\epsilon_{a1}$ ). Анализ показывает, что количество полос пропускания и запираения зависит от диэлектрических проницаемостей каждого из слоев. Существует два режима распространения волн, которые соответствуют быстрым и медленным волнам относительно скорости света. Решения, соответствующие быстрым волнам, находятся в областях  $k^2 \epsilon_2 \mu_2 > \beta^2$  и  $k^2 \epsilon_1 \mu_1 > \beta^2$  для соответствующего слоя. Для определения областей решений, соответствующих медленным волнам, знаки в этих условиях следует поменять на противоположные. Возможны также различные комбинации этих режимов. Наличие гиротропии в одном из слоев ( $\epsilon_{a1} \neq 0$ ) позволяет управлять шириной полос, их местоположением и количеством в заданном диапазоне частот. Если  $\epsilon_{\perp 1} < 0$ , то существует замедленная поверхностная плазменная волна, распространяющаяся вдоль границы раздела двух соседних слоев структуры. Отметим также еще одну особенность. Из решения дисперсионного уравнения (21) и пространственного распределения полей (4), (5) следует, что прямая ( $\beta = +\text{Re}|\beta|$ ) и обратная ( $\beta = -\text{Re}|\beta|$ ) волны, распространяющихся вдоль слоев (вдоль оси

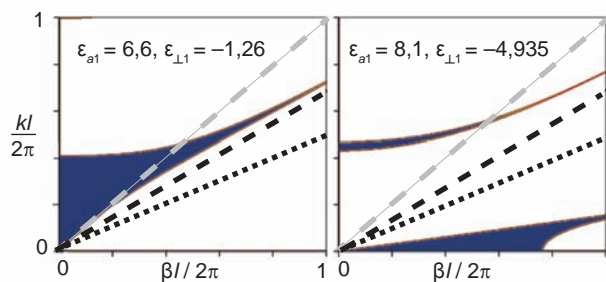


Рис. 3. Дисперсионные диаграммы для  $\epsilon_{\perp 1} < 0$

$Oy$ ), имеют одинаковую скорость распространения, но разную поперечную структуру полей (вдоль оси  $Ox$ ).

Дисперсионная диаграмма на рис. 2 соответствует положительным значениям эффективной диэлектрической проницаемости плазменного слоя фотонного кристалла ( $\epsilon_{\perp 1} > 0$ ), а на рис. 3 — отрицательным значениям ( $\epsilon_{\perp 1} < 0$ ). На рис. 2 представлены два варианта диаграммы для значений  $\epsilon_{a1} = 0$  и  $\epsilon_{a1} = 3$ . Первый случай соответствует отсутствию гиротропии в структуре с диэлектрическими проницаемостями двух слоев  $\epsilon_2 = 2$  и  $\epsilon_1 = 6$ . Прямые  $k\sqrt{2} = \beta$  и  $k\sqrt{6} = \beta$  определяют скорость света в диэлектрических слоях. Возможны случаи возбуждения в диэлектрических слоях периодической структуры как объемных, так и поверхностных волн. Этот случай подробно изучен в работах [1, 2].

При наличии плазменного слоя ( $\epsilon_{a1} = 3$ ) его эффективная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{\perp 1}$  начинает уменьшаться, что приводит к сужению зон пропускания при одновременном расширении запрещенных зон.

Иная ситуация наблюдается при отрицательных значениях эффективной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\perp 1} < 0$  (рис. 3). Здесь также приведены два варианта дисперсионной диаграммы, соответствующие различным отрицательным значениям эффективной диэлектрической проницаемости гиротропного слоя магнитофотонного кристалла  $\epsilon_{\perp 1}$ . В первом случае ( $\epsilon_{a1} = 6,6$ ) имеется одна полоса пропускания. В различных областях полосы пропускания, разделенных прямой  $k = \beta$ , могут существовать быстрые и медленные объемные волны. В области медленных волн их фазовая скорость  $v$  больше значений фазовой скорости в диэлектрическом слое  $v = \beta / (k\sqrt{2})$ , соответствующих штрихпунктирной прямой. При увеличении магнитного поля  $H_0$  (увеличение величины  $\epsilon_{a1}$ ) появляется две полосы пропускания. Одна из них соответствует объемным волнам (быстрым или медленным), а вторая — поверхностным медленным волнам (вся полоса пропускания находится при значениях  $v < \beta / (k\sqrt{6})$ ). Распределение поля для такой волны имеет максимальную амплитуду на границе раздела областей. В области плазменного



