Физика низких температур, 2010, т. 36, № 4, с. 429–435

Двухпараметрические динамические солитоны в тонких упругих пластинах

А.С. Ковалев, Е.С. Соколова

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103,Украина
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua
esokolova@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 17 ноября 2009 г.

Исследована динамика двухпараметрических упругих солитонов почти сдвиговой поляризации, локализованных в тонкой упругой пластине ангармонического материала. Выведены одномерные нелинейные интегро-дифференциальные уравнения для сдвиговых смещений и предложен вариант асимптотической процедуры, позволивший найти приближенные аналитические решения для таких солитонов.

Досліджено динаміку двопараметричних пружних солітонів майже зсувної поляризації, локалізованих в тонкій пружній пластині ангармонічного матеріалу. Виведено одновимірне нелінійне інтегро-диференційне рівняння для зсувних зміщень і запропоновано варіант асимптотичної процедури, що дозволяє знайти наближені аналітичні розв'язки для таких солітонів.

PACS: **68.35.–p** Поверхности твердых тел и интерфейсы твердое тело– твердое тело: структура и энергетика.

Ключевые слова: упругая пластина, нелинейная среда, сдвиговая волна, солитон огибающей.

Введение

Проблема нелинейных упругих волн в системах с ограниченной геометрией (солитоны в тонких стержнях, нелинейные поверхностные волны и солитоны у идеальной поверхности и поверхности с тонким пленочным покрытием, нелинейные волны и солитоны в тонких пластинах) в последнее время интенсивно исследуется как экспериментально, так и теоретически [1–13]. Первоначально изучались преимущественно нестационарные нелинейные эффекты у поверхности нелинейных упругих сред, где за счет концентрации энергии в поверхностной волне нелинейные свойства проявлялись достаточно эффективно. Вопрос о возможности существования стационарных нелинейных волн в системах с ограниченной геометрией оставался открытым. Позже в рамках общей теории нелинейных волн стало ясно, что для существования стационарных нелинейных волн (как пространственно периодических, так и уединенных) необходимо наличие достаточно сильной пространственной дисперсии волн [14]. Обычно теория упругости не учитывает *собственную дисперсию* упругих волн, связанную с дискретностью кристаллической решетки, из-за ее малости в длинноволновом пределе [15]. Учет пространственной ограниченности системы приводит к существенному увеличению дисперсии упругих волн. В этом случае, кроме естественного пространственного масштаба — межатомного расстояния, появляется дополнительный геометрический пространственный параметр — толщина стержня или пластины, толщины пленочного покрытия поверхности, которые могут быть существенно больше межатомного расстояния. При этом дисперсия становится существенной не только вблизи верхней границы спектра линейных волн, но и при волновых векторах порядка величины $1/h$, где h — характерный размер системы (например, толщина пластины). Так, в случае упругих волн в пластине волны Рэлея–Лэмба сагиттальной поляризации и высшие ветви сдвиговых поверхностных волн (при их пространственном квантовании) имеют сильную дисперсию [2]. Действительно, для такой геометрии в работе [6] экспериментально обнаружены солитоны (нелинейные локализованные состояния) стационарного профиля.

Теоретически распространение нелинейных волн в упругой пластине изучалось в [6,10,12]. Авторы [6] рассмотрели чисто сдвиговые волны в упругой пластине и показали, что учет неоднородности волны по толщине пластины (в высших модах) приводит к возможности существования солитонов. В [10] учтено влияние сагиттальных компонент на периодические сдвиговые нелинейные волны в такой же пластине и указано на сильное взаимодействие разных компонент смещений. В [12] проведено исследование нелинейной динамики упругих сдвиговых волн в пластине при учете их взаимодействия с малоамплитудными сагиттальными компонентами смещений. Показано, что в такой системе существуют сдвиговые солитоны стационарного профиля. В зависимости от пространственного размера, скорости и упругих модулей системы они могут принимать вид стандартных солитонных решений модифицированного уравнения Буссинеска или экзотических солитонов типа пиконов и компактонов. Кроме того, в [12] было указано, что существует узкая область значений длин волн, где нелинейная периодическая сдвиговая волна становится модуляционно неустойчивой. Развитие этой неустойчивости может привести (см. [14]) к образованию двухпараметрических динамических солитонов (ниже — *солитонов огибающей (envelope solitons)*), представляющих связанные состояния элементарных возбуждений системы (в нашем случае — фононов).

В случае нелинейного упругого полупространства, покрытого пленкой другого ангармонического материала, экспериментально наблюдались как однопараметрические динамические солитоны стационарного профиля, так и двухпараметрические солитоны огибающей [5].

