

## Фазовый переход по магнитному полю в бозе-газе

Ю.М. Полуэктов

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»*

*ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина*

E-mail: yuripoluektov@kipt.kharkov.ua

А.Г. Волоснев

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина*

Статья поступила в редакцию 9 ноября 2009 г.

Изучены зависимости от внешнего магнитного поля термодинамических характеристик бозе-газа частиц с неравными нулю спином и магнитным моментом в состояниях с конденсатом Бозе–Эйнштейна и в его отсутствие. Показано, что существует интервал температур, при которых в бозе-газе с постоянной температурой и плотностью числа частиц с увеличением магнитного поля и достижении им критической величины происходит переход в состояние с конденсатом Бозе–Эйнштейна. Производные по температуре и магнитному полю от теплоемкости при постоянном объеме и магнитной восприимчивости испытывают скачок при таком переходе.

Вивчено залежності від зовнішнього магнітного поля термодинамічних характеристик бозе-газу частинок зі спіном та магнітним моментом, які не дорівнюють нулю, у станах з конденсатом Бозе–Ейнштейна та в його відсутності. Показано, що існує інтервал температур, при яких у бозе-газі з постійною температурою та щільністю числа частинок зі збільшенням магнітного поля і досягненні їм критичної величини відбувається перехід у стан з конденсатом Бозе–Ейнштейна. Похідні по температурі та магнітному полі від теплоємності при постійному об'ємі та магнітній сприйнятливості мають стрибок при такому переході.

PACS: 67.85.Jk Другие явления бозе-эйнштейновской конденсации;

03.75.Mn Многокомпонентная и спиновая конденсации.

Ключевые слова: бозе-эйнштейновская конденсация, магнитное поле, фазовый переход, намагнитченность, магнитная восприимчивость, теплоемкость.

### 1. Введение

Явление накопления макроскопического числа частиц в основном состоянии при низких температурах предсказано Эйнштейном, на основе подхода, развитого Бозе [1], в работах по изучению свойств идеального квантового газа [2]. Эффект бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) был использован Ф. Лондоном [3] и Тиссой [4] для объяснения, открытой Капицей [5] и Алленом [6], сверхтекучести жидкого гелия. Позднее Ландау [7] построил теорию сверхтекучести, не опираясь на представление о бозе-эйнштейновской конденсации. Тем не менее вопрос о связи явления сверхтекучести с БЭК продолжает оставаться актуальным и в настоящее время. Наличие бозе-эйнштейновского конденсата в сверхтекучей фазе гелия подтверждено в экспериментах по неупругому рассеянию нейтронов [8].

Принципиальный интерес представляет вопрос о конденсации газа бозонов с отличным от нуля спином и магнитным моментом во внешнем магнитном поле. Впервые этот вопрос исследован в работе [9]. В связи с экспериментальным открытием БЭК в атомарных газах [10–14], которая реализуется в магнитном поле, теоретическое изучение конденсации в магнитном поле вновь привлекло внимание [15–19]. Особенностью бозе-эйнштейновского перехода во внешнем магнитном поле является то, что в конденсат выпадают только те частицы, магнитный момент которых направлен вдоль магнитного поля. Частицы с другими значениями проекции магнитного момента имеют большую энергию и остаются в надконденсатном состоянии при всех температурах. Еще одна важная особенность состоит в том, что температура перехода в фазу с конденсатом оказывается зависящей от магнитного поля и возрастает с его увеличением до некоторого максимального значения.

Зависимости термодинамических величин бозе-газа в магнитном поле от температуры достаточно подробно изучены в [9,15–19]. В настоящей работе исследуются зависимости термодинамических характеристик бозе-газа частиц с отличным от нуля магнитным моментом от величины магнитного поля. Показано, что существует интервал температур, в котором при фиксированной температуре и плотности числа частиц становится возможным фазовый переход в состояние с БЭК при увеличении магнитного поля. В точке фазового перехода, который наступает при достижении магнитным полем критического значения, теплоемкость, намагниченность и магнитная восприимчивость оказываются непрерывными, а производные от теплоемкости и магнитной восприимчивости по температуре и магнитному полю испытывают скачок.

## 2. Бозе-эйнштейновская конденсация в магнитном поле

Поскольку частица с магнитным моментом  $\kappa = ks/s$  ( $\mathbf{s}$  — вектор спина,  $k$  — величина магнитного момента, предполагаемая положительной) в магнитном поле  $\mathbf{B}$  приобретает энергию  $-\kappa\mathbf{B}$ , то в идеальном газе бозе-частиц  $N$  со спином  $s$ , занимающих объем  $V$  и находящихся во внешнем магнитном поле  $B$ , равновесная функция распределения зависит от проекции спина частиц  $\sigma$  на направление магнитного поля и имеет вид

$$f_{p\sigma} = [\exp \beta(\varepsilon_p - \mu_\sigma) - 1]^{-1}, \quad (1)$$

где  $\beta = 1/T$  — обратная температура,  $\varepsilon_p = p^2/2m$  — кинетическая энергия,  $\mathbf{p}$  — импульс,  $m$  — масса частицы,  $\mu_\sigma = \mu + \sigma\kappa B/s$  — эффективный химический потенциал частицы во внешнем магнитном поле,  $\mu$  — истинный химический потенциал. Спиновый индекс  $\sigma$  принимает целочисленные значения от  $-s$  до  $s$ . Все термодинамические характеристики бозе-газа могут быть выражены через специальные функции:

$$\Phi_\nu(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{z^{\nu-1} dz}{\exp(z+t) - 1}, \quad (2)$$

где  $\Gamma(\nu)$  — гамма-функция. Функции (2) определены для неотрицательных значений  $t$  и представимы в виде ряда

$$\Phi_\nu(t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-nt}}{n^\nu}. \quad (3)$$

Для описания термодинамических свойств бозе-газа, как правило, достаточно функций  $\Phi_\nu(t)$  при  $\nu = 1/2, 3/2, 5/2$ . Отметим, что при  $\nu > 1$  выполняется полезное соотношение  $\Phi'_\nu(t) = -\Phi_{\nu-1}(t)$ . Кроме того,  $\Phi_{3/2}(0) = \zeta(3/2) = 2,612$ ,  $\Phi_{5/2}(0) = \zeta(5/2) = 1,341$ , а

при  $t \rightarrow 0$   $\Phi_{1/2}(t) \approx \sqrt{\pi/t}$ , где  $\zeta(\nu)$  — дзета-функция Римана. Функции  $\Phi_\nu(t)$  монотонно убывают с возрастанием  $t$ , а при  $t \rightarrow \infty$  для них справедлива асимптотика  $\Phi_\nu(t) \approx e^{-t}$ .