слоя существует поверхностная волна, которая распространяется вдоль слоя на его границе с диэлектрическим слоем на каждом периоде структуры. Более того, анализ пространственного распределения поля (по координате  $Ox$ ) (4) для прямой  $\beta = +|\beta|$  и обратной  $\beta = -|\beta|$  поверхностных волн показывает, что их структура разная. Из рис. 3 следует, что с увеличением параметра  $\varepsilon_{a1}$  появляется плазменная поверхностная волна в слое ( $\varepsilon_{\perp 1} < 0$ ). С увеличением параметра  $\varepsilon_{a1}$  сужается область существования поверхностной плазменной волны при одновременном сужении области распространения объемной волны (случай  $k\sqrt{2} > \beta$ ).

На рис. 4 представлены дисперсионные характеристики магнитофотонного кристалла, когда оба слоя на периоде являются анизотропной полупроводниковой плазмой с различными значениями величины  $\varepsilon_a$  и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_j$ . Как видно, в этом случае с различной шириной каждого из слоев можно существенно изменять ширину запрещенной зоны и управлять ее местоположением на дисперсионной диаграмме.

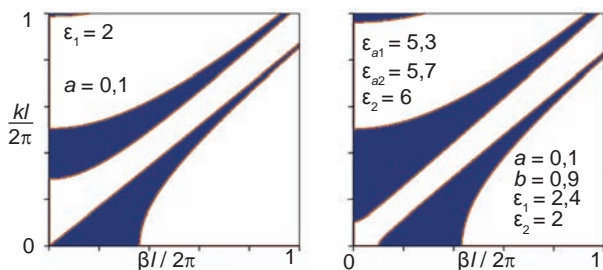


Рис. 4. Дисперсионные характеристики магнитофотонного кристалла с двумя плазменными слоями

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решена задача на собственные волны гиротропного одномерного магнитофотонного кристалла с двумя анизотропными гиромангнитными слоями. Получены в аналитическом виде элементы матрицы передачи, найдено дисперсионное уравнение и его корни. Проведен анализ дисперсионных свойств таких структур в зависимости от материальных параметров слоев. Установлено существование полос пропускания и запираения для распространяющихся волн в зависимости от материальных параметров слоев структуры с учетом гиротропии. Обнаружено для отрицательной

магнитной проницаемости (ферритовый слой) или диэлектрической проницаемости (плазменный слой) существование полос пропускания для поверхностной волны и выяснена зависимость ее ширины от параметра гиротропии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yariv A., Yen P. Photonics. Optical Electronics in Modern Communications. — New York: Oxford University press, 2007. — 836 p.
2. Yen P., Yariv A., and Chi-Shain Hong. Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory // J. Opt. Soc. Am. — 1977. — Vol. 67, No. 4. — P. 423–438.
3. Gurevich A. G. Ferrites at Microwave Frequencies. Consultants Bureau. — New York, 1963.
4. Шматько А. А., Мизерник В. Н., Одаренко Е. Н., Галенко А. Ю. Дисперсионное уравнение одномерного магнитофотонного кристалла с ферритовым слоем // Вестник ХНУ имени В.Н. Каразина, сер. «Радиофизика и электроника». — 2016. — Вып. 25. — С. 12–16.

## REFERENCES

1. Yariv A., Yen P. Photonics. Optical Electronics in Modern Communications. — New York: Oxford University press, 2007. — 836 p.
2. Yen P., Yariv A., and Chi-Shain Hong. Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory // J. Opt. Soc. Am. — 1977. — Vol. 67, No. 4. — P. 423–438.
3. Gurevich A. G. Ferrites at Microwave Frequencies. Consultants Bureau. — New York, 1963.
4. Shmat'ko A. A., Mizernik V. N., Odarenko E. N., Galenko A. Yu. Dispersionnoe uravnenie odnomernogo magnitofotonnogo kristalla s ferritovym sloem // Vestnik HNU imeni V. N. Karazina, ser. «Radiofizika i elektronika». — 2016. — Vyp. 25. — P. 12–16.