В нелинейных пластинах экспериментально обнаружены лишь солитоны стационарного профиля [6]. Поэтому возникает вопрос о теоретическом исследовании возможности существования в таких нелинейных упругих пластинах также и солитонов огибающей. Обычно в одномерных системах этот вопрос легко исследуется в рамках стандартных уравнений нелинейной динамики и тех или иных асимптотических методов [13,14]. В многомерном случае проблема вывода адекватных уравнений нелинейной динамики становится достаточно сложной, а асимптотическая процедура нахождения солитонных решений становится нетривиальной и сложной даже в основном (резонансном) приближении. Поэтому в данной работе рассмотрена достаточно простая модель, в которой нелинейные волны имеют преимущественно сдвиговую поляризацию, а нелинейность возникает за счет взаимодействия сдвиговых смещений с малоамплитудными смещениями в сагиттальной плоскости. При этом для основной сдвиговой компоненты смещений удалось вывести одномерное интегро-дифференциальное эволюционное уравнение, получить солитонные решения этого уравнения для солитонов огибающей и исследовать их свойства.

1. Модель и вывод основного динамического уравнения

Для исследования нелинейной динамики сдвиговых волн в упругой пластине в работе [12] была сформулирована следующая модель (см. рис. 1). Неограниченная в направлениях X и Y упругая пластина конечной толщины $2h$ занимает объем $-h \le z \le h$. Волна однородна вдоль оси Y и распространяется вдоль оси X, а $u = u_{(y)}(x,z,t)$, $v = u_{(x)}(x,z,t)$, $w = u_{(z)}(x,z,t)$ — соответственно сдвиговое смещение $(u_{(y)})$ и смещения в сагиттальной плоскости (X,Z). В предложенной нами модели предполагается, что распространяющаяся нелинейная волна имеет в основном сдвиговую поляризацию, т.е. $u >> v, w$, и перемещается со скоростями, близкими к скорости линейных сдвиговых волн. В работе [7] рассмотрены чисто сдвиговые солитоны стационарного профиля в пластинах при условии сильной зависимости сдвиговых смещений u от координаты Z. Однако экспериментально возбудить такую волну сложно. Обычно возбуждается чисто сдвиговая волна, однородная по толщине пленки. При этом она обладает слабой дисперсией (собственной дисперсией из-за дискретности решетки). С другой стороны, волны Рэлея–Лэмба со смещениями в сагиттальной плоскости обладают сильной дисперсией. Поэтому мы учитываем взаимодействие смещений основной сдвиговой поляризации со слабыми смещениями в сагиттальной плоскости. Это взаимодействие привносит дополнительную (к слабой собственной) дисперсию в основную сдвиговую волну. В главном приближении сдвиговые смещения не зависят от z: $u(x,z) = u^{(0)}(x) + u^{(1)}(x,z)$, $u^{(1)} << u^{(0)}$. При учете малой собственной дисперсии только для основной сдвиговой компоненты и учете зависимости от z только в квадратичных слагаемых, входящих в выражение для полной энергии системы, в работе [8] получена система динамических уравнений

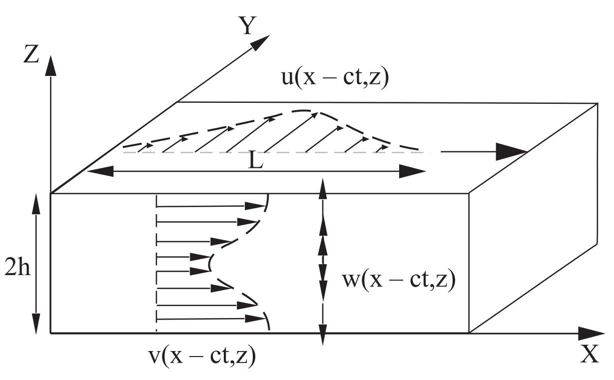

Рис. 1. Геометрия задачи и смещения в локализованной нелинейной упругой волне.

для пластины ангармонического кристалла кубической симметрии

$$\rho\, u_{tt} - c_{44}(u_{xx} + u_{zz}) - Aa^2(u_{xxxx} + u_{zzzz}) =$$

$$= s_{112121}[(u_x v_x)_x + (u_z w_z)_z] + s_{132123}[(u_z v_z)_x + (u_z w_x)_x +$$

$$+ (u_x v_z)_z + (u_x w_x)_z] + s_{332121}[(u_x w_z)_x +$$

$$+ (u_z v_x)_z] + \frac{1}{6} s_{21212121}(u_x^3)_x, \qquad (1)$$

$$\rho v_{tt} - c_{11} v_{xx} - c_{44}(v_{zz} + w_{xz}) - c_{12} w_{xz} =$$

$$= s_{112121} u_x u_{xx} + s_{132123}(u_x u_z)_z + \frac{1}{2} s_{332121}(u_z^2)_x, \qquad (2)$$

$$\rho w_{tt} - c_{11} w_{zz} - c_{44}(w_{xx} + v_{xz}) - c_{12} v_{xz} =$$

$$= s_{112121} u_z u_{zz} + s_{132123}(u_x u_z)_x + \frac{1}{2} s_{332121}(u_x^2)_z \qquad (3)$$