В дальнейшем будут использованы следующие обозначения для сумм:

$$\begin{aligned} \delta_\nu &\equiv \sum_{\sigma=-s}^s \Phi_\nu(t_\sigma), \\ \delta'_\nu &\equiv \sum_{\sigma=-s}^s \sigma \Phi_\nu(t_\sigma), \\ \delta''_\nu &\equiv \sum_{\sigma=-s}^s \sigma^2 \Phi_\nu(t_\sigma), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $t_\sigma = -\beta\mu_\sigma = t - \sigma b$ ,  $t = -\beta\mu$ ,  $b = \beta\kappa B/s$ . Функции (4) зависят от двух переменных  $t$  и  $b$ :  $\delta_\nu = \delta_\nu(t, b)$  и т.д.

Из вида функции распределения (1) следует, что число частиц с проекцией спина  $\sigma$  определяется формулой

$$N_\sigma = \frac{V}{\Lambda^3} \Phi_{3/2}(t_\sigma), \quad (5)$$

а полное число частиц

$$N = \sum_{\sigma=-s}^s N_\sigma = \frac{V}{\Lambda^3} \delta_{3/2}. \quad (6)$$

В формулы (5) и (6) входит тепловая длина волны частицы

$$\Lambda = (2\pi\hbar^2/mT)^{1/2}. \quad (7)$$

В отсутствие магнитного поля при высоких температурах химический потенциал, как известно [20], отрицателен и приближается к нулю при понижении температуры. Условием БЭК является обращение в нуль химического потенциала. При наличии магнитного поля условием БЭК, как это следует из вида функции распределения (1), будет требование обращения в нуль эффективного химического потенциала  $\mu_\sigma = \mu + \sigma\kappa B/s$ , который различен для частиц с разным  $\sigma$ . Конденсация в магнитном поле начнется с того момента, когда при понижении температуры  $\mu_\sigma$  при каком-то  $\sigma$  обратится в нуль. Очевидно, что вначале это произойдет для частиц, магнитный момент которых направлен вдоль поля. Таким образом, условие конденсации в магнитном поле имеет вид

$$\mu_s = 0 \text{ или } \mu = -\kappa B. \quad (8)$$

Условие (8) остается справедливым для всех температур ниже температуры БЭК в магнитном поле  $T_B$ , поэтому при  $T < T_B$  эффективный химический потенциал

$$\mu_{\sigma} = -(s - \sigma) \kappa B / s, \quad (9)$$

так что параметр

$$t_{\sigma} = (s - \sigma) b. \quad (10)$$

Согласно (9), эффективные химические потенциалы частиц с проекциями спина  $\sigma \neq s$  не обращаются в нуль, а следовательно, эти частицы при любых температурах находятся в надконденсатном состоянии. При  $T = 0$  остаются только находящиеся в конденсате бозоны с магнитным моментом, направленным по полю.

Из формулы (6), с учетом условия (8), следует соотношение, определяющее температуру БЭК в магнитном поле  $T_B$ :

$$T_0 = T_B \left[ \sum_{\sigma=0}^{2s} \Phi_{3/2}(\sigma \kappa B / s T_B) / g \zeta(3/2) \right]^{2/3}, \quad (11)$$

где

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m} (n/g\zeta(3/2))^{2/3} \quad (12)$$

— температура БЭК в отсутствие магнитного поля,  $n = N/V$  — плотность числа частиц,  $g = 2s + 1$ . Температура  $T_B$  монотонно возрастает с ростом магнитного поля. Это связано с тем, что в магнитном поле БЭК начинается уже тогда, когда истинный химический потенциал еще остается отрицательным, а не равняется нулю, как в случае отсутствия магнитного поля.

В бозе-газе частиц с ненулевым спином естественно ввести критическую величину магнитного поля  $B_0$ , определяемую температурой БЭК

$$B_0 = T_0 / \kappa. \quad (13)$$

Температурные зависимости термодинамических характеристик бозе-системы и характер конденсации будут различаться в зависимости от величины магнитного поля в сравнении с характерным полем (13). В сильном поле  $B \gg B_0$  температура конденсации стремится к предельному значению

$$T_1 = (2s + 1)^{2/3} T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m} (n/\zeta(3/2))^{2/3}. \quad (14)$$

Отметим, что температура конденсации в отсутствие поля (12) уменьшается с увеличением спина частицы, тогда как температура БЭК в предельно сильном поле (14) не зависит от спина, а определяется только плотностью числа частиц и их массой.