и соответствующие им граничные условия на свободных границах пластины $z = \pm h$ (здесь и далее нижние индексы t, x, z означают дифференцирование по соответствующей переменной):

$$c_{44} u_z + \tilde{A} a^2 u_{zzz} + s_{112121} u_z w_z + s_{33212} u_z v_x +$$

$$+ s_{132123} u_x (v_z + w_x) = 0, \qquad (4)$$

$$c_{44}(v_z + w_x) + s_{132123} u_x u_z = 0, \qquad (5)$$

$$c_{11} w_z + c_{12} v_x + \frac{1}{2} s_{112121} u_z^2 + \frac{1}{2} s_{332121} u_x^2 = 0, \qquad (6)$$

где c_{ij} и s_{iklmns} — линейные и нелинейные упругие модули кристалла в обозначениях [11], $\widetilde{A} = c_{44}/12$.

Проинтегрировав уравнение (1) по толщине пластины и воспользовавшись граничным условием (4), легко получить одномерное уравнение для сдвиговых смещений $u^{(0)}$ в основном приближении:

$$u_{xx}^{(0)} - \frac{1}{c_t^2} u_{tt}^{(0)} + Aa^2\, u_{xxxx}^{(0)} + r\,(u_x^{(0)3})_x +$$

$$+ [u_x^{(0)} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} dz\, (\alpha v_x + \beta w_z)]_x = 0, \qquad (7)$$

где $\alpha = \dfrac{s_{112121}}{c_{44}}$, $\beta = \dfrac{s_{332121}}{c_{44}}$, $r = \dfrac{s_{21212121}}{6 c_{44}}$, $c_t = \sqrt{\dfrac{c_{44}}{\rho}}$, $A = \widetilde{A}/c_{44}$. В это уравнение, кроме собственной дисперсии (третье слагаемое), связанной с дискретностью материала, входит дополнительная так называемая «нелинейная дисперсия» (последнее слагаемое), обусловленная взаимодействием сдвиговой компоненты волны с малоамплитудными сагиттальными компонентами смещений. Это уравнение является основным для дальнейшего исследования сдвиговых солитонов огибающей.

Для нахождения замкнутого уравнение для $u^{(0)}$ необходимо выразить функции v и w через $u^{(0)}$, воспользовавшись уравнениями (2), (3) и граничными условиями (5), (6). Уравнения (2), (3) — линейные двумерные уравнения для v и w с правыми частями, зависящими от квадратов основных сдвиговых смещений. Эти уравнения легко решаются с помощью преобразования Фурье (система этих уравнений без правых частей дает решение задачи о распространении волн Рэлея–Лэмба, в частности, их спектр):

$$v = \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sin(kx - \omega t)\, V(k, z, \omega),$$

$$w = \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cos(kx - \omega t)\, W(k, z, \omega),$$

$$u_x^{(0)2} = -\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{k^2}{8} u_0^2(k, \omega) \cos(kx - \omega t) + \frac{K^2}{8} u^{(0)2}(x, t). \qquad (8)$$

В последней из приведенных формул учтено следующее обстоятельство. Огибающая рассматриваемых в данной статье солитонов выделяет локализованную область несущей волны с фазой $\Theta = Kx - \Omega t$ (см. ниже (15)), и для выполнения граничных условий в правой части (3) необходимо выделить соответствующую производную по «быстрой» координате.

После подстановки преобразований (8), решение уравнений (2), (3) для фурье-компонент сагиттальных смещений V и W принимает вид

$$V = V_1 \operatorname{ch} \gamma_1 z + V_2 \operatorname{ch} \gamma_2 z + \alpha k u_0^2 / [4(\kappa - 1 + \tilde{\varepsilon})], \qquad (9)$$

$$W = W_1 \operatorname{ch} \gamma_1 z + W_2 \operatorname{ch} \gamma_2 z, \qquad (10)$$

где введены обозначения

$$\gamma_{1,2}^2 = k^2 (p \pm \sqrt{p^2 - 4\tilde{\varepsilon}[1 - (1 - \tilde{\varepsilon})/\kappa)]} / 2,$$

$$p = \kappa - 1 + \tilde{\varepsilon}(1 + 1/\kappa) - \nu^2/\kappa, \quad \tilde{\varepsilon} = 1 - \omega^2 / k^2 c_t^2,$$

$$\nu = c_{21}/c_{44} + 1, \qquad \kappa = c_{11}/c_{44}.$$

Воспользовавшись выражениями (8)–(10), можно переписать уравнение (7) в виде замкнутого уравнения для основной составляющей сдвиговых смещений $u^{(0)}$ (напомним, что u_0^2 — фурье-компонента $u^{(0)2}$):

$$u_{xx}^{(0)}-\frac{1}{c_t^2}u_{tt}^{(0)}+Aa^2u_{xxxx}^{(0)}+r(u_x^{(0)3})_x+\left\{u_x^{(0)}\frac{1}{2h}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\cos(kx-\omega t)N(k,\omega)u_0^2(k,\omega)-\frac{\alpha\beta}{16(\nu-1)}K^2u^{(0)2}\right]\right\}_x=0. \quad (11)$$

Ядро интегрального оператора при этом выглядит следующим образом:

$$N(k,\omega)=-\frac{k^2}{2\kappa}\left(\beta-\alpha\frac{\nu-1}{\kappa-1+\tilde{\varepsilon}}\right)\frac{\tilde{\varepsilon}(\gamma_1^2-\gamma_2^2)[\beta(\kappa-1+\tilde{\varepsilon})-\alpha(\nu-1)]}{G\gamma_1\gamma_2}-\frac{\alpha^2hk^2}{4(\kappa-1+\tilde{\varepsilon})}, \quad (12)$$

где

$$G=\gamma_1\gamma_2\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1}\frac{1}{\gamma_i\,\mathrm{th}(\gamma_i h)}\left[\kappa-1+\tilde{\varepsilon}-\frac{(1-\tilde{\varepsilon})\gamma_i^2}{k^2}-\frac{(\nu-\tilde{\varepsilon})^2}{\kappa}\right].$$

В случае изотропного «материала Пуассона», для которого $\kappa=3$, $\nu=2$ и, следовательно, $\gamma_1=k\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$, $\gamma_2=k\sqrt{\mu}$, $\mu=(2+\varepsilon)/3$, выражение (12) значительно упрощается:

$$N(k,\omega)=\frac{h}{2}k^2\left(\frac{(1-\tilde{\varepsilon})\tilde{F}}{\Re}+\frac{\alpha^2}{6\mu}\right), \quad (13)$$

где

$$\tilde{F}=\left(\beta-\frac{\alpha}{3\mu}\right)^2, \quad \Re=\frac{4kh\sqrt{\tilde{\varepsilon}}}{\mathrm{th}(kh\sqrt{\tilde{\varepsilon}})}-\frac{(1+\tilde{\varepsilon})^2kh}{\sqrt{\mu}\,\mathrm{th}(kh\sqrt{\mu})}\ . \quad (14)$$

Система (11)–(14) является основной для решения задач о распространении почти сдвиговых нелинейных волн и солитонов в упругих ангармонических пластинах.

2. Асимптотическая процедура для нахождения малоамплитудных солитонов огибающей

Уравнения (7), (11) не интегрируются точно, и их решения для солитонов огибающей возможно найти лишь приближенно, используя тот или иной метод теории возмущения. Обычно малоамплитудные решения для солитонов огибающей в неинтегрируемых одномерных системах достаточно легко находятся с помощью различных асимптотических процедур (см. [13,14], а также [16], где асимптотический метод распространен на системы со звуковым законом дисперсии). В настоящей работе предлагается вариант асимптотической процедуры, в соответствии с которым решение для солитона огибающей ищется в виде ряда Фурье по периодической фазе (пространственно периодическая волна в системе отсчета, движущейся со скоростью огибающей солитона) с пространственно локализованными коэффициентами ряда Фурье этого разложения. В основном приближении (так называемом «резонансном приближении») решение имеет вид

$$u=u(x,t)=F(x-ct)\cos(Kx-\Omega t)+\Phi(x-ct)\sin(Kx-\Omega t), \quad (15)$$

который зависит от фазы «несущей волны» $\Theta=Kx-\Omega t$ и фазы «огибающего» профиля локализованного солитона $\Psi=x-ct$. Функции F и Φ раскладываются в степенные ряды по малому параметру, характеризующему отклонение частоты «несущей волны» солитона огибающей Ω от частоты линейной волны. Введем этот малый параметр следующим образом:

$$\varepsilon^2=\left(\Omega/Kc_t\right)^2-1+Aa^2K^2. \quad (16)$$

(Напомним, что закон дисперсии линейных чисто сдвиговых волн в бесконечной среде в нашей модели имеет вид $\Omega^2=c_t^2K^2-Aa^2c_t^2K^4$, что следует из первых трех слагаемых уравнения (7).) При этом частота и групповая скорость малоамплитудной несущей волны в нелинейном случае определяются следующими выражениями:

$$\Omega(K)\approx c_tK\sqrt{1-Aa^2K^2}\,[1+\varepsilon^2/2(1-Aa^2K^2)], \quad (17)$$

$$c=\frac{\partial\Omega}{\partial K}\approx c_t\left[\frac{1-2Aa^2K^2}{\sqrt{1-Aa^2K^2}}-\frac{1-2Aa^2K^2}{2(1-Aa^2K^2)^{3/2}}\varepsilon^2\right]. \quad (18)$$

В решении (15) возникает следующая иерархия малости различных слагаемых и пространственных масштабов: $F\sim\varepsilon$, $\Phi\sim\varepsilon^2$ и $\partial/\partial x\sim\varepsilon$.