Ниже температуры конденсации  $T < T_B$  число надконденсатных частиц с проекцией спина  $\sigma$  дается формулой (5) с учетом условий (8)–(10), а полное число надконденсатных частиц  $N' = \sum_{\sigma} N_{\sigma}$  оказывается меньше  $N$ . Разница между полным числом и числом

надконденсатных частиц  $N_B = N - N'$  определяет число частиц, находящихся в БЭК:

$$N_B = N \left[ 1 - (T/T_B)^{3/2} \right] + \frac{V}{\Lambda^3} \sum_{\sigma=0}^{2s} \left[ \Phi_{3/2}(b_B \sigma) - \Phi_{3/2}(b_B) \right], \quad (15)$$

где  $b_B = \beta_B \kappa B / s$ ,  $\beta_B = 1/T_B$ . При наличии магнитного поля число частиц в конденсате всегда больше, чем при той же температуре в отсутствие поля. При  $T < T_B$  равновесная функция распределения частиц принимает вид

$$f_{p\sigma} = \left[ \exp \beta \left( \varepsilon_p - (\sigma - s) \kappa B / s \right) - 1 \right]^{-1} + (2\pi\hbar)^3 n_B \delta_{\sigma,s} \delta(\mathbf{p}), \quad (16)$$

где  $n_B = N_B / V$  — плотность числа частиц в конденсате. Конденсация в магнитном поле качественно отличается от БЭК в отсутствие поля тем, что в магнитном поле конденсат включает только частицы с одним значением проекции спина.

### 3. Зависимости термодинамических характеристик бозе-газа от магнитного поля в отсутствие конденсата

Как следует из зависимости температуры БЭК от магнитного поля, при температурах  $T > T_1$ , когда выполнено условие  $n\Lambda^3(T) < \zeta(3/2) \approx 2,612$ , при произвольной величине магнитного поля конденсат в бозе-газе отсутствует. Число частиц с проекцией спина  $\sigma$  определяется формулой (5). Зависимости плотностей числа частиц  $n_{\sigma}$  от величины магнитного поля для  $s = 1$  показаны на рис. 1. При увеличении поля число частиц с магнитным моментом, направленным по полю  $\sigma = s$ , монотонно возрастает. Число частиц с проекциями  $0 < \sigma < s$  вначале возрастает с увеличением магнитного поля, достигает максимума и в дальнейшем убывает до нуля (см. вставку на рис. 1,а). Число частиц с проекциями  $-s \leq \sigma \leq 0$  монотонно убывает до нуля с возрастанием поля, причем тем сильнее, чем меньше  $\sigma$ . В пределе сильного поля магнитные моменты всех частиц ориентированы вдоль поля.

Термодинамический потенциал газа, с учетом вида функции распределения (1), может быть найден так же, как и в отсутствие поля [20]:

$$\Omega = -\frac{VT}{\Lambda^3} \delta_{5/2}, \quad (17)$$

где функция  $\delta_{5/2}$  определена формулами (4). Дифференцируя  $\Omega$  по объему, температуре и магнитному полю, находим давление  $p$ , энтропию  $S$  и намагниченность  $M$  бозе-газа:

$$p = \frac{T}{\Lambda^3} \delta_{5/2}, \quad (18)$$

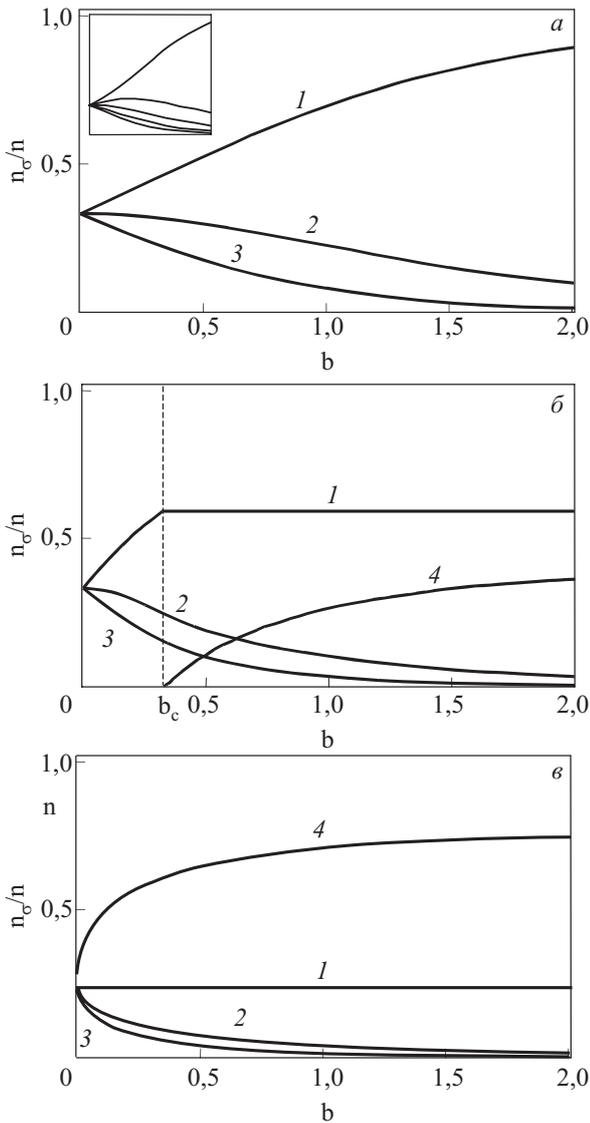


Рис. 1. Зависимости плотности числа частиц с проекцией спина  $\sigma$  от магнитного поля: фаза без БЭК ( $T > T_1$ ) (а); область фазового перехода ( $T_0 < T < T_1$ ) (б); фаза с БЭК ( $T < T_0$ ) (в). Кривые 1 соответствуют проекции спина  $\sigma = 1$ ; 2 —  $\sigma = 0$ ; 3 —  $\sigma = -1$ , а кривые 4 ( $\sigma = B$ ) плотности числа частиц в БЭК. На вставке показаны зависимости для  $s = 2$ .