Воспользовавшись представлением (15), можно переписать фурье-образ u_x^2 в виде

$$u_0^2(k,\omega)\frac{k^2}{8}=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty 8}^{+\infty}dt\,(F_x^2-\frac{K^2}{8}F)\cos(kx-\omega t),$$

$$u_x^2=M+\tilde{N}\cos2\Theta+Q\sin2\Theta\,, \quad (19)$$

где

$$M=\left(F_x+K\Phi\right)^2-2KF\Phi+K^2F^2\,,$$

$$\tilde{N}=\frac{1}{2}\left[(F_x+K\Phi)^2+2KF\Phi_x-K^2F^2\right],$$

$$Q=-2K(FF_x+KF\Phi)\,.$$

Перейдя в движущуюся систему координат и сделав замену переменной интегрирования $x = p - ct$, воспользуемся формулой $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cos\omega t = 2\pi\delta(x)$ и произведем интегрирование по времени t. В результате получаем

$$u_0^2(k,\omega)\frac{k^2}{8} = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\Big\{M\cos kp\,\delta(\omega - ck) +$$
$$+\frac{1}{2}P\sum_{i=1}^{2}\Big[\cos(2K + (-1)^i k)p\,\delta(2\Omega + \omega - c(2K + (-1)^i k))\Big] +$$
$$+Q\sum_{i=1}^{2}\Big[\sin(2K + (-1)^i k)p\,\delta(2\Omega + \omega - c(2K + (-1)^i k))\Big]\Big\}, \tag{20}$$

где $P = 2\tilde{N}$. При этом последнее, интегральное, слагаемое в уравнении (11) (после интегрирования по ω) принимает вид

$$I = 1/2h\,\{\left[(F_x + K\Phi)\cos\Theta + (\Phi_x - KF)\sin\Theta\right]\tilde{I}\}_x, \tag{21}$$

где

$$\tilde{I} = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\int_{-\infty}^{+\infty} dp\cos kp\{N_1 M\cos k\Psi + (P/2 + Q)\times$$
$$\times[N_2\cos(k\Psi - 2\Theta) + N_3\cos(k\Psi + 2\Theta)]\} \tag{22}$$

и введены следующие обозначения, соответствующие замене аргументов в формуле (13) для $N(k,\omega)$:

$$N_1 = N(k, kc),\ N_2 = N(k - 2K, kc - 2\Omega),$$
$$N_3 = N(k + 2K, kc + 2\Omega).$$

Рассмотрим вклад различных слагаемых в $\tilde{I}$. В первом слагаемом ($\sim N_1$) параметр $\tilde{\varepsilon} = 1 - (c/c_t)^2$ не зависит от переменной интегрирования (в основном приближении он совпадает с введенным выше параметром $\dot{\varepsilon} = 1 - \omega^2/k^2c_t^2$). В этом случае $kh\sqrt{\tilde{\varepsilon}}/\operatorname{th}(kh\sqrt{\tilde{\varepsilon}}) \sim 1$ и

$$N_1 = \frac{\beta^2 h}{[kh\sqrt{2}/\operatorname{th}(kh\sqrt{2})] - 2} - 2\alpha^2 h + O(\varepsilon^2). \tag{23}$$

Знаменатель ядра (23) обращается в нуль при критическом значении $k = k_* \sim K \sim 1/h$. Этот полюс соответствует первой симметричной волне Рэлея–Лэмба с фазовой скоростью, равной скорости солитона $c \approx c_t$. Таким образом, движущийся в пластине солитон огибающей, представляющий собой локализованную сдвиговую волну, должен испускать волны Рэлея–Лэмба, и его стационарное движение, строго говоря, невозможно. Излучаемые волны имеют следующий вид: $v, w \sim \sin(k_*(x - c_t k))u_0^2(k_*,\omega)k_*^2/8$.