$$S = \frac{V}{\Lambda^3} \left( \frac{5}{2} \delta_{5/2} + t \delta_{3/2} - b \delta'_{3/2} \right), \quad (19)$$

$$M = \frac{V \kappa}{s \Lambda^3} \delta'_{3/2}. \quad (20)$$

Соотношения (18)–(20), совместно с (6), параметрически (параметр  $sb < t < \infty$ ) определяют зависимости этих величин от температуры, плотности числа частиц и магнитного поля. Полная энергия, включающая энергию магнитного поля и энергию взаимодействия бозе-газа с магнитным полем, определяется формулой

$$E = \frac{VT}{\Lambda^3} \left( \frac{3}{2} \delta_{5/2} - b \delta'_{3/2} \right) + \frac{VB^2}{8\pi}, \quad (21)$$

и может быть представлена в виде

$$E = E_I - MB + \frac{VB^2}{8\pi}, \quad (22)$$

где

$$E_I = \frac{3VT\delta_{5/2}}{2\Lambda^3} \quad (23)$$

имеет смысл внутренней энергии. Отметим, что для внутренней энергии (23) выполнено характерное для идеальных квантовых газов соотношение  $E_I = -3\Omega/2$  [20], а также справедливо термодинамическое тождество

$$E_I = \mu N + TS + MB - pV. \quad (24)$$

Давление, внутренняя энергия и энтропия убывают с увеличением магнитного поля, достигая в сильных полях некоторых предельных значений. В экспериментах по конденсации атомарных газов [10–12] температура конденсации очень мала  $\approx 10^{-6} - 10^{-7}$  К, в силу чего оказывается малым и критическое поле (13)  $B_0 \approx 10^{-2}$  Гс, так что здесь реализуется случай сильных полей. Поэтому рассмотрим более подробно этот предельный случай. При условии  $b \gg 1$  для функций (4) справедлива асимптотика

$$\delta_v \approx \Phi_v(t - sb), \quad \delta'_v \approx s \Phi_v(t - sb), \quad \delta''_v \approx s^2 \Phi_v(t - sb). \quad (25)$$

Для фиксированных значений плотности и температуры из (6) следует, что в рассматриваемом пределе аргумент функций (25) стремится к постоянной величине  $t - sb \rightarrow c$ , причем постоянная  $c$ , согласно (6), определяется уравнением

$$n\Lambda^3 = \Phi_{3/2}(c). \quad (26)$$

Формулы (25), (26) позволяют получить термодинамические характеристики бозе-газа в предельно сильных полях при температурах  $T > T_1$ . Для давления, внутренней энергии и энтропии в пределе  $b \rightarrow \infty$  находим:

$$\begin{aligned} p &= \frac{T}{\Lambda^3} \Phi_{5/2}(c), \\ E_I &= \frac{3TV}{2\Lambda^3} \Phi_{5/2}(c), \\ S &= \frac{V}{\Lambda^3} \left[ \frac{5}{2} \Phi_{5/2}(c) + c \Phi_{3/2}(c) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Обратим внимание, что уравнения (26), (27) в точности совпадают с соотношениями, определяющими соответствующие величины для бозе-газа частиц с нулевым спином. Это является естественным следствием того, что в бесконечно сильном поле существует единственно возможное спиновое состояние  $\sigma = s$ , как и при  $s = 0$ . Используя свойства функций  $\Phi_v(t)$ , не-

сложно показать, что  $p, E_I, S$ , определяемые формулами (27), всегда меньше этих же величин в нулевом магнитном поле, которые описываются формулами (18), (19) и (23) при  $b = 0$  и  $t = t^{(0)}$ , где параметр  $t^{(0)}$  находится из уравнения

$$n\Lambda^3 = g\Phi_{3/2}(t^{(0)}). \quad (28)$$

Рассмотрим влияние магнитного поля на теплоемкости бозе-газа. Теплоемкость при постоянном объеме в магнитном поле в отсутствие конденсата определяется формулой

$$C_V = \frac{V}{\Lambda^3} \left[ \frac{15}{4} \frac{\delta_{3/2}^2}{\delta_{1/2}} \left( \frac{\delta_{1/2}}{\delta_{3/2}^2} \delta_{5/2} - \frac{3}{5} \right) + 3b\delta_{3/2} \left( \frac{\delta'_{1/2}}{\delta_{1/2}} - \frac{\delta'_{3/2}}{\delta_{3/2}} \right) + b^2 \delta_{1/2}'' \left( 1 - \frac{\delta_{1/2}^2}{\delta_{1/2} \delta_{1/2}''} \right) \right]. \quad (29)$$

Для теплоемкости при постоянном давлении  $C_p$  в этом случае имеем

$$C_p = \frac{V}{\Lambda^3} \left[ \frac{25}{4} \delta_{5/2} \left( \frac{\delta_{1/2}}{\delta_{3/2}^2} \delta_{5/2} - \frac{3}{5} \right) + 5b\delta_{5/2} \left( \frac{\delta'_{1/2}}{\delta_{3/2}} - \frac{\delta_{1/2} \delta'_{3/2}}{\delta_{3/2}^2} \right) + b^2 \left( \delta_{1/2}'' - 2 \frac{\delta'_{3/2} \delta'_{1/2}}{\delta_{3/2}} + \frac{\delta_{1/2}}{\delta_{3/2}^2} \delta_{3/2}^2 \right) \right]. \quad (30)$$

Разность этих теплоемкостей может быть представлена в виде

$$C_p - C_V = \frac{V}{\Lambda^3} \frac{\delta_{3/2}^2}{\delta_{1/2}} \left[ \frac{5}{2} \frac{\delta_{1/2} \delta_{5/2}}{\delta_{3/2}^2} - \frac{3}{2} + b \frac{\delta_{1/2}}{\delta_{3/2}} \left( \frac{\delta'_{3/2}}{\delta_{3/2}} - \frac{\delta'_{1/2}}{\delta_{1/2}} \right) \right], \quad (31)$$

из которого очевидна выполнимость известного термодинамического условия устойчивости системы  $C_p > C_V$ . Формулы (29), (30), совместно с (6), параметрически (параметр  $sb < t < \infty$ ) определяют зависимости  $C_V, C_p$  от температуры, плотности числа частиц и магнитного поля. Зависимости теплоемкостей от магнитного поля представлены на рис. 2 и, в частности, в фазе без конденсата на рис. 2,а.

В классическом пределе, при условии  $n\Lambda^3 \ll 1$ , теплоемкости в магнитном поле, приходящиеся на одну частицу

$$\frac{C_V}{N} - \frac{3}{2} = \frac{C_p}{N} - \frac{5}{2} = \xi(b), \quad (32)$$

отличаются от теплоемкостей в нулевом поле на одну и ту же величину

$$\xi(b) = b^2 \frac{d^2}{db^2} \ln \left[ 1 + 2 \sum_{\sigma=1}^s \text{ch}(\sigma b) \right]. \quad (33)$$

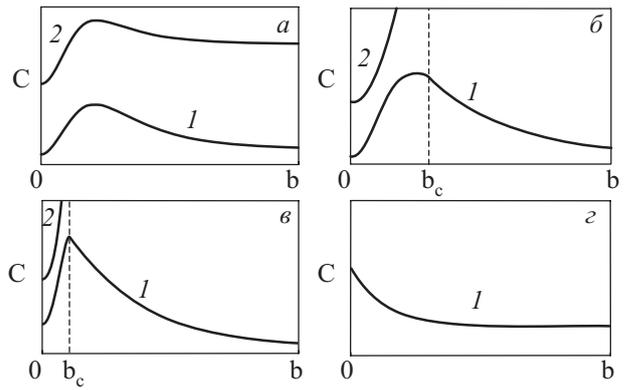


Рис. 2. Зависимости теплоемкостей при постоянном объеме  $C_V$  (кривые 1) и давления  $C_p$  (кривые 2) от магнитного поля: фаза без БЭК ( $T > T_1$ ) (а); область фазового перехода ( $T_0 < T < T_1$ ) (б), (в); фаза с БЭК ( $T < T_0$ ) (г).

Функция  $\xi(b)$  при  $0 < b < \infty$  положительна. Возрастая от нуля при  $b = 0$  до максимального значения  $\xi_m$  при  $b_m$ , она в дальнейшем вновь убывает до нуля. Таким образом, теплоемкости бозе-газа частиц с магнитным моментом при высоких температурах одинаковы при нулевом поле и в пределе бесконечно сильных полей. В частности, при  $s=1$   $b_m = 1,880$ ,  $\xi_m = 0,637$ , а при  $s=2$   $b_m = 1,350$ ,  $\xi_m = 0,807$ , так что с увеличением спина частицы максимум функции  $\xi(b)$  смещается в сторону меньших полей, а ее значение в максимуме увеличивается. С понижением температуры теплоемкости в бесконечно сильных полях становятся больше их значений в нулевом поле и определяются формулами

$$C_V = \frac{15}{4} \frac{V}{\Lambda^3} \left[ \Phi_{5/2}(c) - \frac{3}{5} \frac{\Phi_{3/2}^2(c)}{\Phi_{1/2}(c)} \right], \quad (34)$$

$$C_p = \frac{25}{4} \frac{V}{\Lambda^3} \Phi_{5/2}(c) \left[ \frac{\Phi_{5/2}(c) \Phi_{1/2}(c)}{\Phi_{3/2}^2(c)} - \frac{3}{5} \right],$$

где параметр  $c$  задан соотношением (26). Эти теплоемкости, как и другие термодинамические величины (27), совпадают с теплоемкостями бозе-газа частиц с нулевым спином.

Перейдем к рассмотрению магнитной восприимчивости бозе-газа  $\chi = V^{-1} (\partial M / \partial B)_{N, V, T}$ . При температурах выше температуры БЭК она дается формулой

$$\chi = \frac{\kappa^2}{\Lambda^3 T s^2} \delta_{1/2}'' \left( 1 - \frac{\delta_{1/2}^2}{\delta_{1/2} \delta_{1/2}''} \right). \quad (35)$$

Формула (35), совместно с (6), параметрически (параметр  $sb < t < \infty$ ) определяет зависимость  $\chi$  от температуры, плотности числа частиц и магнитного поля. Зависимости восприимчивости от магнитного поля представлены на рис. 3 и, в частности, в фазе без конденсата на рис. 3,а.

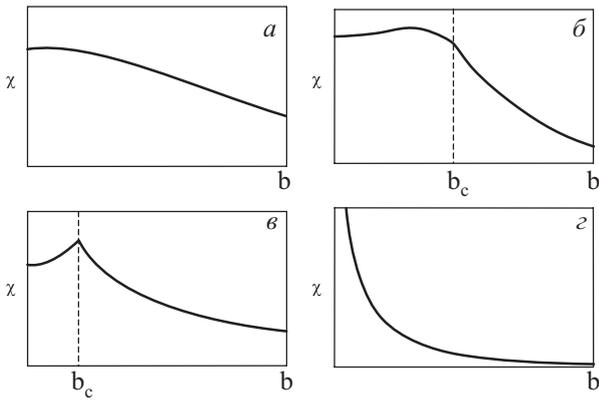


Рис. 3. Зависимости восприимчивости от магнитного поля: фаза без БЭК ( $T > T_1$ ) (а); область фазового перехода ( $T_0 < T < T_1$ ) (б), (в); фаза с БЭК ( $T < T_0$ ) (г).

В классическом пределе  $n\Lambda^3 \ll 1$  зависимость восприимчивости от поля имеет вид

$$\chi = \frac{\kappa^2 n}{Ts^2} \frac{d^2}{db^2} \ln \left[ 1 + 2 \sum_{\sigma=1}^s \text{ch}(\sigma b) \right]. \quad (36)$$

Из (36) следует, что в пределе нулевого поля

$$\chi = \frac{\kappa^2 n (s+1)}{3Ts}. \quad (37)$$

Эта формула отличается от классической формулы Кюри–Ланжевена множителем  $(s+1)/s$ , который появляется вследствие квантования ориентации магнитного момента. В классическом пределе восприимчивость монотонно убывает до нуля в сильных полях.