Ситуация упрощается в случае слаболокализованных солитонов с пространственным размером огибающей F: $L >> h$, когда фурье-преобразование квадрата огибающей солитона $u_0^2(k,\omega)k^2/8$ экспоненциально локализуется в интервале $k < 1/L << k_*$. В пределе стандартного солитона модифицированного уравнения Буссинеска имеем $u_0^2(k,\omega)k^2/8 \sim \sim k/\operatorname{sh}(\sigma k/\sqrt{\tilde{\varepsilon}})$, где $\sigma \sim 1$. В этом случае энергия, излучаемая в волну Рэлея–Лэмба, имеет порядок величины $E_* \sim \exp(-L/h)$. Таким образом, излучаемая малоамплитудным солитоном огибающей энергия мала, и для слаболокализованных солитонов можно пренебречь эффектом излучения.

Рассмотрим слагаемое с N_2. В этом случае

$$\tilde{\varepsilon} = 1 - \left(\frac{c}{c_t}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{c_t}\right)^2\left(\frac{1 - \Omega/Kc}{1 - k/2K}\right). \tag{24}$$

Как видно, величина $\tilde{\varepsilon}$ является малой (так как $1 - (c/c_t)^2 \sim \varepsilon^2$ и $1 - \Omega/Kc = O(\varepsilon^2)$) в области значений k меньших или порядка волнового числа несущей волны K. Таким образом, как и в случае первого слагаемого N_1, происходит излучение волн Рэлея–Лэмба при $k \sim K \sim 1/h$. Величина $\tilde{\varepsilon}$ стремится к бесконечности при $k = 2K$. В этом пределе ядро интегрального оператора принимает вполне определенное конечное значение $\sim h\beta^2/2$.

Для слагаемого с N_3 анализ, проведенный для N_2, справедлив при замене знаков при K и Ω.

Нас интересуют солитонные решения, пространственный размер которых L достаточно велик. Это означает, что достаточно велик размер огибающей $F(x)$ по координате x. Следовательно, фурье-преобразование его квадрата локализовано в малой области значений k, размер которой $\sim 1/L$. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением подынтегрального выражения в (18) только вблизи значения $k = 0$, где оно будет давать максимальный вклад, и пренебречь эффектом излучения волн Рэлея–Лэмба.

В соответствии с этим представим функции $N_i(k)$ в следующем виде: $N_1 = a_1 + a_2k^2$, $N_2 = a_3 + a_4k + a_5k^2$, $N_3 = a_3 - a_4k + a_5k^2$. При этом

$$a_1 = -\beta^2 h/2 - 2\alpha^2 h + O(\varepsilon^2), \tag{25}$$

$$a_2 = -\frac{\beta^2 h^3}{12}\frac{c^2}{c_t^2} + O(\varepsilon^2), \tag{26}$$

$$a_3 = \frac{\beta^2 h}{S} - 2\alpha^2 h + O(\varepsilon^2), \tag{27}$$

$$a_5 = \frac{\beta^2 h}{S^2}\left\{-\left(1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2(\sqrt{2}Kh)}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{2}Kh}{\operatorname{th}(\sqrt{2}Kh)}\right)h^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{2c_1^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{K^2} + \frac{U^2}{S}\right\} + O(\varepsilon^2), \tag{28}$$

где

$$U = 2h^2 K - \frac{2h^2 K}{\operatorname{th}^2(\sqrt{2}Kh)} + \frac{\sqrt{2}h}{\operatorname{th}(\sqrt{2}Kh)} - \frac{2(1-2c_1/\sqrt{\varepsilon_0})}{K},$$

$$S = \left[\frac{2\sqrt{2}Kh}{\operatorname{th}(\sqrt{2}Kh)}\right] - 4,$$

$$\varepsilon_0 = 1 - \left(\frac{c}{c_t}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{c_t}\right)^2 \left(1 - \frac{\Omega}{Kc}\right) \sim \varepsilon^2,$$

$$c_1 = \left(\frac{c}{c_t}\right)^2 \frac{1-\Omega/Kc}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \sim \varepsilon .$$

Значение коэффициента a_4 не приведено, так как после суммирования N_1 и N_2 соответствующее слагаемое $\sim k$ равно нулю.

После такой подстановки и интегрирования с использованием формул

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cos\omega x \cos\omega X = \pi\left[\delta(x-X) + \delta(x+X)\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sin\omega x \sin\omega X = \pi\left[\delta(x-X) - \delta(x+X)\right],$$

параметр $\tilde{I}$ принимает вид

$$\tilde{I} = \pi^2 \left\{ (a_1 - a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) M + (a_3 - a_5 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \times \right.$$
$$\left. \times (P\cos 2\Theta + Q\sin 2\Theta) \right\}. \qquad (29)$$