При произвольных температурах  $T > T_1$  в нулевом поле восприимчивость определяется формулами

$$\chi = \frac{\kappa^2}{\Lambda^3 T} \frac{(s+1)(2s+1)}{3s} \Phi_{1/2}(t^{(0)}) \quad (38)$$

и (28) и также монотонно убывает с увеличением поля (рис. 3,а). В пределе сильных полей намагниченность достигает своего максимально возможного значения  $\kappa N$ , а восприимчивость стремится к нулю. Последнее естественно, поскольку в пределе сильного поля изменение поля не приводит к изменению намагниченности.

#### 4. Зависимости термодинамических характеристик бозе-газа от магнитного поля при наличии БЭК

При температурах  $T < T_0$ , когда выполнено условие  $n\Lambda^3 > g\zeta(3/2)$ , БЭК существует при произвольной величине магнитного поля. Зависимости плотностей числа надконденсатных частиц  $n_s$  и плотности числа частиц в конденсате  $n_B$  от величины магнитного поля представлены на рис. 1,в. Видно (кривая 1), что число

надконденсатных частиц с магнитным моментом, ориентированным вдоль поля,  $n_s = \zeta(3/2)/\Lambda^3$  не меняется с увеличением поля, а число частиц с проекциями  $\sigma \neq s$  убывает тем быстрее, чем меньше  $\sigma$ . Число частиц в БЭК монотонно возрастает с увеличением поля. Таким образом, в предельно сильных полях магнитные моменты всех частиц оказываются ориентированными по магнитному полю. При этом часть частиц находится в надконденсатном состоянии, а остальные частицы с плотностью  $n_B = n - \zeta(3/2)/\Lambda^3$  — в конденсате.

В рассматриваемом случае давление газа и его энтропия также определяются формулами (18), (19), в которых следует учесть условия (9), (10). В полную энергию (21) следует включить также энергию взаимодействия намагниченности конденсата с магнитным полем. Для внутренней энергии остается справедливой формула (23), где  $t_\sigma = (s - \sigma)b$ , а также тождество (24), где  $\mu = -\kappa B$ . Полная намагниченность определяется как намагниченностью надконденсатных частиц, так и намагниченностью конденсата

$$M = \kappa \left[ N_B + \frac{V}{\Lambda^3 s} \delta'_{3/2} \right]. \quad (39)$$

Теплоемкость при постоянном объеме в состоянии с конденсатом определяется формулой

$$C_V = \frac{V}{\Lambda^3} \left\{ \frac{15}{4} \zeta(5/2) + \sum_{\sigma=1}^{2s} \left[ \frac{15}{4} \Phi_{5/2}(\sigma b) + 3b\sigma \Phi_{3/2}(\sigma b) + b^2 \sigma^2 \Phi_{1/2}(\sigma b) \right] \right\} \quad (40)$$

и монотонно убывает с увеличением магнитного поля к предельному значению, которое в  $g$  раз меньше теплоемкости в нулевом поле (рис. 2,з). Теплоемкость при постоянном давлении  $C_p$ , как и в отсутствие поля [21], в фазе с БЭК обращается в бесконечность. Указанная особенность является следствием того, что давление в этом случае — функция только температуры. Это свойство вызвано пренебрежением взаимодействия между частицами. Учет хотя бы слабого межчастичного взаимодействия делает утверждение о бесконечной величине изобарической теплоемкости при наличии конденсата неверным.

Зависимость магнитной восприимчивости от поля в рассматриваемом случае (рис. 3,г) определяется формулой

$$\chi = \frac{\kappa^2}{\Lambda^3 T s^2} \sum_{\sigma=1}^{2s} \sigma^2 \Phi_{1/2}(\sigma b). \quad (41)$$

В слабых полях  $B \ll T/\kappa$  формула (41) принимает вид

$$\chi = \frac{\kappa^2}{\Lambda^3} \sqrt{\frac{\pi}{T\kappa B}} \sum_{\sigma=1}^{2s} \left( \frac{\sigma}{s} \right)^{3/2}. \quad (42)$$

Таким образом, в пределе  $B \rightarrow 0$  в фазе с конденсатом восприимчивость стремится к бесконечности. Физически это означает, что при температуре ниже точки конденсации включение бесконечно слабого внешнего магнитного поля, в силу макроскопического числа частиц в конденсате, приводит к появлению конечной намагниченности бозе-газа. Это свойство также обусловлено пренебрежением межчастичным взаимодействием.

### 5. Фазовый переход по магнитному полю

В интервале температур  $T_0 < T < T_1$ , где выполнено неравенство  $\zeta(3/2) < n\Lambda^3 < g\zeta(3/2)$ , бозе-газ в зависимости от величины поля может находиться как в состоянии без конденсата, так и в конденсатном состоянии. В достаточно слабом магнитном поле конденсат отсутствует, но при некотором критическом значении магнитного поля  $B_c$  происходит переход в состояние с БЭК. Критическое магнитное поле определяется уравнением (11), которое в данном случае примет вид

$$T_0 = T \left[ \sum_{\sigma=0}^{2s} \Phi_{3/2}(\sigma \kappa B_c / sT) / g\zeta(3/2) \right]^{2/3}. \quad (43)$$

Критическое поле растет с температурой от нуля при  $T_0$  до бесконечности при  $T \rightarrow T_1$  (рис. 4).

Зависимости числа частиц с различными проекциями спина и числа частиц в конденсате для  $s=1$  представлены на рис. 1,б. При увеличении поля в области отсутствия БЭК число частиц с магнитным моментом, направленным по полю  $\sigma = s$ , монотонно возрастает. Выше критического поля  $B_c$  число надконденсатных частиц  $n_s$  перестает зависеть от величины поля (кривая 1), но возникает конденсат с  $\sigma = s$  (кривая 4). Число частиц в конденсате  $n_B$  возрастает с магнитным полем за счет уменьшения числа надконденсатных частиц с  $\sigma \neq s$ . Количество частиц с проекциями  $0 < \sigma < s$  вначале возрастает с увеличением магнитного поля, достигает максимума и в дальнейшем убывает

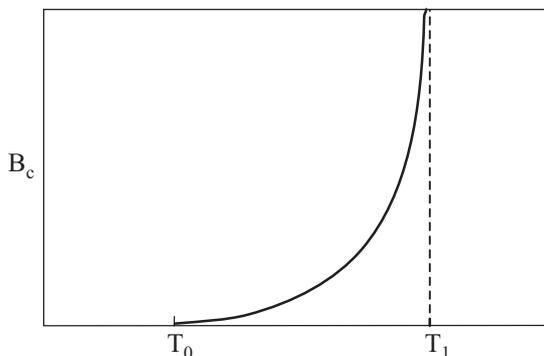


Рис. 4. Зависимость критического магнитного поля бозе-эйнштейновского перехода от температуры.

до нуля (см. вставку на рис. 1,а). Количество частиц с проекциями  $-s \leq \sigma \leq 0$  монотонно убывают до нуля с возрастанием поля, причем тем сильнее, чем меньше  $\sigma$ . В пределе сильного поля магнитные моменты частиц, как в конденсате, так и в надконденсатном состоянии ориентированы вдоль поля.

При критическом поле  $B_c$  испытывает скачок  $\Delta f = f(B_c + 0) - f(B_c - 0)$  производная по  $B$  от числа надконденсатных частиц с магнитным моментом, направленным по полю:

$$\Delta \left( \frac{dN_s}{dB} \right) = -\frac{s\kappa n\Lambda^3}{T} \sum_{\sigma=1}^{2s} \sigma \Phi_{1/2}(\sigma b_c), \quad (44)$$

где  $b_c = \beta \kappa B_c / s$ . Скачок производной по  $B$  от числа частиц в конденсате имеет ту же величину, но с обратным знаком, так что производная от полного числа частиц с  $\sigma = s$  по магнитному полю остается непрерывной при  $B = B_c$ .

Зависимости теплоемкостей от магнитного поля в области температур, где возможен фазовый переход, показаны на рис. 2,б,в. Примечательно, что эти зависимости в рассматриваемой области качественно различаются в различных температурных интервалах. При  $T' < T < T_1$  теплоемкость при постоянном объеме достигает максимума в магнитном поле меньшем, чем критическое поле  $B_c$ , и затем начинает убывать (рис. 2,б, кривая 1). По достижению критического поля кривая претерпевает излом и далее  $C_V$  в фазе с конденсатом продолжает монотонно убывать с ростом магнитного поля. С понижением температуры максимум теплоемкости смещается ближе к критическому полю  $B_c$  и, начиная с  $T'$ , максимум достигается при  $B_c$  (рис. 2,в, кривая 1). Для  $s=1$   $T'/T_0 = 1,79$ , что соответствует  $n\Lambda^3 = 3,27$  и критическому полю  $b_c = 0,901$ . При  $T_0 < T < T'$  в точке максимума при  $b = b_c$  кривая зависимости  $C_V$  от поля претерпевает излом. В интервале  $T_0 < T < T_1$  имеется еще одна характерная температура  $T''$  (для  $s=1$   $T''/T_0 = 1,91$ ,  $n\Lambda^3 = 2,97$  и  $b_c = 1,35$ ), выше которой величина  $C_V$  при бесконечном поле больше ее значения в отсутствие поля, а ниже соотношение меняется на обратное.

Зависимости магнитной восприимчивости от поля в температурном интервале  $T_0 < T < T_1$  также имеют качественно различный вид. Несколько ниже температуры  $T_1$  в интервале  $T_1' < T < T_1$  зависимость восприимчивости от поля имеет качественно такой же вид, как при  $T > T_1$  (рис. 3,а). При  $T_1' < T < T_1''$  восприимчивость, возрастая в слабых полях, достигает максимума в поле, меньшем критического (рис. 3,б), а затем убывает, претерпевая излом при критическом поле  $B_c$ . С понижением температуры точка максимума  $\chi$  приближается к критическому полю и в интервале  $T_0 < T < T_1'$  восприимчивость достигает максимума при  $B_c$ , претерпевая в максимуме излом (рис. 3,в). Для

$s = 1$   $T_1''/T_0 = 2,03$ , чему соответствует  $n\Lambda^3 = 2,7$  и критическое поле  $b_c = 2,54$ , а  $T_1'/T_0 = 1,26$ , чему соответствует  $n\Lambda^3 = 5,53$  и критическое поле  $b_c = 0,10$ .

При критическом поле  $B_c$  испытывают скачок производные теплоемкости и магнитной восприимчивости по температуре и магнитному полю:

$$\Delta\left(\frac{\partial\chi}{\partial T}\right) = \frac{\kappa^2}{2\pi T^2 \Lambda^3 s^2} A^2(b_c) D(b_c), \quad (45)$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\chi}{\partial B}\right) = -\frac{\kappa^3}{2\pi T^2 \Lambda^3 s^3} A^3(b_c),$$

$$\Delta\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right) = \frac{V}{2\pi T \Lambda^3} D^3(b_c), \quad (46)$$

$$\Delta\left(\frac{\partial C_V}{\partial B}\right) = -\frac{V\kappa}{2\pi T \Lambda^3 s} A(b_c) D^2(b_c),$$

где использованы обозначения

$$A(b) = \sum_{\sigma=1}^{2s} \sigma \Phi_{1/2}(\sigma b),$$

$$D(b) = \frac{3}{2} \sum_{\sigma=0}^{2s} \Phi_{3/2}(\sigma b) + b \sum_{\sigma=1}^{2s} \sigma \Phi_{1/2}(\sigma b).$$