3. Анализ решений для солитонов огибающей

Подставив разложение (15) в уравнение (11) и используя выведенное соотношение (29), получаем

$$\{F_{\Psi\Psi}(1 - \frac{c^2}{c_t^2} - 6Aa^2K^2) + \Phi_\Psi(2K - \frac{2\Omega c}{c_t^2} - 4Aa^2K^3) +$$
$$+F(-K^2 + \frac{\Omega^2}{c_t^2} + Aa^2K^4) + F^3[-\frac{3}{4}rK^4 - \pi^2\frac{K^4}{2h}\times$$
$$\times(a_1 + \frac{1}{2}(a_3 + 4a_5K^2))]\}\cos\Theta + \{\Phi_{\Psi\Psi}(1 - \frac{c^2}{c_t^2} - 6Aa^2K^2) -$$
$$-F_\Psi(2K - \frac{2\Omega c}{c_t^2} - 4Aa^2K^3) + \Phi(-K^2 + \frac{\Omega^2}{c_t^2} + Aa^2K^4) +$$
$$+F_{\Psi\Psi\Psi}(-4Aa^2K) + F^2F_\Psi[-3\,rK^3 -$$
$$-\pi^2\frac{2K^3}{h}(a_1 + \frac{1}{2}(a_3 + 5a_5K^2))] + F^2\Phi[-\frac{3}{4}rK^4 -$$
$$-\pi^2\frac{K^4}{2h}(a_1 + \frac{1}{2}(a_3 + 4a_5K^2))]\}\sin\Theta = 0. \qquad (30)$$

Используя соотношения (16)–(18), оставляем в уравнении только основные члены $\sim\varepsilon^3$ и $\sim\varepsilon^4$ и приравниваем нулю коэффициенты при $\sin\Theta$ и $\cos\Theta$. Таким образом, для функций F, Φ получаем следующую замкнутую систему нелинейных уравнений:

$$A^* F_{\Psi\Psi} + \varepsilon^2 K^2 F + RF^3 = 0\,, \qquad (31)$$

$$A^*\Phi_{\Psi\Psi} + \varepsilon^2\Phi - 4Aa^2KF_{\Psi\Psi\Psi} +$$
$$+\left(\frac{4R}{K} - \frac{\pi^2K^5a_5}{h}\right)F^2F_\Psi + RF^2\Phi = 0, \qquad (32)$$

где

$$A^* = K^2Aa^2\frac{2K^2Aa^2 - 3}{1 - K^2Aa^2}, \qquad (33)$$

$$R = [-\frac{3}{4}rK^4 - \pi^2\frac{K^4}{2h}(a_1 + \frac{1}{2}(a_3 + 4a_5K^2))]. \qquad (34)$$

Слагаемые в уравнении (31) имеют порядок величины ε^3, в уравнении (32) — ε^4. В коэффициент R входит зависимость от толщины пластины. Однако учет пространственной ограниченности системы в данной задаче не приводит к появлению принципиально новых нелинейных слагаемых, в отличие от случая солитонов стационарного профиля, рассмотренного в работе [8].

Уравнение (31) представляет собой стационарную редукцию модифицированного уравнения Буссинеска с хорошо известным солитонным решением:

$$F = \sqrt{\frac{2}{|R|}}\frac{\varepsilon K}{\operatorname{ch}(\varepsilon\Psi K/\sqrt{A^*})}\,. \qquad (35)$$

Необходимо отметить, что уравнение (31) допускает солитонные решения только при условии $A^* < 0$, $R < 0$.

В случае нелинейных волн стационарного профиля $dF/d\Psi = d\Phi/d\Psi = 0$, $F = u_0 = \text{const} << 1$ и закон дисперсии линейных волн выглядит следующим образом:

$$\Omega^2 = K^2c_t^2 + Aa^2K^4c_t^2 - Ru_0^2\,. \qquad (36)$$

При этом, согласно критерию Лайтхилла

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial K^2} / \frac{\partial\Omega}{\partial u_0{}^2} < 0,$$

такая нелинейная волна становится модуляционно неустойчивой в области $R(K) < 0$ [8]. Развитие этой неустойчивости, как видно, приводит к образованию солитонов огибающей.

Таким образом, соотношение $R(K) < 0$ задает узкую область значений K, где возможно существование солитонов огибающей. Параметр несущей волны K лежит вблизи точки пересечения законов дисперсии сдвиговых волн и волн Рэлея–Лэмба в линейном приближении. При этом $k_* < K < \theta k_*$, где $k_* \sim 1/h$ и

$$\theta = \varsigma[1 + 1/4\left|\frac{2}{F}(3r - \alpha\beta - \alpha^2/2(2+\tilde{\varepsilon})\right|],$$

$$F = (\beta - \frac{\alpha^2}{4(2+\tilde{\varepsilon})^2}),\ \varsigma = 1 + O(\varepsilon).$$

Данный промежуток соответствует ранее определенной области неустойчивости нелинейной волны стационарного профиля [12].