Величина скачков (45) и  $\Delta(\partial C_V/\partial B)$  стремится к бесконечности при  $b_c \rightarrow 0$  и монотонно убывает до нуля при  $b_c \rightarrow \infty$ . Величина скачка производной от теплоемкости по температуре монотонно убывает от  $\Delta(\partial C_V/\partial T) = 27V [g\zeta(3/2)]^3 / 16\pi T_0 \Lambda_0^3$  при  $b_c \rightarrow 0$  до величины в  $g^{8/3}$  раз меньше при  $b_c \rightarrow \infty$ . Следует отметить, что приведенная выше величина  $\Delta(\partial C_V/\partial T)$  в пределе  $b_c \rightarrow 0$  не совпадает по величине со скачком производной от теплоемкости в нулевом поле при переходе по температуре [20]. Это отражает качественное отличие конденсации в магнитном поле, обусловленное тем, что в этом случае в конденсат выпадают только те частицы, магнитный момент которых направлен по полю.

В отличие от теплоемкости  $C_V$ , которая остается конечной в магнитном поле  $B_c$  и меняется непрерывно при переходе в фазу с конденсатом, изобарическая теплоемкость, как и в случае перехода по температуре [21], стремится к бесконечности при приближении к критическому полю (рис. 2, б, в, кривые 2):

$$C_P = \frac{V}{\Lambda^3} \frac{2\pi T s}{\kappa A(b_c)(B_c - B)} \left[ \frac{5}{2} \frac{\delta_{5/2}(b_c)}{\delta_{3/2}(b_c)} + b_c \left( s - \frac{\delta'_{3/2}(b_c)}{\delta_{3/2}(b_c)} \right) \right]^2, \quad (47)$$

$$\text{где } \delta_v(b_c) \equiv \sum_{\sigma=0}^{2s} \Phi_v(\sigma b_c), \quad \delta'_v(b_c) \equiv \sum_{\sigma=1}^{2s} \sigma \Phi_v(\sigma b_c).$$

## 6. Заключение

В отсутствие магнитного поля бозе-эйнштейновский переход, приводящий к возникновению конденсата, может происходить в двух случаях. Во-первых, при понижении температуры, во-вторых, при увеличении плотности числа частиц, когда она достигает критического значения. Следует, однако, оговориться, что в действительности при достаточно высоких температурах критическая плотность может оказаться столь высокой, что перестанет быть применимой модель идеального газа. В настоящей работе показано, что для бозе-газа частиц с магнитным моментом имеется еще одна возможность перехода в состояние с БЭК, а именно, фазовый переход может быть осуществлен при постоянных температуре и плотности числа частиц в результате увеличения магнитного поля и достижения им критического значения. Такая возможность может быть реализована только в определенном интервале температур, когда температура выше температуры конденсации в нулевом поле, но меньше температуры конденсации в предельно сильном поле. При переходе по магнитному полю давление, энтропия, теплоемкость при постоянном объеме, намагниченность и магнитная восприимчивость оказываются непрерывными, а производные от теплоемкости при постоянном объеме и восприимчивости по температуре и магнитному полю испытывают скачок. Теплоемкость при постоянном давлении стремится к бесконечности при приближении магнитного поля к критическому значению со стороны фазы, где конденсат отсутствует. Зависимости термодинамических величин от магнитного поля качественно различны при температурах выше температурного интервала, где возможен фазовый переход, и ниже этого интервала.

1. S.N. Bose, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).
2. А. Эйнштейн, *Собрание научных трудов*, Наука, Москва (1966), т. 3.
3. F. London, *Nature* **141**, 643 (1938).
4. L. Tisza, *Nature* **141**, 913 (1938).
5. P.L. Kapitza, *Nature* **141**, 74 (1938).
6. J.F. Allen, *Nature* **141**, 234 (1938).
7. Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941).
8. R.A. Cowley and A.D.B. Woods, *Can. J. Phys.* **49**, 177 (1971).
9. K. Yamada, *Prog. Theor. Phys.* **67**, 443 (1982).
10. M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
11. K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
12. C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollet, and R.G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
13. Б.Б. Кадомцев, М.Б. Кадомцев, *УФН* **167**, 649 (1997).
14. Л.П. Питаевский, *УФН* **168**, 641 (1998).

15. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский, Ю.В. Слюсаренко, *ЖЭТФ* **113**, 918 (1998).
16. M.V. Simkin and E.G.D. Cohen, *Phys. Rev.* **59**, 1528 (1999).
17. Ю.М. Полуэктов, *УФЖ* **46**, 282 (2001).
18. E. Eisenberg and E.H. Lieb, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 220403 (2002).
19. Q. Gu and R.A. Klemm, *Phys. Rev.* **A68**, 031604(R) (2003).
20. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976), ч. 1.
21. Ю.М. Полуэктов, *Известия вузов. Физика* **47**, 56 (2001).

### Phase transition in Bose gas at magnetic field

Yu.M. Poluektov and A.G. Volosnev

The magnetic field dependence of thermodynamical properties of non-zero spin and magnetic moment Bose gas particles has been studied in the cases with

and without Bose–Einstein condensate. It is shown that as the magnetic field increases and reaches its critical value there is a temperature interval in which Bose gas with constant temperature and particle number density makes a transition to a state with Bose–Einstein condensate. The derivatives of specific heat at constant volume and magnetic susceptibility with respect to temperature or magnetic field are discontinuous at the phase transition.

PACS: 67.85.Jk Other Bose–Einstein condensates phenomena;  
03.75.Mn Multicomponent and spinor condensates.

Keywords: Bose–Einstein condensation, magnetic field, phase transition, magnetization, magnetic susceptibility, thermal capacity.