Малые добавки к солитонному профилю могут быть найдены из уравнения (32). С учетом (31) оно может быть переписано в виде

$$A^*\Phi_{\Psi\Psi} + \varepsilon^2\Phi + (4\varepsilon^2 Aa^2 K/A^*)F_\Psi +$$
$$+ R'F^2F_\Psi + RF^2\Phi = 0, \qquad (37)$$

где $R' = 12Aa^2KR/A^* + 4R/K - \pi^2K^2a_5/h$.

С точностью до малого параметра ε^2 решение уравнения (37) может быть представлено в виде

$$\Phi = \varepsilon^2 K^2 \frac{R'}{\sqrt{2RA^*}R}\frac{\operatorname{sh}(\varepsilon K\Psi/\sqrt{A^*})}{\operatorname{ch}^2(\varepsilon K\Psi/\sqrt{A^*})}. \qquad (38)$$

Окончательно решение для солитона огибающей выглядит следующим образом:

$$u = \sqrt{\frac{2}{R}}K\frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}(\varepsilon x/\sqrt{A^*})}\cos\Theta +$$
$$+\varepsilon^2K^2\frac{R'}{\sqrt{2RA^*}R}\frac{\operatorname{sh}(\varepsilon\Psi/\sqrt{A^*})}{\operatorname{ch}^2(\varepsilon\Psi/\sqrt{A^*})}\sin\Theta. \qquad (39)$$

Найденное решение для солитона огибающей является, как и следовало ожидать, двухпараметрическим. Первый параметр — малый параметр ε, характеризующий амплитуду и отклонение частоты от частоты линейной сдвиговой волны. Второй параметр — волновое число K.

В основном приближении поведение огибающей определяется функцией $F \sim \varepsilon$. Учет малых добавок по ε^2 (т.е. функции Φ) приводит к изменению стандартной солитонной формы решения.

Заключение

В работе показано, что в тонкой упругой пластине могут существовать сдвиговые солитоны огибающей. Сформулирована модель для изучения почти сдвиговых солитонов огибающей в такой системе. Выведено одномерное интегро-дифференциальное уравнение для основной компоненты сдвиговой деформации. Предложен вариант асимптотический процедуры для нахождения солитонов огибающей (в меру малого параметра ε). Найдены приближенные малоамплитудные решения для солитонов огибающей и указаны параметры системы и параметры несущей волны, при которых такие солитоны могут существовать.

Авторы выражают признательность проф. А.П. Майеру за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Deutsche Forschungsgemeinschaft (грант MA 1074/9-1).

1. Л.К. Зарембо, В.А. Красильников, *УФН* **102**, 549 (1970).
2. J.D. Ashenbach, W*ave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London (1973).
3. V. Narayanamurti, C.M. Varma, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1105 (1970).
4. В.И. Наянов, *Письма в ЖЭТФ* **44**, 314 (1986).
5. A.M. Lomonosov, P. Hess, and A.P. Mayer, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 076104 (2002).
6. А.М. Самсонов, *Математическое моделирование. Нелинейные волны в сплошных средах,* Санкт-Петербург, Изд-во Политехнического университета (2005).
7. Yu.S. Kivshar and E.S. Syrkin, *Phys. Lett.* **A153**, 2 (1991).
8. А.С. Ковалев, Е.С. Сыркин, *ЖЭТФ* **100**, 522 (1992).
9. G.A. Maugin and H. Hadonaj, *Phys. Rev.* **B44**, 1266 (1991).
10. A.P. Mayer, D.F. Parker, and A.A. Maradudin, *Phys. Lett.* **A164**, 171 (1991).
11. A.P. Mayer, *Phys. Rep.* **256**, 237 (1995)
12. А.С. Ковалев, А.П. Майер, Е.С. Соколова, К. Экль, *ФНТ* **28**, 1092 (2002) [*Low Temp. Phys*. **28**, 780 (2002)].
13. A.S. Kovalev, A.P. Mayer, C. Eckl, and G.A. Maugin, *Phys. Rev.* **E66**, 036615 (2002).
14. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику,* Киев, Наукова думка (1989).
15. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1965).
16. А.С. Ковалев, Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук, Харьков (1990).

Two-parameter dynamical solitons in thin elastic plates

A.S. Kovalev and E.S. Sokolova

The dynamics of two-parameter elastic solitons with nearly shear polarization is investigated for a thin elastic plate of anharmonic material. One-dimensional integro-differential equations were derived for the purely shear displacements and a new version of asymptotical procedure is proposed to derive these equations. Approximate solutions for the envelope solitons were obtained and analyzed.

PACS: **68.35.–p** Solid surfaces and solid–solid interfaces: structure and energetics.

Keywords: elastic plate, nonlinear medium, shear wave, envelop soliton.